Déclic 2de
Maths

PROGRAMME 2026



hachette
ÉDUCATION

Les auteurs remercient Ludovic Adamcik, Odile Chazalviel, Céline Decarnin, Vincent Hamel et Fabrice Perrin pour la qualité et la pertinence de leur contribution.

Crédits photographiques

Plat 1 © « Amazone » Cez Art ; Plat 3 : A. © Francis Artigue ; B. © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; E. © STDI ; F. © Stefan Zachow/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; I. © Archives Charmet/Bridgeman Images ; J. © Leo Koenigsberger/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; M. © Mandelbrot/Wikimedia ; N. © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Com-mons ; Rabat intérieur arrière : C. © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; D. © Mondadori Publishers/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; G. © Nikolay Bogdanov-Belsky/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; H. © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; K. © Jean-Pierre Petit ; L. © Ben Barnhart ; O. © DR ; P. © Gunther~commonswiki/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; Rabat extérieur arrière : Q. © Zeeshan313b/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; R. © Rev. J. Silas Evans/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; S. © DR ; T. © www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/ ; U. © www.math.kth.se ; V. © Patrick Imbert/Collège de France ; W. © Klaus Barner/CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; X. © Gottlieb Friedrich Riedel ; Y. © Mathematical Association of America/Wikimedia ; Z. © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; 6 © Jun Su* ; 9 © Lapadus Daniel* ; 19 © Eka Chernomortseva* ; 20 © Uesiba* ; 25 © New Africa* ; 30 h © Wikimedia ; b © Printexstar* ; 31 © Sam Loyd, The Cyclopedia of puzzles, 1914 ; 32 © Pictorial Press Ltd/Alamy Banque D'Images ; 43 © Pavel1964* ; 45 h © DR ; b © Germanova Antonina* ; 51 h © Nicholas Hylton* ; b © G.dallorto/Wikipedia ; 52 © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; 55 © xkcd.com ; 56 © Mark Davidson/Alamy Banque D'Images ; 59 © Nichi Aso* ; 72 © VDV* ; 73 © Art Collection 2/Alamy Banque D'Images ; 74 © oticki* ; 75 © chrisdorney* ; 77 © Celli07* ; 82 © Vixit* ; 94 © Martin Rettenberger* ; 97 © ClS* ; 100 © Face Stock* ; 103 © Ground Picture* ; 106 © Max Topchii* ; 126 © A_B_C* ; 127 © ADV OLIN ; 138 © BeatoAerialPhotography* ; 141 © Google Earth ; 166 © tratong* ; 168 © SerFF79* ; 183 © Alexandra Lande* ; 185 © Anton Vierietin* ; 187 © wirakorn deelert* ; 190 © rospoint* ; 193 h © wikimedia commons ; b © Thomas Hansson* ; 215 © Neirfy* ; 291 © Association AAHDE ; 220 © SYLVAIN FELTEN* ; 223 © Cliff Chou* ; 238 © MakeUp Base* ; 239 © Pixel-Shot* ; 242 © Sylvain Bagni (Caïman) ; 246 © Mina Ryad* ; 249 © SerFF79* ; 253 © Tomas Ragina* ; 257 © Jean-Marc Favre-WOOlOOmooLoo* ; 266 © sripfoto* ; 267 © BearFotos* ; 268 © Pattar.w092* ; 276 © Diane Edorh* ; 285 h © topseller* ; b © Billion Photos* ; 287 © godongphoto* ; 289 © Daniel Hoz* ; 290 © KieferPix* ; 291 h © Elizaveta Galitckaia* ; b © BABAROGA* ; 296 © Coplay* ; 297 © Chris Moody* ; 300 © Sander van der Werf* ; 303 © Gorodenkoff* ; 304 hd © kungfu01* ; bg © Anna_0880* ; bd © Sergiy Palamarchuk* ; 305 © Cico* ; 306 © Grzegorz Czapski* ; 309 m © Gts* ; b © titoOnz* ; 310 © BY BRAZIL* ; 311 © Mega Pixel* ; 314 © Stefan Holm* ; 317 © Corinne Lafont ; 329 © Shahril KHMD ; 333 © Friends Stock* ; 335 g © Maridav* ; d © Space Images* ; © Lena Constantin* ; 336 © margouillat photo* ; 340 © PanicAttack* ; 342 © Pixavril* ; 344 © Ratthaphong Ekariyasap* ; 346 © Prostock-studio* ; 348 © Daniel Stroud-licence CC by sa ; 350 © CC-BY-SA-3.0 *via* Wikimedia Commons ; 359 © Yulnniya*

Portraits des cartouches *Correction type en vidéo* : © Pauline Marion.

*/Shutterstock.com

Édition : Corinne Lafont et Sylvie Fleur-Guiol
Couverture et rabats avant : Gabriel Rebufello
Maquette intérieure : ADN
Mise en page : STDI
Schémas : STDI
Fabrication : Léa Freling

hachette-education.com
© Hachette Livre 2026,
58 rue Jean Bleuzen, 92178 Vanves Cedex
ISBN : 978-2-01-722725-0
(ISBN à utiliser pour toute commande de l'ouvrage)

Ce livre ne peut être reproduit ni utilisé à des fins d'entraînement de systèmes d'intelligence artificielle. La fouille de textes et de données est interdite conformément à l'article 4(3) de la Directive (UE) 2019/790.

Hachette Éducation s'engage pour la préservation de l'environnement
Depuis plusieurs années, nous mettons en place des solutions innovantes et écoresponsables, en concertation avec nos fournisseurs, pour limiter notre empreinte carbone et diminuer l'utilisation du plastique, en suivant 5 grands objectifs :

1. *Optimiser le format, la pagination et le grammage du papier*
2. *Utiliser du papier certifié suivant l'un des 2 schémas de certification internationale, PEFC ou FSC*
3. *Supprimer peu à peu le pelliculage plastique de nos couvertures*
4. *Imprimer nos ouvrages en France ou en Europe*
5. *Recycler 100 % des ouvrages invendus*

hachette s'engage pour l'environnement en s'approvisionnant principalement en papier certifié et en réduisant l'empreinte carbone de ses livres.
L'empreinte carbone de cet exemplaire est de :
1200 g éq. CO_2
Rendez-vous sur www.hachette-durable.fr

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayant cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

SPECIMEN

avant-propos

Fidèle à son image, la collection « **Déclic** » souhaite avec ce manuel de Seconde permettre aux élèves et à leurs professeurs de bénéficier d'un instrument de travail accessible, agréable à utiliser, qui donne des mathématiques un panorama le plus large et le plus motivant possible dans le respect strict des programmes officiels.

L'activité mathématique est le fil conducteur de cet ouvrage, à travers la résolution de problèmes, l'acquisition de méthodes, le travail du raisonnement, l'exercice des automatismes, l'approche algorithmique…

Le **cours**, éclairé de nombreux exemples, a été conçu avec le souci de la clarté, de la rigueur et de l'accessibilité.

La **place de la preuve**, réaffirmée, est confortée par de nombreuses démonstrations dans le cours et dans les exercices.

Le **travail du calcul et des automatismes** est abordé de façon systématique, dans les activités et exercices proposés, mais aussi avec une page dédiée dans chaque chapitre, destinée à exercer la pratique régulière des automatismes et leur réinvestissement fréquent. Outre son intérêt en lui-même, l'épreuve de mathématiques de Première peut être ainsi également préparée et anticipée.

L'**exploitation des outils numériques** est présente dans l'ensemble du manuel et bénéficie régulièrement d'une page de travaux pratiques « Utiliser les outils numériques ».

La **démarche algorithmique** est également mobilisée, les chapitres proposant de façon régulière une page de travaux pratiques dédiée.

Outre la frise historique et l'abécédaire proposés dans le manuel, **l'histoire des mathématiques** est abordée fréquemment, afin de permettre aux élèves de replacer les notions travaillées dans leur contexte historique et de comprendre leur évolution.

Les rubriques habituelles à la collection sont par ailleurs largement maintenues, dans l'objectif de permettre aux élèves de mener des **travaux de recherche**, mais aussi de **s'autoévaluer**, de trouver dans leur manuel des ressources détaillées concernant méthodes et démarches, de disposer de bilans de positionnement, de réfléchir à l'approche orale pour présenter certains résultats… L'exercice de **l'autonomie des élèves** est également régulièrement mobilisé, avec des rubriques « méthodes », des pages de synthèse de cours, des aides méthodologiques…

Le présent manuel est **conforme au programme de mathématiques de la classe de Seconde** publié au Bulletin Officiel du 2 avril 2026. Ce programme tient compte des nouveaux programmes de collège, entrés en vigueur en septembre 2025 en Sixième, et qui atteindront la classe de Troisième en septembre 2028 seulement. Dans le contexte de la mise en place progressive de ces nouveaux programmes, les auteurs ont décidé de proposer dans ce manuel des notions désormais intégrées au futur programme de Troisième. Elles sont clairement identifiées dans la page « Sommaire » qui suit cet avant-propos.

Les auteurs souhaitent que le manuel qu'ils ont conçu soit un outil efficace et motivant permettant d'acquérir une formation mathématique solide et d'apprécier tout au long de l'année scolaire la richesse et la variété de l'activité mathématique.

Les auteurs

SPECIMEN

Sommaire

NOMBRES RÉELS ET CALCULS

1 Nombres réels 6
1. Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels
2. Intervalles de $\mathbb{R}$
3. Règles de calcul

2 Nombres entiers – Arithmétique ... 32
1. Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$
2. Nombres pairs, nombres impairs

3 Calcul littéral – Équations 56
1. Manipulations algébriques
2. Résolution algébrique d'équations

4 Ordre dans $\mathbb{R}$ – Inéquations 82
1. Inégalités
2. Comparaison de deux quantités
3. Résolution d'une inéquation

GÉOMÉTRIE

5 Géométrie plane – Vecteurs 106
1. Configurations dans le plan
2. Notion de vecteur
3. Somme de vecteurs
4. Produit d'un vecteur par un réel

6 Géométrie plane dans un repère ... 138
1. Coordonnées dans le plan
2. Calculs dans un repère orthonormé
3. Colinéarité et déterminant

7 Droites du plan 168
1. Vecteur directeur d'une droite
2. Équation cartésienne d'une droite
3. Équation réduite d'une droite
4. Position relative de deux droites

Les notions surlignées seront intégrées au programme de la classe de 3e à partir de la rentrée 2028.

FONCTIONS

8 Fonctions numériques et représentations graphiques 190
1. Fonction, courbe représentative
2. Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations
3. Fonctions de référence

9 Signe d'une fonction et inéquations 220
1. Signe d'une fonction
2. Résolution algébrique d'inéquations
3. Signe des fonctions de référence

10 Variations d'une fonction Extremums 246
1. Variations d'une fonction, extremums
2. Étude des fonctions affines
3. Étude des fonctions de référence

STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

11 Statistique descriptive et information chiffrée 276
1. Résumés statistiques
2. Regroupement par classe de même amplitude d'une série statistique
3. Proportions
4. Évolutions
5. Croisement de deux variables qualitatives

12 Probabilités – Probabilités conditionnelles 314
1. Vocabulaire des événements
2. Probabilités sur un ensemble fini
3. Probabilités conditionnelles

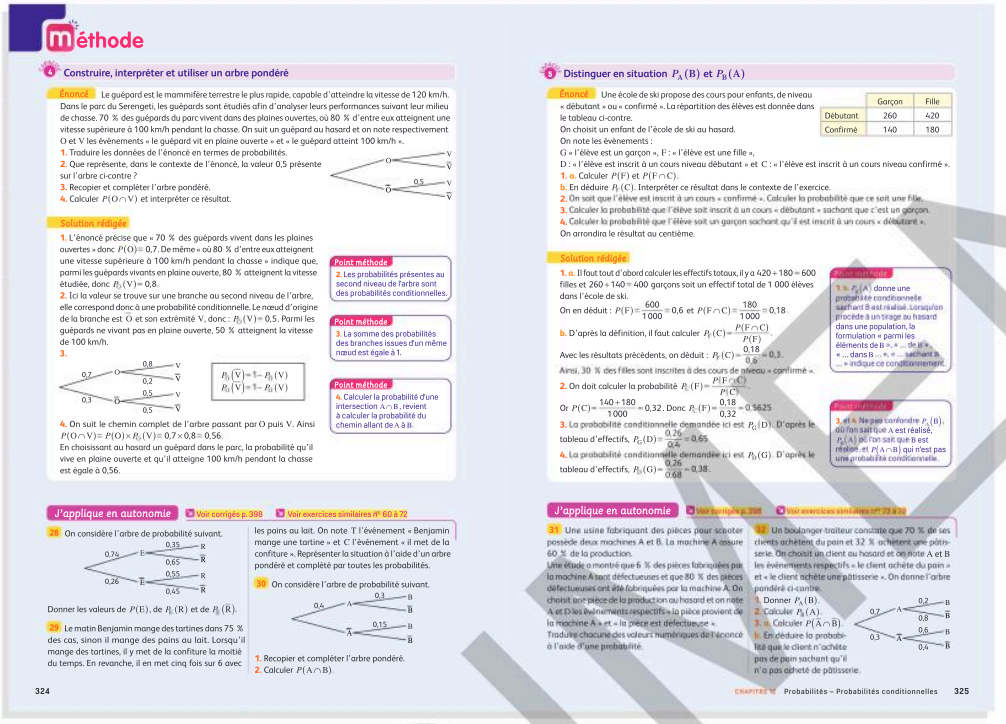
ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

1. Variable et affectation 350
2. Structure conditionnelle 350
3. Fonctions 352
4. Structures itératives : boucles 354

Vocabulaire ensembliste et logique 364
Calculatrices 370
Corrigés 376

SPECIMEN

Plus de 50 capacités du programme traitées en détail



méthode

4 Construire, interpréter et utiliser un arbre pondéré

Énoncé Le guépard est le mammifère terrestre le plus rapide, capable d'atteindre la vitesse de 120 km/h. Dans le parc du Serengeti, les guépards sont étudiés afin d'analyser leurs performances suivant leur milieu de chasse. 70 % des guépards du parc vivent dans des plaines ouvertes, où 80 % d'entre eux atteignent une vitesse supérieure à 100 km/h pendant la chasse. On suit un guépard au hasard et on note respectivement O et V les événements « le guépard vit en plaine ouverte » et « le guépard atteint 100 km/h ».

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Que représente, dans le contexte de l'énoncé, la valeur 0,5 présente sur l'arbre ci-contre ?
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré.
4. Calculer $P(O \cap V)$ et interpréter ce résultat.

Solution rédigée

1. L'énoncé précise que « 70 % des guépards vivent dans les plaines ouvertes » donc $P(O) = 0,7$. De même « où 80 % d'entre eux atteignent une vitesse supérieure à 100 km/h pendant la chasse » indique que, parmi les guépards vivants en plaine ouverte, 80 % atteignent la vitesse étudiée, donc $P_O(V) = 0,8$.
2. Ici la valeur se trouve sur une branche au second niveau de l'arbre, elle correspond donc à une probabilité conditionnelle. Le nœud d'origine de la branche est O et son extrémité V, donc : $P_O(V) = 0,5$. Parmi les guépards ne vivant pas en plaine ouverte, 50 % atteignent la vitesse de 100 km/h.
3. 0,7 O 0,8 V ; 0,2 $\overline{V}$; $\overline{O}$ 0,3 0,5 V ; 0,5 $\overline{V}$
4. On suit le chemin complet de l'arbre passant par O puis V. Ainsi $P(O \cap V) = P(O) \times P_O(V) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$.
En choisissant au hasard un guépard dans le parc, la probabilité qu'il vive en plaine ouverte et qu'il atteigne 100 km/h pendant la chasse est égale à 0,56.

Point méthode
2. Les probabilités présentes au second niveau de l'arbre sont des probabilités conditionnelles.

Point méthode
3. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Point méthode
4. Calculer la probabilité d'une intersection $A \cap B$, revient à calculer la probabilité du chemin allant de A à B.

$P_O(\overline{V}) = 1 - P_O(V)$
$P_{\overline{O}}(\overline{V}) = 1 - P_{\overline{O}}(V)$

J'applique en autonomie — Voir corrigés p. 398 — Voir exercices similaires n° 60 à 72

28 On considère l'arbre de probabilité suivant.

0,74 E 0,35 R ; 0,65 $\overline{R}$; 0,26 $\overline{E}$ 0,55 R ; 0,45 $\overline{R}$

Donner les valeurs de $P(E)$, de $P_E(R)$ et de $P_{\overline{E}}(\overline{R})$.

29 Le matin Benjamin mange des tartines dans 75 % des cas, sinon il mange des pains au lait. Lorsqu'il mange des tartines, il y met de la confiture la moitié du temps. En revanche, il en met cinq fois sur 6 avec les pains au lait. On note T l'événement « Benjamin mange une tartine » et C l'événement « il met de la confiture ». Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré et complété par toutes les probabilités.

30 On considère l'arbre de probabilité suivant.

0,4 A 0,3 B ; $\overline{B}$; $\overline{A}$ 0,15 B ; $\overline{B}$

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(A \cap B)$.

324

5 Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_{\overline{B}}(A)$

Énoncé Une école de ski propose des cours pour enfants, de niveau « débutant » ou « confirmé ». La répartition des élèves est donnée dans le tableau ci-contre.

	Garçon	Fille
Débutant	260	420
Confirmé	140	180

On choisit un enfant de l'école de ski au hasard.
On note les événements :
G « l'élève est un garçon », F : « l'élève est une fille »,
D : « l'élève est inscrit à un cours niveau débutant » et C : « l'élève est inscrit à un cours niveau confirmé ».

1. a. Calculer $P(F)$ et $P(F \cap C)$.
b. En déduire $P_F(C)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On sait que l'élève est inscrit à un cours « confirmé ». Calculer la probabilité que ce soit une fille.
3. Calculer la probabilité que l'élève soit inscrit à un cours « débutant » sachant que c'est un garçon.
4. Calculer la probabilité que l'élève soit un garçon sachant qu'il est inscrit à un cours « débutant ».
On arrondira le résultat au centième.

Solution rédigée

1. a. Il faut tout d'abord calculer les effectifs totaux, il y a $420 + 180 = 600$ filles et $260 + 140 = 400$ garçons soit un effectif total de 1 000 élèves dans l'école de ski.
On en déduit : $P(F) = \frac{600}{1000} = 0,6$ et $P(F \cap C) = \frac{180}{1000} = 0,18$.
b. D'après la définition, il faut calculer $P_F(C) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)}$.
Avec les résultats précédents, on déduit : $P_F(C) = \frac{0,18}{0,6} = 0,3$.
Ainsi, 30 % des filles sont inscrites à des cours de niveau « confirmé ».
2. On doit calculer la probabilité $P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$.
Or $P(C) = \frac{140 + 180}{1000} = 0,32$. Donc $P_C(F) = \frac{0,18}{0,32} = 0,5625$.
3. La probabilité conditionnelle demandée ici est $P_G(D)$. D'après le tableau d'effectifs, $P_G(D) = \frac{0,26}{0,4} = 0,65$.
4. La probabilité conditionnelle demandée ici est $P_{\overline{D}}(G)$. D'après le tableau d'effectifs, $P_{\overline{D}}(G) = \frac{0,26}{0,68} = 0,38$.

Point méthode
1. b. $P_A(B)$ donne une probabilité conditionnelle sachant B est réalisé. Lorsqu'on procède à un tirage au hasard dans une population, la formulation « parmi les éléments de B », « ... de B », « ... dans B ... », « ... sachant B ... » indique ce conditionnement.

Point méthode
3. et 4. Ne pas confondre $P_A(B)$, où l'on sait que A est réalisé, $P_B(A)$ où l'on sait que B est réalisé et $P(A \cap B)$ qui n'est pas une probabilité conditionnelle.

J'applique en autonomie — Voir corrigés p. 398 — Voir exercices similaires n° 73 à 80

31 Une usine fabriquant des pièces pour scooter possède deux machines A et B. La machine A assure 60 % de la production.
Une étude a montré que 6 % des pièces fabriquées par la machine A sont défectueuses et que 80 % des pièces défectueuses ont été fabriquées par la machine A. On choisit une pièce de la production au hasard et on note A et D les événements respectifs « la pièce provient de la machine A » et « la pièce est défectueuse ».
Traduire chacune des valeurs numériques de l'énoncé à l'aide d'une probabilité.

32 Un boulanger-traiteur constate que 70 % de ses clients achètent du pain et 32 % achètent une pâtisserie. On choisit un client au hasard et on note A et B les événements respectifs « le client achète du pain » et « le client achète une pâtisserie ». On donne l'arbre pondéré ci-contre.
1. Donner $P_A(B)$.
2. Calculer $P_{\overline{A}}(A)$.
3. a. Calculer $P(A \cap \overline{B})$.
b. En déduire la probabilité que le client n'achète pas de pain sachant qu'il n'a pas acheté de pâtisserie.

0,7 A 0,2 B ; $\overline{B}$; $\overline{A}$ 0,6 B ; $\overline{B}$

CHAPITRE 12 Probabilités – Probabilités conditionnelles 325

Deux escape games





À retrouver sur le site collection : hachette-clic.fr/26de2000

Les pictogrammes

LOGICIEL GÉOMÉTRIE — *Logiciel géométrique nécessaire*

TABLEUR — *Feuille de calcul sur tableur nécessaire*

PYTHON — *Exercice avec programmation Python*

PYTHON — *Exercice avec rédaction d'un programme python*

ALGO — *Exercice avec rédaction d'algorithme*

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES — *Diaporama pour tester les bases*

Exercice nécessitant l'ordinateur

Exercice nécessitant la calculatrice

Calculatrice non autorisée

1 — *Exercice corrigé en fin de manuel*

Démo 1 — *Exercice avec démonstration*

Fichier téléchargeable sur le site collection : hachette-clic.fr/26de2000

SPECIMEN

CHAPITRE

1 Nombres réels

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Donner un encadrement d'un réel par des décimaux
- CAPACITÉ 2 Arrondir au nombre de chiffres significatifs adapté à la situation
- CAPACITÉ 3 Utiliser la droite des réels
- CAPACITÉ 4 Représenter un intervalle
- CAPACITÉ 5 Effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires



Au fil du temps

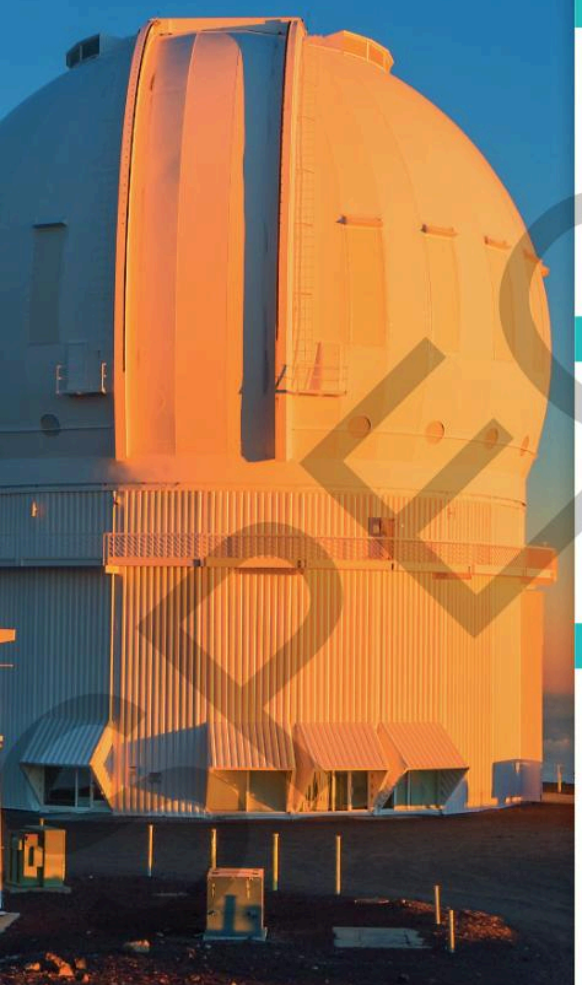
Les nombres ont accompagné l'activité humaine depuis la plus Haute Antiquité (Sumériens et Égyptiens). Très tôt, l'association s'est faite entre géométrie et nombres, et c'est Euclide (Grèce antique, sans doute aux alentours de 300 av. J.-C.), dans ses *Éléments*, qui a le premier formalisé la relation entre nombres et longueurs de segments. Il s'avéra ainsi l'initiateur de la « droite des réels », dont l'étude se poursuit avec « l'analyse réelle ».

SPECIMEN

Des maths partout !

Les nombres réels sont à la base du développement de « l'analyse », branche des Mathématiques utilisée dans toutes les disciplines scientifiques pour étudier et modéliser les phénomènes les plus divers. La mécanique céleste, en particulier, s'attache à décrire le mouvement des objets astronomiques.

Le télescope Canada-France-Hawaï au sommet de Mauna Kea sur la Grande île d'Hawaï, aux États-Unis.



RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2001

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Vrai ou faux ?

Dans chaque cas, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. $10^3 \times 10^4 = 10^7$

2. $10^{-5} = 0{,}0001$

3. L'écriture scientifique de 0,000237 est $2{,}37 \times 10^4$

4. $2^3 = 2\,000$

5. $3{,}786 \times 10^2$ est un entier naturel

6. $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{3}{11}$

7. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ est un nombre décimal

8. $8 - 7 \times 2$ est un entier relatif

C Utiliser les fractions

Pour sa rentrée à l'université, Mathilde doit acheter un ordinateur portable.

1. Ses parents payent $\frac{2}{5}$ du prix et ses deux mamies payent chacune $\frac{1}{6}$ du prix. Quelle fraction du prix reste-t-il à payer à Mathilde ?

2. Mathilde a trouvé un ordinateur à 510 €. Calculer la contribution de chacun à cet achat.

D Manipuler des racines carrées

1. Quelle est la longueur du côté d'un carré d'aire égale à 9 cm^2 ? Même question pour un carré d'aire égale à 13 cm^2.

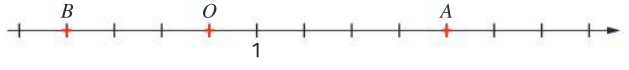
2. On considère deux nombres positifs a et b. Quelle est l'aire d'un carré dont les côtés ont pour longueur $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$? Quelle « formule » peut-on en déduire ?

3. Écrire sous forme du produit de deux nombres :

a. $\sqrt{6}$ **b.** $\sqrt{10}$ **c.** $\sqrt{12}$ **d.** $\sqrt{18}$

E Lire des abscisses sur une droite graduée

On considère la droite graduée ci-dessous d'origine le point O.



1. Quelle est l'abscisse du point A ? Et celle du point B ?

2. a. Reproduire la figure et placer les points C, D et E d'abscisses respectives 2 ; –1 et 7.

b. Préciser les distances AC, CD, BD et AB.

3. a. Quelle est la distance AE ? L'exprimer en fonction des abscisses des points A et E.

b. Quelle est la distance AB ? L'exprimer en fonction des abscisses des points A et B.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« Si les points M et N sont d'abscisses respectives m et n, alors la distance MN est égale à $n - m$. »

EXEMPLE

automatismes

Automatismes transversaux

1 Simplifier les fractions suivantes.

1. $\frac{15}{20}$ **2.** $\frac{120}{330}$ **3.** $\frac{21}{77}$

2 Résoudre les équations suivantes.

1. $x+3=5$ **2.** $3x=-6$

3. $2x+3=1$ **4.** $-3x+1=0$

3 Résoudre les équations suivantes.

1. $-5x+1=x+3$ **2.** $\frac{2}{3}x=-3$

4 Résoudre les équations suivantes.

1. $(x+1)(2x-3)=0$ **2.** $3x(-x+3)=0$

5 Le nombre 1 est-il solution de l'équation $x^2+1=-x+3$?

6 Le nombre -2 est-il solution de l'équation $x^2+x-2=0$?

7 Réduire les expressions suivantes.

1. $A(x)=-4x+2+3x-5$ **2.** $B(t)=-2t-7-t+8$

8 Développer les expressions suivantes.

1. $A(x)=2(3x+1)$ **2.** $B(x)=-3(-x+2)$

9 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x)=2(-x+1)-(2x-5)$

2. $B(x)=3(1-2x+x^2)-(3+x-x^2)$

10 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x)=(x+1)(2x-3)$ **2.** $B(x)=(x-2)(x+2)$

11 Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x)=3x+9$ **2.** $B(x)=2x^2-3x$

12 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=3$ et $AC=5$. Calculer BC.

13 Dans chaque cas, indiquer si le triangle ABC est rectangle. Justifier.

1. $AB=3$, $AC=4$ et $BC=5$.

2. $AB=2$, $AC=1$ et $BC=2{,}24$.

3. $AB=15{,}9$, $AC=8{,}4$ et $BC=13{,}5$.

14 Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+3$.

15 On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=-3x+1$$

1. Calculer $f(-1)$.

2. Calculer l'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f.

3. Déterminer l'antécédent de 0 puis de 3 par f.

Automatismes préparatoires au chapitre

16 Donner la valeur décimale de chaque fraction.

1. $\frac{1}{4}$ **2.** $\frac{-3}{2}$ **3.** $\frac{1}{5}$ **4.** $\frac{3}{10}$

5. $\frac{4}{5}$ **6.** $\frac{5}{4}$ **7.** $\frac{17}{10^2}$ **8.** $-\frac{3}{5}$

17 Écrire chaque nombre décimal sous forme de fraction irréductible.

1. 0,4 **2.** $-0{,}7$ **3.** 0,2 **4.** 0,75 **5.** 0,37

18 Écrire la liste des carrés de tous les nombres entiers compris entre -12 et 12.

19 Sur une droite graduée d'unité 3 cm, placer les points d'abscisses respectives :

$$-2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1{,}5\ ;\ \frac{21}{7} \text{ et } \sqrt{2}$$

20 Donner une valeur approchée au centième de l'aire d'un disque de 2 cm de rayon.

Pour les exercices 21 à 23, écrire chaque nombre sous forme de fraction irréductible.

21 **1.** $A=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ **2.** $B=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

3. $C=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ **4.** $D=2-\frac{5}{6}$

22 **1.** $A=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}$ **2.** $B=-3\times\left(-\frac{2}{9}\right)$

3. $C=\frac{2}{5}\div\frac{1}{3}$ **4.** $D=\left(1+\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)$

23 $A=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}$ et $B=\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}-1$

24 Écrire chaque nombre sous forme d'une puissance de 10.

1. 0,0001 **2.** 10 000 **3.** $10^2\times10^7$

4. $(10^{-2})^3$ **5.** $\frac{10^5}{10^8}$ **6.** $\frac{1}{10^{-7}}$

25 Sur une droite graduée, représenter dans chaque cas l'ensemble des nombres x vérifiant les conditions suivantes.

1. $-1\leqslant x\leqslant 2$ **2.** $x>3$

3. $x\leqslant -2$ **4.** $0\leqslant x<4$

26 Donner si possible :

1. tous les nombres dont le carré est 4 ;

2. un nombre négatif dont le carré est -1 ;

3. le nombre négatif dont le carré est 9 ;

4. le nombre positif dont le carré est 2 ;

5. tous les nombres dont le carré est 5.

SPECIMEN

activités

1 Des rationnels et des irrationnels sur la droite réelle

Objectif
Construire géométriquement des nombres rationnels et des nombres irrationnels sur la droite réelle.

1 Tracer une droite graduée de repère $(O\,;I)$. On prendra $OI = 4$ cm pour unité.
On se propose de construire à l'aide du compas les points A_2 et A_3 sur la droite $(O\,;I)$ d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

a. Construire des points B_1 et B_2 tels que $OI\,B_1B_2$ soit un carré.

b. Calculer la longueur OB_1. En déduire la construction du point A_2.

c. Construire le point B_3 tel que $OA_2B_3B_2$ soit un rectangle.

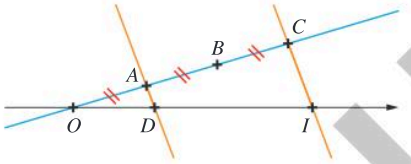
d. Calculer OB_3. En déduire la construction du point A_3.

e. En suivant le même procédé et en justifiant la démarche, construire le point A_5 d'abscisse $\sqrt{5}$.

Info
Sur la droite graduée $(O\,;I)$, le point O est appelé l'origine et la longueur OI représente une unité de graduation.
À chaque point de la droite est associé un unique nombre appelé son abscisse et réciproquement à chaque nombre est associé un unique point de la droite.

2 Sur la figure ci-dessous, on considère une droite graduée de repère $(O\,;I)$.

- Les points A, B et C sont tels que $OA = AB = BC$.
- La parallèle à la droite (IC) passant par A coupe la droite (OI) en D.



a. Déterminer l'abscisse du point D.

b. Construire sur la droite (OD) le point E d'abscisse $\frac{2}{3}$ en expliquant la démarche.

2 Autour du nombre $\sqrt{2}$

Objectif
S'initier au raisonnement par l'absurde pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1 Montrer que la diagonale d'un carré de côté 1 est égale à $\sqrt{2}$.

2 On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers naturels non nuls.

a. Montrer que $p^2 = 2q^2$.

b. Compléter le tableau ci-dessous donnant la valeur du chiffre des unités de p^2 et de $2q^2$ suivant le chiffre des unités de p et de q.

Si le chiffre des unités de p est	0	1	2	…	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est						
Si le chiffre des unités de q est	0	1	2	…	8	9
alors le chiffre des unités de $2q^2$ est						

c. À l'aide du tableau précédent, déterminer dans quels cas le chiffre des unités de p^2 est égal au chiffre des unités de $2q^2$.

d. Dans les deux cas trouvés, la fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ?

e. En déduire la nature du nombre $\sqrt{2}$.

Info



Pythagore et ses disciples ont découvert le nombre $\sqrt{2}$ au VI^e^ siècle avant J.-C., en cherchant le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté. Pythagore pensait que « l'harmonie divine consiste en rapports numériques de nombres entiers ». Hélas, $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde rationnel ; c'est pourquoi Pythagore a nommé ces nombres des **irrationnels**.

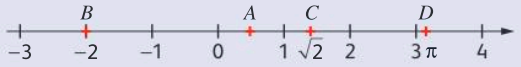
SPECIMEN

Cours

1 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

a Les ensembles de nombres

Définition L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$.



Remarque

Une droite graduée est appelée « droite des réels », ou « droite réelle », ou encore « droite numérique ».

Définition **Des nombres réels particuliers**

- L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls est l'ensemble des entiers naturels. Il est noté $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers négatifs et positifs est l'ensemble des entiers relatifs. Il est noté $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n un entier naturel, est l'ensemble des nombres décimaux. Il est noté $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$, est l'ensemble des nombres rationnels. Il est noté $\mathbb{Q}$.

Remarques

- Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce qui se note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Déterminer la « nature » d'un nombre réel, c'est préciser le plus petit ensemble de nombres auquel ce nombre appartient parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Déme

Démonstration : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
Dans ce cas, il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
Alors $a = \frac{10^n}{3}$. Or une puissance de 10 n'est jamais divisible par 3 : la fraction $\frac{10^n}{3}$ n'est pas entière. Ainsi, le nombre a n'est pas entier, ce qui contredit l'hypothèse ! On en déduit que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exemple

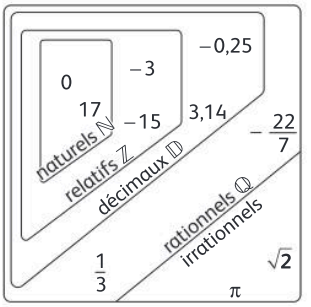
Les points A et B ont pour abscisses respectives 0,5 et -2.
Aux réels $\sqrt{2}$ et π sont associés les points C et D.

Exemples

- $12 \in \mathbb{N}$; $357 \in \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$; $56 \in \mathbb{Z}$
- $3{,}8 \in \mathbb{D}$; $\frac{-12}{10^5} \in \mathbb{D}$
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{7}{6} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\pi \in \mathbb{R}$

Info

Les réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés des irrationnels.



Rappel

Un entier est un multiple de 3 si la somme de ses chiffres est égale à un multiple de 3.
Et la somme des chiffres de 10^n vaut toujours 1.

b Encadrement décimal d'un nombre réel

Définition Soit x un nombre réel. Donner un encadrement décimal de x à 10^{-n} près, c'est trouver deux nombres décimaux a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$, avec $b - a = 10^{-n}$.

Remarque

$b - a$ est l'amplitude de l'encadrement.

Exemples

Un encadrement de π à 10^{-3} près est :

$$3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$$

Un encadrement de $-\frac{1}{7}$ à 10^{-2} près est :

$$-0{,}15 \leqslant -\frac{1}{7} \leqslant -0{,}14$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Donner un encadrement d'un réel par des décimaux

CAPACITÉ 2 Arrondir au nombre de chiffres significatifs adapté à la situation

Énoncé

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-8x+1$.

Calculer l'image de $\frac{1}{3}$ par f. En donner un encadrement à 10^{-2} près.

2. À chaque rebond, une balle rebondit au cinquième de la hauteur précédente. Si elle est lâchée d'une hauteur de 1,60 mètre, quelle distance totale (en mètre) la balle aura-t-elle parcourue avant de rebondir pour la cinquième fois ?

Solution rédigée

1. On a $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2-8\times\frac{1}{3}+1=\frac{1}{9}-\frac{8}{3}+1$.

On met au même dénominateur et on réduit : $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{8\times3}{3\times3}+\frac{9}{9}$.

Donc $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{14}{9}$.

On obtient le résultat ci-contre à la calculatrice.

Casio

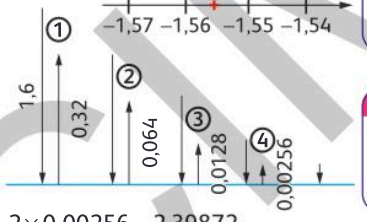
$(1\div3)^2-8\times1\div3+1$

-1.555555556

On obtient : $-1{,}56\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant-1{,}55$.



2. Le schéma ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) permet de mieux comprendre la situation.



La distance totale parcourue par la balle est :

$1{,}6+2\times0{,}32+2\times0{,}064+2\times0{,}0128+2\times0{,}00256=2{,}39872$

C'est-à-dire 2,39872 mètres.

Mais cette précision n'a pas de sens pratique et avec du bon sens implicite, la réponse attendue est « La distance parcourue par la balle est de 2,40 mètres (en arrondissant au centième, c'est-à-dire au centimètre près) ».

Point méthode

1. • Pour calculer l'image d'un nombre réel a par une fonction f, on remplace x par a dans l'expression $f(x)$.

• Donner un encadrement d'un nombre x à 0,01 près signifie déterminer des nombres a et b tels que $a\leqslant x\leqslant b$ et tels que la distance entre a et b est inférieure ou égale à 0,01.

Point méthode

2. Donner un résultat avec un nombre de décimales en cohérence avec le contexte.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 376 Voir exercices similaires nos 51 à 62

27 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+2x-1$$

Calculer $f(\sqrt{3})$ et $f(\pi)$. En donner un encadrement à 10^{-3} près.

28 **1.** Donner un encadrement à 10^{-2} près de l'aire d'un disque de rayon 2,5 cm.

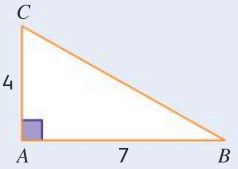
2. Donner un encadrement puis une valeur approchée à 10^{-3} près du volume d'un cône de 2 cm de rayon et de hauteur 3 cm.

29 L'aire d'un carré est 300 cm^2. Quelle est la mesure, en cm, de son côté ? *Arrondir au mm près.*

30 L'aire d'un carré est 740 cm^2. Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm près, de la longueur son côté.

31 Une étude a montré que 77 % des élèves de Seconde envisageait de choisir la spécialité Maths en Première. Si un lycée compte 258 élèves en Seconde, combien devraient choisir la spécialité Maths en Première selon cette étude ?

32 On considère le triangle rectangle ABC ci-dessous.



1. Calculer la longueur exacte de l'hypoténuse du triangle rectangle. En donner un encadrement à 10^{-3} près.

2. Déterminer les valeurs arrondies des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ à 1° près.

SPECIMEN

Cours

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

a Définition d'un intervalle

Définition Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

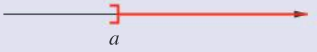
• **L'intervalle** $[a\,;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.

Il est représenté sur la droite des réels par un segment dont les extrémités sont les points d'abscisses a et b.



• **L'intervalle** $]a\,;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tel que $x > a$.

Il est représenté sur la droite des réels par une demi-droite dont l'origine est le point d'abscisse a.



Remarques

• Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intervalle $[a\,;b]$.

• On définit de la même façon les intervalles $]a\,;b]$, $]a\,;b[$, $[a\,;b[$, $[a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b]$ et $]-\infty\,;b[$.

• En l'infini, le crochet est toujours ouvert.

• L'ensemble $\mathbb{R}$ peut se noter $]-\infty\,;+\infty[$.

Commentaires

• Le sens des crochets indique si x peut être égal à la valeur de la borne.

• On peut se représenter les crochets comme une main qui contient la valeur et indique de quel côté elle se situe.



Cet intervalle est fermé en a et ouvert en b, il représente l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$.

Exemple

$x \leqslant 4$ peut s'écrire sous la forme $x \in]-\infty\,;4]$.

b Réunion – Intersection d'intervalles

Définition

• L'intersection de I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels x appartenant à I **et** à J ; le symbole $\cap$ se lit « inter ».

• L'union ou la réunion de I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels x appartenant à I **ou** à J ; le symbole $\cup$ se lit « union ».

Remarques

• En mathématiques, le « ou » est **inclusif**. Il ne signifie pas « ou bien » mais il « inclut » la possibilité du « et ».

• En notation symbolique, on a :

x appartient à $I \cap J$ équivaut à x appartient à I ET x appartient à J.

x appartient à $I \cup J$ équivaut à x appartient à I OU x appartient à J.

Exemples

Si $I = [-3\,;6]$ et $J = [1\,;9]$, alors $I \cup J = [-3\,;9]$ et $I \cap J = [1\,;6]$.



Si $I = [-5\,;2]$ et $J =]2\,;8]$, alors $I \cup J = [-5\,;8]$ et $I \cap J = \varnothing$ (l'ensemble vide).



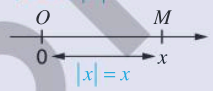
Sur les représentations ci-dessus de la droite réelle, $I \cup J$ correspond à la partie colorée par au moins une couleur, $I \cap J$ à la partie colorée par les deux couleurs.

c Valeur absolue

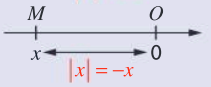
Définition

• Soient x un nombre réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est égale à la distance OM.

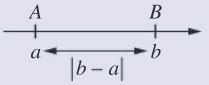
Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$



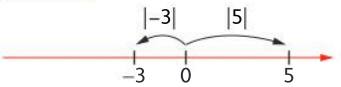
Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$



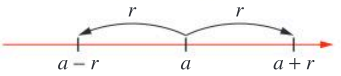
• Si A et B sont deux points de la droite des réels d'abscisses respectives a et b alors la distance entre les réels a et b est la distance AB et on a : $AB = |b - a|$.



Exemple



$|-3| = 3$ et $|5| = 5$



Remarque

Comme $AB = BA$ alors :

$|b - a| = |a - b|$

Remarque

Soit r un réel strictement positif. L'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r\,;a + r]$.

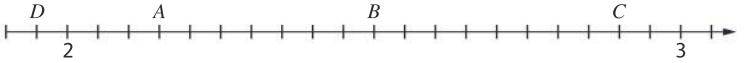
SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Utiliser la droite des réels
CAPACITÉ 4 Représenter un intervalle

Énoncé

1. Dans cette question, on considère la droite des réels représentée ci-dessous.



a. Lire les abscisses des points A, B, C et D.

b. Avec la précision permise par le graphique, placer les points d'abscisses :

$$2{,}34\ ;\ 2{,}7\ ;\ \frac{13}{5}\ ;\ \frac{127}{51}\ \text{et}\ 1{,}5\sqrt{2}$$

2. Traduire chaque inégalité sous forme d'intervalle et le représenter sur la droite des réels.

a. $x \geqslant 8$ **b.** $-2 < x < 11$ **c.** $x < 4$

3. On donne les intervalles $I =]-\infty\,;5]$ et $J = [-3\,;7[$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

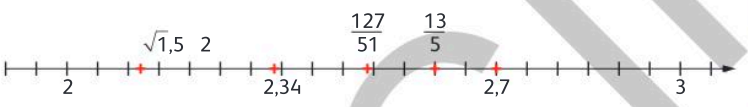
4. Dans chaque cas, représenter et déterminer sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que :

a. $|x-3| < 1$ **b.** $|x+4| \leqslant 0{,}2$

Solution rédigée

1. a. Les abscisses de A, B, C et D sont respectivement 2,15 ; 2,5 ; 2,9 et 1,95.

b. $\frac{13}{5} = 2{,}6$; $\frac{127}{51} \approx 2{,}49$ et $1{,}5\sqrt{2} \approx 2{,}12$.



Point méthode

1. L'unité entre 2 et 3 est partagée en 20 parties égales. Chaque graduation vaut donc $\frac{1}{20}$ soit 0,05.

2. a. 

$x \in [8\,;+\infty[$

b. 

$x \in]-2\,;11[$

c. 

$x \in]-\infty\,;4[$

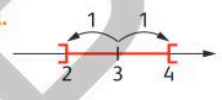
En l'infini, on ne dessine pas de crochet.

Point méthode

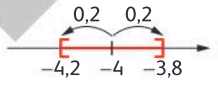
3. Pour l'**union** $(\cup)$, on prend ce qui est en vert **ou** en rouge, c'est-à-dire tout ce qui est colorié.
Pour l'**intersection** $(\cap)$, on prend ce qui est en rouge **et** en vert, c'est-à-dire la partie où les deux couleurs se superposent.

3. 

$I \cup J =]-\infty\,;7[$ et $I \cap J = [-3\,;5]$

4. a. 

$x \in]2\,;4[$

b. 

$x \in [-4{,}2\,;-3{,}8]$

Pour **b.** on écrit d'abord $|x+4| = |x-(-4)|$.

Point méthode

4. L'écriture sous la forme $|x-a|$ permet de repérer le centre a de l'intervalle.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 376 Voir exercices similaires nos 68 à 74

33 Traduire chaque inégalité sous forme d'intervalle.

1. $4 \leqslant x < 8$ **2.** $x \geqslant -0{,}5$ **3.** $x < 12$

34 Dans chaque cas, indiquer à quel intervalle appartient le réel x.

1. $|x-1| \leqslant 5$ **2.** $|x| < 3$ **3.** $|x+2{,}3| < 4$

35 Dans chaque cas, représenter les intervalles I et J sur la droite des réels puis déterminer leur union et leur intersection.

1. $I =]-8\,;5[$ et $J =]0{,}2\,;7]$

2. $I = [3\,;+\infty[$ et $J =]-2\,;+\infty[$

3. $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et $J = \left[\frac{1}{3}\,;6\right[$

SPECIMEN

Cours

3 Règles de calcul

a Puissances entières relatives

Définition Soient a un nombre réel et n un entier naturel.

- Pour $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^1 = a$
- Par convention, pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$
- Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples

- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
- $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

Règles de calcul a et b sont des réels non nuls, n et p deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \; ; \; \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \; ; \; (a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples

- $3^{-5} \times 3^{10} = 3^{-5+10} = 3^5$
- $\dfrac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$
- $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$
- $2{,}5^3 \times 4^3 = (2{,}5 \times 4)^3 = 10^3$

b Racines carrées

Définition Soit a un nombre réel positif ou nul. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est égal à a.

On a ainsi : $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemple

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Règles de calcul Soient a et b deux réels positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ et si } b \neq 0 : \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{6}{3}} = \sqrt{2}$
- $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$

Démo

Démonstration : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Étape 1 : On démontre d'abord que pour tous réels strictement positifs p et q : $p^2 = q^2 \Leftrightarrow p = q$.

$$p^2 = q^2 \Leftrightarrow p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 0 \Leftrightarrow p - q = 0 \text{ ou } p + q = 0$$

Or $p + q = 0$ implique $p = -q$, ce qui est impossible car p et q sont strictement positifs.

Ainsi, pour p et q strictement positifs : $p^2 = q^2 \Leftrightarrow p - q = 0$, c'est-à-dire $p = q$.

Conclusion : si p et q sont deux réels strictement positifs, $p^2 = q^2 \Leftrightarrow p = q$.

Étape 2 : Si a ou b est nul, l'égalité est vraie : $\sqrt{ab} = 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = 0$.

Pour tous réels a et b strictement positifs, on sait que $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ et que $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$.

Les deux nombres strictement positifs $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ont donc des carrés égaux (à $a \times b$).

D'après l'étape 1, avec $p = \sqrt{a \times b}$ et $q = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, on conclut :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Rappel

On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Info

Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie que l'expression de gauche est équivalente à l'expression de droite. C'est un lien logique ; ce n'est pas une abréviation.

Propriété Pour tout nombre réel a, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemples

- $\sqrt{6^2} = 6$
- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt{(2-\pi)^2} = |2-\pi| = \pi - 2$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 5 Effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.

Énoncé

1. Calculer et simplifier l'écriture des nombres $A=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ et $B=\dfrac{\frac{3}{4}-4}{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$.

2. Exprimer sous la forme d'une puissance de 2 le nombre $C=\dfrac{2^3\times 8^{-2}}{4^3}$.

3. Écrire le nombre $D=2\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers avec b le plus petit possible.

4. Montrer que le nombre $E=\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)$ est un entier relatif.

Solution rédigée

1. $A=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{3}-\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{2}{3}-\frac{8}{15}$

$A=\frac{2\times5}{3\times5}-\frac{8}{15}=\frac{10}{15}-\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$

$B=\dfrac{\frac{3}{4}-4}{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{4\times4}{1\times4}}{\frac{3\times3}{4\times3}+\frac{1\times4}{3\times4}}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{16}{4}}{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}}=\dfrac{-\frac{13}{4}}{\frac{13}{12}}$.

$B=\frac{-13}{4}\times\frac{12}{13}=\frac{-13\times12}{4\times13}=-\frac{12}{4}=-3$.

2. $C=\dfrac{2^3\times8^{-2}}{4^3}=\dfrac{2^3\times\left(2^3\right)^{-2}}{\left(2^2\right)^3}$

$C=\dfrac{2^3\times2^{-6}}{2^6}=\dfrac{2^{-3}}{2^6}=2^{-3-6}=2^{-9}$

3. $D=2\sqrt{9\times3}-\sqrt{4\times3}+\sqrt{3}$

$D=2\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$D=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

4. $E=\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=5-4\times3=5-12$, donc $E=-7$. Ainsi E est un entier relatif.

Point méthode

1. • La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.
• On applique ensuite les règles de calcul sur les fractions.

Point méthode

2. On écrit chaque nombre à l'aide d'une puissance de 2 et on utilise les règles de calcul sur les puissances.

Point méthode

3. Pour écrire $\sqrt{N}$ sous la forme $p\sqrt{q}$ (lorsque cela est possible), on décompose N sous la forme d'un produit dont un facteur est un carré parfait, puis on utilise la formule $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 376 Voir exercices similaires nos 77, 86, 90 et 91

36 Écrire chaque nombre sous forme de fraction irréductible.

$A=\frac{3}{7}+\frac{4}{21}-\frac{5}{2}$; $B=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

$C=\frac{2}{3}\div\frac{1}{5}-\frac{1}{5}$; $D=\dfrac{1-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}$.

37 Écrire chaque nombre sous la forme d'une puissance de 3.

$A=3^4\times3^{-7}$; $B=\dfrac{3^8}{3^{12}}$; $C=\left(3^{-2}\right)^{-3}\times3^{-6}$;

$D=\dfrac{(-9)^{-1}}{(-3)^{-1}}$; $E=\dfrac{9^{-2}\times3}{27^3}$.

38 Montrer que $C=\left(\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$ est un entier relatif.

39 Écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible.

$A=5\sqrt{8}-\sqrt{50}$; $B=\sqrt{63}-2\sqrt{28}+\sqrt{700}$

40 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC=\sqrt{24}$ et $BC=\sqrt{216}$.

1. Calculer AB et écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible.

2. Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Montrer que le périmètre du triangle ABC est $8\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

SPÉCIMEN

Je revois mon cours

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (entiers positifs).
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs (entiers positifs ou négatifs).
$\mathbb{D}$: ensemble des décimaux (nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$).
$\mathbb{Q}$: ensemble des rationnels (nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$).
$\mathbb{R}$: ensemble des réels (abscisses de tous les points d'une droite graduée).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Droite des réels et intervalles

La droite des réels permet de visualiser les intervalles, qui correspondent aux parties « d'un seul tenant » de la droite : droite tout entière, demi-droite ou segment.



$I = [-1;5[$ $\quad J = [2;+\infty[$

$I \cup J$ est l'**union** de I et de J : c'est l'ensemble des réels appartenant à I ou à J.

$$I \cup J = [-1;+\infty[$$

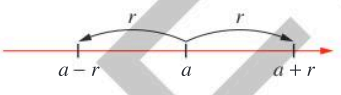
$I \cap J$ est l'**intersection** de I et de J : c'est l'ensemble des réels appartenant à I et à J.

$$I \cap J = [2;5[$$

Valeur absolue

Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$.
Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$.
Si A et B sont deux points de la droite des réels d'abscisses respectives a et b alors $AB = |b-a|$.
Si x, a et r sont des réels avec $r > 0$, alors

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow x \in [a-r\,;a+r]$$



Règles de calcul

Puissances

Pour tout réel a et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et $a^1 = a$.
Par convention, pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$.
Pour tous réels a et b non nuls et tous entiers relatifs n et p :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p}\,;\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}\,;\left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n\,;\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Racines

Pour tous réels a et b **positifs** :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,;\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si} \quad b \neq 0$$

Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$

Encadrement décimal d'un réel

Un encadrement décimal du réel x à 10^{-n} près est de la forme $a \leqslant x \leqslant b$ où a et b sont des décimaux tels que $b - a = 10^{-n}$
($b-a$ est l'amplitude de l'encadrement)



Je m'exerce à démontrer

Pour tous nombres réels a et b, $|a \times b| = |a| \times |b|$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2002

SPECIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2003

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Voir corrigés p. 376

	a	b	c
1. Le nombre $-\frac{18}{3}$ est :	rationnel	un entier relatif	un entier naturel
2. Le nombre $\frac{2}{13}\left(3-\frac{8}{7}\right)$ est :	décimal	rationnel	réel
3. $\frac{3}{4}\div\frac{4}{7}$ est égal à :	$\frac{3}{7}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{8}-\frac{5}{16}$
4. 6^2+8^2 est égal à :	10^2	14^2	14^4
5. 10^{-5} est égal à :	0,00010	0,00005	0,00001
6. $\frac{10^2}{10^{-4}}$ est égal à :	un million	10^{-2}	dix millions
7. 7^8 est égal à :	$7^3\times7^5$	700 000 000	$(7^4)^2$
8. 4^{-1} est égal à :	$2{,}5\times10^{-1}$	-4	$\frac{1}{4}$
9. $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ est égal à :	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$
10. $\left(4\sqrt{3}\right)^2$ est égal à :	48	12	36
11. Si x est un nombre négatif alors :	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = -x$	$\lvert x\rvert$ n'existe pas
12. L'intersection des intervalles $]-\infty;7]$ et $[-5;21[$ est :	$\varnothing$	$]-\infty;21[$	$[-5;7]$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. L'ensemble des réels x tels que $-9 < x \leqslant 4$ est l'intervalle $]-9;4[$.

2. $x \in]-\infty;6[$ se traduit par $x < 6$.

3. $-7{,}65 \in [-7{,}6;-2[$.

4. La distance entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{8}$ est : $\left|\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right| = \frac{5}{24}$.

5. $]-5;+\infty[\cup]-8;-1] =]-5;-1]$

6. On considère l'intervalle représenté ci-dessous.



a. Le nombre -4 appartient à cet intervalle.

b. La distance entre -3 et 13 est 16.

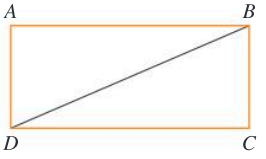
c. Cet intervalle est centré en 5.

d. Tous les réels x appartenant à cet intervalle vérifient $|x-8| \leqslant 5$.

Partie B.

$ABCD$ est un rectangle tel que :

$AD = \sqrt{27}$ et $DB = 5\sqrt{3}$



1. Un encadrement de DB à 10^{-3} près est :

$8{,}66 < DB < 8{,}67$

2. $AB = \sqrt{27}+\sqrt{3}$.

3. Le périmètre du rectangle $ABCD$ est $14\sqrt{3}$.

4. L'aire du rectangle $ABCD$ est $12\sqrt{3}$.

5. Le périmètre du triangle ABD est $7\sqrt{3}$.

6. L'aire du triangle ABD est $180\sqrt{3}$.

SPECIMEN

exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2004

Acquérir des automatismes

Pour les exercices 41 et 42, calculer mentalement chaque nombre.

41 1. 10^{-4} 2. 10^{7} 3. $\sqrt{10\,000}$ 4. $\left(\sqrt{7}\right)^2$

42 1. $|-8|$ 2. $|17|-|-8|$ 3. $|10-15|$

43 Dans chaque cas, donner un encadrement du nombre avec l'amplitude indiquée.

1. $\frac{9}{4}$, amplitude 1
2. $\frac{1}{3}$, amplitude 10^{-2}
3. $\frac{-2}{3}$, amplitude 10^{-1}

44 Vrai ou Faux ?

Justifier votre réponse.

1. Le nombre 2^{-1} est un entier relatif.
2. Le nombre $\frac{36}{5}\times\frac{25}{6}$ est un entier naturel.
3. Le nombre $\sqrt{(-4)^2}$ est un entier relatif.
4. Le nombre $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ est un nombre décimal.
5. Le nombre $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}\times\left(\sqrt{2}\right)^{6}$ est un nombre irrationnel.

Pour les exercices 45 à 47, indiquer pour chaque nombre le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

45 1. 3,14 2. $\sqrt{5}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. $6{,}23\times10^{2}$

46 1. $-\frac{14}{7}$ 2. $2{,}5\times10^{-3}$ 3. $\sqrt{64}$ 4. 2π

47 1. $(-4)^0$ 2. $\frac{-18}{3}$ 3. $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ 4. $\frac{7}{4}$

48 Écrire chaque nombre sous la forme 2^p où p est un entier relatif.

1. $2^{-3}\times2^{4}$ 2. $2^{-5}\times2^{-2}$ 3. $\left(2^{-3}\right)^5$
4. $\frac{2^3}{2^{11}}$ 5. $2^{-8}\times4^{5}$ 6. $\frac{4^{-5}}{4^{7}}$

49 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier naturel.

1. $\sqrt{50}$ 2. $\sqrt{8}$ 3. $\sqrt{18}$ 4. $\sqrt{72}$

50 Écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, b étant le plus petit possible.

1. $\sqrt{12}$ 2. $\sqrt{200}$ 3. $\sqrt{54}$ 4. $\sqrt{45}$

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Donner un encadrement d'un réel par des décimaux

Voir p. 11

51 Donner un encadrement de chaque nombre à 10^{-2} près.

1. 5,7282 2. – 38,493 3. $\frac{3}{7}$ 4. $\sqrt{3}$

52 Donner un encadrement de chaque nombre d'amplitude 10^{-1}.

1. $1243{,}7\times10^{-2}$ 2. $-0{,}00694\times10^{3}$
3. $\frac{-5}{6}$ 4. $\frac{\pi}{2}$

53 Donner un encadrement de $\frac{13}{7}$:

1. à 10^{-1} près 2. à 10^{-2} près 3. à 10^{-3} près

Pour les exercices 54 à 56, donner un encadrement du nombre donné avec la précision indiquée.

54 Encadrement de π à 10^{-2} près.



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2005

55 Encadrement de $\frac{-2}{7}$ à 10^{-3} près.

56 Encadrement de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près.

Capacité 2 Arrondir au nombre de chiffres significatifs adapté

Voir p. 11

57 La loi d'Ohm indique que la tension U (en volt) aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité I (en ampère) du courant qui la traverse, selon la formule $U = RI$, où R est la valeur de la résistance (en ohm).

Une résistance de 38 ohms est traversée par un courant de 3,2 mA (milliampères).

Quelle est la tension aux bornes de cette résistance ? *Arrondir au mV près.*

58 Une grande surface organise un jeu et donne à ses clients des jetons à introduire dans une machine pour obtenir un éventuel lot.

La machine a été paramétrée pour que, chaque jour, 1,5 % des joueurs gagne un lot.

Ce samedi, 5 319 clients ont joué.

Combien de clients ont gagné un lot ?

SPECIMEN

59 Amélie veut tracer un triangle rectangle tel qu'un côté de l'angle droit mesure 4,5 cm et l'hypoténuse mesure 8 cm.
Quelle est, au mm près, la mesure de l'autre côté de l'angle droit ?

Pour les exercices **60** *à* **62**, *arrondir le résultat en utilisant un nombre de chiffres adapté au problème.*

60 Déterminer le côté d'un terrain carré d'aire 79 m^2.



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2006

61 Déterminer le volume en centilitres d'un verre de forme cylindrique de rayon 3 cm et de hauteur 15 cm.

Rappel
$1\,l = 1\,dm^3$



62 Déterminer le rayon d'une bague circulaire de longueur 5,6 cm.

CHAPITRE 3 Utiliser la droite des réels

Voir p. 13

Pour les exercices **63** *à* **65**, *lire l'abscisse de chaque point placé sur la droite des réels.*

63



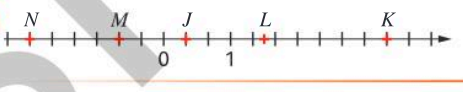


CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2007

64



65



66 Placer sur la droite ci-dessous les points A, B, C et D d'abscisses respectives $\frac{25}{6}$, $\frac{14}{3}$, $\frac{11}{3}$ et $\frac{31}{6}$.



67 Placer sur la droite ci-dessous les points E, F, G et H d'abscisses respectives $\frac{2}{5}$, $1-\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}-1$ et $2-\frac{4}{5}$.

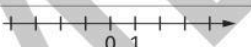


CHAPITRE 4 Représenter un intervalle

Voir p. 13

68 Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée et écrire sous la forme d'un intervalle l'ensemble des réels x vérifiant la condition.
1. x est un réel supérieur ou égal à 10.
2. x est un réel strictement positif.
3. x est un réel compris entre −5 exclu et 7 inclus.
4. x est un réel strictement inférieur à 2.

69 Reproduire et compléter le tableau suivant.

Inégalité	Représentation graphique	Intervalle
$-3 \leqslant x \leqslant 1$		
		$x \in]0,5\,;3[$
		
$x \geqslant 0,5$		
		$x \in]-\infty\,;3[$
		
$x \leqslant 0$		

Pour les exercices **70** *à* **72**, *représenter les intervalles* I *et* J *sur une même droite graduée puis déterminer* $I \cap J$ *et* $I \cup J$.

70 **1.** $I =]3\,;12[$ et $J =]6\,;+\infty[$
2. $I =]-\infty\,;9]$ et $J =]5\,;+\infty[$
3. $I = [-2\,;9]$ et $J = [9\,;+\infty[$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2008

71 **1.** $I = [-4\,;+\infty[$ et $J =]-7\,;0[$
2. $I = [-5\,;10[$ et $J =]-8\,;+\infty[$
3. $I =]-\infty\,;2]$ et $J =]2\,;+\infty[$

72 **1.** $I =]-\infty\,;8[$ et $J = [2\,;11[$
2. $I = [1\,;4]$ et $J = [4\,;+\infty[$
3. $I =]-2\,;+\infty[$ et $J = [7\,;9]$

73 Dans chaque cas, représenter l'intervalle I sur une droite graduée et traduire la condition $x \in I$ par une inégalité de la forme $|x-a| \leqslant r$.
1. $I = [-3\,;3]$ **2.** $I = [2\,;6]$ **3.** $I = [-1\,;3]$

74 Dans chaque cas, représenter et déterminer l'ensemble des réels x tels que :
1. $|x-2| < 3$ **2.** $|x+5| \leqslant 1$

SPECIMEN

Exercices Application

Savoir-faire 5 — Effectuer des calculs numériques mettant en jeu des puissances, des racines, des écritures fractionnaires

Voir p. 15

75 Écrire chaque nombre sous forme décimale.

$A = 7{,}23 \times 10^3$ $B = 234{,}7 \times 10^{-4}$

$C = 4 \times 10^{-2}$ $D = 10^{-5}$

76 Écrire chaque nombre sous la forme d'une puissance de 10 lorsque cela est possible.

1. 100 000
2. 0,00001
3. 10 millions
4. $10^{15} \times 10^8$
5. $10^2 + 10^{-3}$
6. $\dfrac{1\,000\,000}{0{,}01}$

77 Écrire chaque nombre sous la forme 3^n où n est un entier relatif.

1. $3^5 \times 3^{-12}$
2. $(3^6)^4$
3. $\dfrac{3^8}{3^{13}}$
4. 27^{-2}
5. 81×3^{-5}
6. $\dfrac{9^4}{(3^{-3})^6}$

78 Écrire chaque nombre sous la forme 2^n où n est un entier relatif.

1. $2^7 \times 2^{-3}$
2. 4^{-5}
3. $2^{-2} \times 8^{-3}$

79 Indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. $4^8 \times 2^{-19}$ est égal à :
   a. 8^{-11} b. 2^{-3} c. 2^{-11} d. $\dfrac{1}{8}$
2. $\dfrac{25^7}{5^{-9}}$ est égal à :
   a. 5^{23} b. 5^5 c. 5^{-2} d. $\dfrac{1}{25}$
3. $(3^6)^{-7}$ est égal à :
   a. 3^{-1} b. 3^{-42} c. $\dfrac{1}{3}$ d. $\dfrac{1}{3^{42}}$
4. $2^{-2} \times 5^{-3} \times 5^3$ est égal à :
   a. 2^{-2} b. 0 c. $10^{-5} \times 5^3$ d. 0,25

Pour les exercices 80 à 82, donner l'écriture scientifique de chaque nombre.

80 1. 43 218 2. 0,0000534 3. 35 384,5



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2009

81

1. $13{,}5 \times 10^{16}$
2. $0{,}4 \times 10^{23}$
3. $7 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{11}$

82

1. 0,0324
2. 746×10^{-10}
3. $\dfrac{6 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{3}$

Pour les exercices 83 à 86 calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

83

1. $A = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$
2. $B = 4 - \dfrac{5}{3}$
3. $C = \dfrac{8}{3} - 1 - \dfrac{1}{5}$

84

1. $A = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{3}$
2. $B = 27 \times \dfrac{4}{3}$
3. $C = 2 \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{14}{9}$

85

1. $A = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{3}{2}$
2. $B = 3 \div \dfrac{2}{5}$
3. $C = -\dfrac{3}{7} \div 2$

86

1. $A = \dfrac{2}{9} - \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8}$
2. $B = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5} \div \dfrac{6}{5}$
3. $C = \left(1 + \dfrac{2}{5}\right) \div \left(3 - \dfrac{1}{5}\right)$

87 Nathan a emmené ses cartes de jeux à l'école. Il en donne $\dfrac{1}{4}$ à Kevin et les $\dfrac{3}{5}$ de ce qu'il reste à Samira. Quelle fraction du total de ses cartes de jeux lui reste-t-il ?



88 Écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers et b le plus petit possible.

1. $\sqrt{27}$
2. $\sqrt{32}$
3. $\sqrt{28}$
4. $\sqrt{75}$
5. $\sqrt{48}$
6. $\sqrt{800}$

89 Vrai ou faux ?

Justifier votre réponse.

1. $-\sqrt{7}^2 = 7$
2. $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 12$
3. $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
4. $\sqrt{(-5)^2} = -5$
5. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ est rationnel
6. $4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

90 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels.

1. $A = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
2. $B = \left(\sqrt{2}\right)^3$
3. $C = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - \sqrt{8}$
4. $D = 3\sqrt{5} \times \left(2\sqrt{5}\right)^2$

91 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = \sqrt{18}$ et $AC = \sqrt{32}$.

1. Montrer que $BC = 5\sqrt{2}$.
2. Calculer la valeur exacte du périmètre de ABC.
3. Calculer l'aire de ABC.

SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Pour les exercices 92 et 93, compléter les pointillés avec le symbole $\in$ ou $\notin$.

92 **1.** $-13\ldots\ \mathbb{N}$ **2.** $2{,}5\ldots\ \mathbb{Q}$ **3.** $\sqrt{100}\ldots\ \mathbb{N}$
4. $\frac{2}{3}\ldots\ \mathbb{D}$ **5.** $\sqrt{3}\ldots\ \mathbb{Q}$ **6.** $\frac{\pi}{3}\ldots\ \mathbb{Q}$

93 **1.** $\frac{1}{3}\ldots\ \mathbb{D}$ **2.** $\frac{3}{4}\ldots\ \mathbb{D}$ **3.** $-3{,}4\ldots\ \mathbb{Z}$
4. $\frac{84}{14}\ldots\ \mathbb{N}$ **5.** $-\frac{12}{\sqrt{100}}\ldots\ \mathbb{D}$ **6.** $\frac{\pi+1}{\pi+2}\ldots\ \mathbb{R}$

94 Reproduire le tableau et mettre une croix dans la case lorsque le nombre appartient à l'ensemble.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-123					
$\sqrt{7}$					
$\frac{3}{5}$					
$\frac{5}{7}$					
10^8					
$-2{,}3$					

Pour les exercices 95 à 98, donner dans chaque cas le plus petit ensemble de nombres auquel le nombre proposé appartient, en indiquant les simplifications éventuelles.

95 **1.** $\frac{12}{72}$ **2.** 4×10^{-3} **3.** $-\frac{12}{\sqrt{9}}$
4. $0{,}3333$ **5.** $\sqrt{2}$ **6.** $\frac{189}{3}$

96 **1.** $3{,}82\times10^6$ **2.** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **3.** $\frac{45}{10\,000}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ **5.** $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

97 **1.** $\frac{5}{5}$ **2.** $\frac{\pi}{2\pi}$ **3.** $\frac{\pi+1}{\pi+2}$
4. $2\sqrt{3}+1$ **5.** $(\sqrt{5})^2$ **6.** $\frac{0{,}45}{0{,}05}$

98 **1.** $\frac{2\sqrt{81}}{3}$ **2.** $\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{3}$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$

99 On considère les nombres suivants :
$a=(\sqrt{2})^{-3}\times(\sqrt{2})^{7}$ et $b=2\sqrt{2}-3-\sqrt{8}$
1. Ana affirme que a est un entier naturel et b un entier relatif. A-t-elle raison ? Justifier.
2. Donner la nature des nombres $a\times b$, $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$.

100 Compléter les pointillés par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
1. $25{,}364\in\ldots$ mais $25{,}364\notin\ldots$.
2. $\sqrt{2}\in\ldots$ mais $\sqrt{2}\notin\ldots$.
3. $-15\in\ldots$ mais $-15\notin\ldots$.
4. $\frac{3}{7}\in\ldots$ mais $\frac{3}{7}\notin\ldots$.
5. $\frac{3}{4}\in\ldots$ mais $\frac{3}{4}\notin\ldots$.

101 Donner si possible :
1. un entier qui n'est pas naturel ;
2. un décimal qui n'est pas rationnel ;
3. un rationnel qui n'est pas décimal ;
4. un irrationnel ;
5. un réel qui n'est pas décimal.

102 Donner si possible :
1. un décimal compris entre $\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$;
2. un entier négatif dont le carré est égal à 9 ;
3. un irrationnel compris entre -2 et -1 ;
4. un réel dont le carré est égal à -1 ;
5. un réel négatif dont le carré est égal à 5.

103 **Vrai ou faux ?**
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
1. Si $a\in\mathbb{Z}$, alors $a\in\mathbb{Q}$.
2. L'opposé d'un entier relatif est un entier naturel.
3. L'inverse d'un entier non nul est un décimal.
4. La racine carrée d'un entier naturel est un irrationnel.

104 Pour chaque nombre, donner un encadrement décimal à 10^{-3} près, puis une valeur approchée au millième.
1. $\frac{5}{7}$ **2.** $\frac{\pi}{3}$ **3.** $\sqrt{11}$

105 Pour chaque nombre, donner un encadrement décimal à 10^{-2} près, puis une valeur approchée au centième.
1. $\sqrt{5}-2$ **2.** $\pi-3$ **3.** $\sqrt{\pi-2}$

106 **1.** Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ d'un disque de rayon 2 cm. Donner la nature de $\mathcal{A}$.
2. Donner un encadrement décimal de $\mathcal{A}$ à 10^{-1} près puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

107 Calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près du volume d'un cube dont l'arête mesure $3\sqrt{2}$ cm.

108 Un pavé droit a pour base un carré de côté $2\sqrt{5}$ et pour hauteur $\sqrt{5}+1$.
1. Calculer la valeur exacte du volume du pavé.
2. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

SPECIMEN

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour les exercices 109 et 110, compléter les pointillés avec le symbole $\in$ ou $\notin$.

109 **1.** 1,2…$[0;6]$ **2.** -3…$]-\infty;-3,5[$
3. 0,001…$]0;1]$ **4.** 2…$]2;+\infty[$

110 **1.** $-\pi$ ….. $[-3;-1[$ **2.** $\sqrt{2}$…$]-\infty;1,5[$
3. $\frac{1}{2}$… $\left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$ **4.** 0,999…$[0,99;+\infty[$

Pour les exercices 111 à 113, représenter sur la droite des réels et traduire à l'aide d'un intervalle l'ensemble des réels x tels que :

111 **1.** x est strictement inférieur à 2.
2. x est strictement supérieur à -3 et inférieur ou égal à 1.
3. x est supérieur ou égal à -4.
4. x est compris strictement entre -3 et 5.

112 **1.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$ **2.** $x > 3$
3. $x \leqslant -5$ **4.** $2 < x \leqslant 6$

113 **1.** $0 < x \leqslant \frac{1}{3}$ **2.** $-2 \geqslant x$
3. $x < 0$ **4.** $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

Pour les exercices 114 et 115, représenter chaque intervalle sur la droite des réels et traduire par une inégalité l'appartenance d'un réel x à cet intervalle.

114 **1.** $[-2;3]$ **2.** $]1;2]$
3. $[1;+\infty[$ **4.** $]-\infty;1,2[$

115 **1.** $]2;+\infty[$ **2.** $\left]0;\frac{1}{2}\right[$
3. $[-2;2[$ **4.** $]-\infty;-2]$

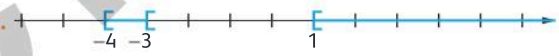
116 Sur une droite graduée d'origine O, on considère les points A, B et M d'abscisses respectives -2, 3 et x, où x est un nombre réel.
Dans chaque cas, traduire la condition donnée par l'appartenance de x à un intervalle.
1. M appartient au segment $[AB]$.
2. M appartient à la demi-droite d'origine A et passant par B.
3. M appartient à la droite (AB).
4. M appartient au segment $[OB]$ et M est différent de B.
5. M appartient à la demi-droite d'origine B et passant par A et M est différent de B.

117 **Vrai ou faux ?**
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. π appartient à l'intervalle $]3;3,14]$.
2. L'ensemble des réels x tels que $3 \leqslant x$ est l'intervalle $]-\infty;3]$.
3. $x \in [-1;7[$ équivaut à $7 > x \geqslant -1$.
4. L'intervalle $]0,33;0,34[$ ne contient pas de nombre rationnel.
5. Si $x \in [0,8;2]$, alors $x \in [0,7;1,999]$.
6. Si $x \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$, alors $x \in [0;1]$.

118 Dans chaque cas, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J.
1. $I = [2;7]$ et $J = [-1;5]$
2. $I =]-\infty;2]$ et $J = [-1;2[$
3. $I =]-\infty;4[$ et $J =]3,9;+\infty[$
4. $I =]-2;8[$ et $J = [12;+\infty[$

119 Dans chaque cas, traduire l'appartenance d'un réel x à la zone colorée en bleu à l'aide d'inégalités puis en utilisant des intervalles.

a.


b.


120 a et b sont deux nombres réels tels que $a \leqslant b$. L'amplitude de l'intervalle $[a;b]$ est le réel $\ell = b - a$ et son centre le réel $c = \frac{a+b}{2}$.
1. Déterminer l'amplitude et le centre des intervalles suivants :
a. $[-3;2]$ **b.** $\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$ **c.** $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$
2. Donner un intervalle d'amplitude 10^{-2} contenant $\sqrt{7}$.
3. Déterminer l'intervalle $[a;b]$ d'amplitude 2 et de centre 0.
4. Déterminer l'intervalle de centre -1 et d'amplitude 3.

121 Dans chaque cas, représenter sur la droite des réels et déterminer l'ensemble des nombres réels x tels que :
1. $|x| = 2$ **2.** $|x-1| = 3$
3. $|x-2| \leqslant 1$ **4.** $|x+1| < 4$

122 Dans chaque cas, traduire la condition par une inégalité de la forme $|x-a| \leqslant r$.
1. $x \in [-5;5]$ **2.** $x \in [1;3]$
3. $x \in [-5;-1]$ **4.** $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

SPECIMEN

3 Règles de calcul

123 Écrire et calculer les nombres suivants.

1. La somme de $\frac{3}{4}$ et de $\frac{4}{5}$.
2. Le produit de 5 par $\frac{8}{15}$.
3. La différence de 2 et du produit de 2 par $\frac{3}{5}$.
4. Le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

Pour les exercices 124 à 126, calculer A, B, C et D et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

124
1. $A=\frac{2}{3}+\frac{5}{18}-\frac{1}{9}$
2. $B=1-\left(\frac{7}{6}+\frac{3}{8}\right)$
3. $C=-42\times\frac{-5}{7}$
4. $D=\frac{33}{56}\div\frac{11}{8}$

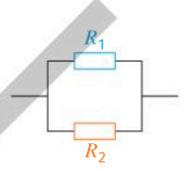
125
1. $A=\left(3-\frac{11}{5}\right)\times\frac{45}{7}$
2. $B=\left(\frac{2}{3}\right)^2-1$
3. $C=\frac{1}{3}-\frac{16}{7}\div\frac{40}{21}$
4. $D=\frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}-\frac{5}{12}}$

126
1. $A=\frac{48}{35}\times\frac{14}{9}$
2. $B=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$
3. $C=\left(\frac{5}{7}\right)^2-\frac{2}{7}$
4. $D=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

127 On considère les nombres $a=\frac{117}{63}$ et $b=-\frac{8}{7}$.

1. Simplifier la fraction a.
2. Montrer que $a-b$ est un entier naturel.

128 En électricité, pour calculer des valeurs de résistances « en parallèle », on utilise la formule $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.



Sachant que $R_1=9$ ohms et $R_2=12$ ohms, déterminer la valeur exacte de R.

129 On donne $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=\frac{2}{5}$ et $d=-\frac{1}{2}$.

Calculer $A=ab+cd$ et $B=\frac{a+d}{b+c}$.

130 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. La « moyenne harmonique » des réels a et b est le nombre h défini par $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Calculer la moyenne harmonique des réels a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a=1$ et $b=2$
2. $a=2$ et $b=3$
3. $a=\frac{2}{5}$ et $b=\frac{1}{4}$
4. $a=b$

131 Exprimer chaque nombre sous forme d'une puissance de 10.

1. 10 000
2. 0,0001
3. 100 milliards
4. $10^5\times10^{-7}$
5. $\left(10^{-4}\right)^6$
6. $\frac{10^{-2}}{10^7}$

132 Exprimer chaque nombre sous forme d'une puissance de 2.

1. $2^3\times2^{-7}$
2. $\left(2^{-2}\right)^{-3}$
3. $\frac{2^3}{2^8}$
4. 8^{-2}
5. $4^{-4}\times2^3$
6. $\frac{16^2}{4^{-2}}$

133 Simplifier l'écriture des nombres suivants.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
2. $\left(3\sqrt{2}\right)^2$
3. $\frac{5^3}{5^{-3}}$
4. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$
5. $-2^3\times\left(\frac{5}{2}\right)^3$
6. $\left(-\sqrt{5}\right)^3$

134 Exprimer chaque nombre sous forme d'une puissance de 3.

1. $A=3^2\times3^{-4}\times3^3$
2. $B=\frac{(-9)^{-1}}{(-3)^{-1}}$
3. $C=\frac{3^4\times3^{-2}}{3^5}$
4. $D=\frac{9^5}{27^{-2}}$

135 Exprimer chaque nombre sous forme d'un produit de puissances de 2, 3 et 5.

1. $A=4^{-1}\times10^{-2}\times6^3$
2. $B=\frac{9^{-1}\times6}{15^{-2}}$

136 Pour chaque égalité dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. $2^3\times5^3=10^3$
2. $2^3\times5^2=10^5$
3. $3^2+3^4=3^6$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$
5. $\left(2\sqrt{3}\right)^2=6$
6. $7^1\times7^0=7$

137 Soit a un nombre réel non nul. Simplifier les écritures suivantes.

1. $(5a)^2$
2. $\left(a\sqrt{3}\right)^2$
3. $a^{-1}\times\left(a^2\right)^3$
4. $\frac{a^{-2}\times a^5}{a^2\times a}$

138 Dans chaque cas, compléter les pointillés par une puissance de 5.

1. $5^4\times\ldots=5^{12}$
2. $5^{-6}=5^3\times\ldots$
3. $5^9=\frac{1}{\ldots}$
4. $\frac{5^{-2}}{\ldots}=5^3$
5. $(\ldots)^{-5}=5^{10}$
6. $\left(\frac{\ldots}{5^{-3}}\right)^3=5^6$

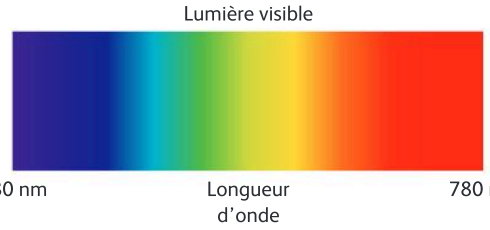
139 Montrer, pour tout entier naturel n, les égalités suivantes.

1. $\frac{2^n}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}$
2. $4^{n+1}-4^n=3\times4^n$
3. $\frac{1}{9}\times3^n=3^{n-2}$
4. $\frac{16^n}{8}=2^{4n-3}$

SPECIMEN

exercices Entraînement

140 Dans le vide, la vitesse c de la lumière est de 300 000 km/s. La longueur d'onde λ (en mètre) et la fréquence f (en hertz) d'une onde lumineuse sont liées par la relation $c = \lambda f$, où c est exprimée en mètre par seconde.



1. Convertir la vitesse de la lumière en mètre par seconde. *On donnera le résultat en écriture scientifique.*
2. Pour la lumière rouge, $\lambda = 8 \times 10^{-7}$ m. Calculer la fréquence f de la lumière rouge et donner le résultat en écriture scientifique.

141 Simplifier l'écriture des nombres suivants.

1. $\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ **2.** $5\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$
3. $\left(-2\sqrt{7}\right)^2$ **4.** $2\sqrt{5} \times \sqrt{15}$
5. $\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ **6.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}}$

Pour les exercices 142 à 144, écrire A et B sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b étant des entiers avec b le plus petit possible.

142 **1.** $A = \sqrt{8} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{32}$
2. $B = \sqrt{20} - \sqrt{45} - 7\sqrt{5}$

143 **1.** $A = \sqrt{27} - 3\sqrt{3} + \sqrt{12}$
2. $B = \sqrt{63} + \sqrt{28} - \sqrt{175}$

144 **1.** $A = \sqrt{12} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75}$
2. $B = \sqrt{180} + 3\sqrt{80} - 2\sqrt{125}$

145 Montrer que $3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{12} = 0$.

Pour les exercices 146 et 147, développer et simplifier les expressions.

146 **1.** $A = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$
2. $B = \sqrt{3}\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right)$
3. $C = \left(2\sqrt{3} - 1\right)\left(2\sqrt{3} + 1\right)$

147 **1.** $A = \sqrt{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$
2. $B = \left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$
3. $C = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

148 Écrire chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des entiers.

1. $A = \sqrt{200} - 3\sqrt{2} \times \sqrt{32} + 1$
2. $B = \left(3\sqrt{2} - 1\right)\left(5 - \sqrt{8}\right)$

149 Écrire chaque nombre sans utiliser le symbole racine carrée.

1. $\sqrt{17^2}$ **2.** $\sqrt{(-6)^2}$ **3.** $\left(-\sqrt{6}\right)^2$
4. $\sqrt{(\pi - 3)^2}$ **5.** $\sqrt{(\pi - 4)^2}$ **6.** $\sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2}$

Pour les exercices 150 à 152, simplifier l'écriture de chaque nombre et donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

150 **1.** $A = \sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 2\sqrt{125}$
2. $B = \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$
3. $C = \dfrac{\left(1 - 2\sqrt{3}\right)\left(1 + 2\sqrt{3}\right)}{3}$
4. $D = \sqrt{2}\left(1 - 3\sqrt{2}\right)$

151 **1.** $A = \dfrac{-2\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + 1}{-1 + \dfrac{1}{6}}$
2. $B = \sqrt{48} - \sqrt{3} - \sqrt{27}$
3. $C = \dfrac{-2\sqrt{18}}{3\sqrt{2}}$ **4.** $D = \sqrt{5^2 + 4^2}$

152 **1.** $A = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ **2.** $B = \dfrac{18 \times 10^7}{0{,}9 \times \left(10^{-8}\right)^2}$
3. $C = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{\pi} \times \dfrac{8\sqrt{\pi}}{3}$ **4.** $D = \dfrac{1 - \dfrac{2}{3}}{2 - \dfrac{2}{9}}$

153 Soit $A = \left(2\sqrt{3} - 1\right)^{2025} \times \left(2\sqrt{3} + 1\right)^{2025}$. Montrer que A est un entier naturel.

154 On considère les nombres :
$A = \left(2 - \dfrac{1}{3}\right) \div \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$; $B = \dfrac{4 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^7}{3 \times 10^5}$
et $C = \dfrac{\left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - 6\sqrt{11}}{3}$
Montrer que $A = B = C$.

155 Dans chaque cas, donner si possible :
1. tous les nombres dont le carré est égal à 9 ;
2. un nombre positif dont le carré est égal à 3 ;
3. un nombre négatif dont le carré est égal à –4 ;
4. tous les nombres dont le carré est égal à 7 ;
5. un nombre négatif dont le carré est égal à 11.

SPECIMEN

Pour les exercices 156 à 158, résoudre les équations.

156 1. $x^2 = 4$ 2. $x^2 = -1$ 3. $x^2 = 6$

157 1. $x^2 = -3$ 2. $x^2 = 0$ 3. $x^2 - 8 = 0$

158 1. $x^2 = 1$ 2. $4x^2 = 9$
3. $3x^2 + 2 = x^2 - 3$ 4. $(x-1)^2 = 2$

159 Factoriser les expressions suivantes.
1. $x^2 - 16$ 2. $x^2 - 5$ 3. $2x^2 - 4$
4. $(x+1)^2 - 2$ 5. $3 - (2x+1)^2$

160 PYTHON

```
def f(x):
    y=x**2+3
    return y
```

On considère la fonction f définie sous Python ci-contre.
1. Calculer l'image de -2, de $\frac{2}{5}$ puis de 10^{-2} par f.
2. Résoudre les équations suivantes :
a. $f(x) = 4$ b. $f(x) = 2$ c. $f(x) = 8$

161 1. Calculer les nombres a, b et c.
$a = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) \div 2$; $b = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times 2$
$c = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}$
2. Quatre enfants découpent un pain d'épice préparé pour leur goûter. Alice en prend le tiers, Benoît prend les $\frac{3}{5}$ de ce qu'a laissé Alice, enfin Cécile et Clément, qui sont jumeaux, se partagent de manière égale le reste.
a. Parmi les trois nombres a, b et c, quel est celui qui permet d'obtenir la fraction du pain d'épice reçue par chacun des jumeaux ? Justifier.
b. Donner la part de chacun des quatre enfants sous forme de fraction.



162 Soient a et b deux réels positifs avec $b \neq 0$. L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
1. Que vaut le produit $b \times \frac{1}{b}$?
2. En déduire que $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ puis que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

163 Écrire chaque quotient sans radical au dénominateur.
1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$
4. $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 5. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 6. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

Analyse d'un énoncé

164 1. Montrer que $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$ est un entier.

> Penser à l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = \ldots$

2. En déduire les égalités suivantes :
$\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

> Pour montrer la première égalité, la question 1. suggère de multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par $\sqrt{3}-1$.
> $\sqrt{3}-1$ est appelé la quantité conjuguée de $\sqrt{3}+1$.

165 **Application immédiate**
Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur.
1. $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$ 2. $\frac{-1}{3+\sqrt{5}}$ 3. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

166 ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = \sqrt{27}$ et $AC = \sqrt{48}$.
1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer le périmètre du triangle ABC. On donnera le résultat sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

167 $ABCD$ est un rectangle qui a pour aire 2^{11} cm^2 et tel que $AB = 2^5$ cm.
1. Calculer la longueur AD sous la forme d'une puissance de 2.
2. Calculer le périmètre de $ABCD$ sous la forme $a \times 2^6$ où a est un nombre entier.
3. Calculer la longueur AC sous la forme $a\sqrt{5}$ où a est un entier.
4. Montrer que le périmètre du triangle ABC est égal à $2^5(3+\sqrt{5})$.

168 Soient a et b deux nombres réels, on note S leur somme et P leur produit.
1. Calculer S et P dans chaque cas.
a. $a = \frac{9}{5}$ et $b = \frac{9}{4}$ b. $a = \frac{17}{11}$ et $b = \frac{17}{6}$
2. Citer deux fractions de numérateur 37 pour lesquelles $S = P$.
3. Énoncer une conjecture et la démontrer.

SPÉCIMEN

BILAN

169 15min Nature d'un nombre

Pour chaque nombre, simplifier son écriture et donner sa nature.

1. $A=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}\times\frac{5}{4}$
2. $B=\left(\frac{3}{4}+2\right)\div\left(1+\frac{1}{4}\right)$
3. $C=\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$
4. $D=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$
5. $E=3\sqrt{2}\times2\sqrt{8}$
6. $F=\frac{9\times10^{-2}}{30\times10^{4}}$

170 15min Ensembles de nombres

Pour chaque nombre, simplifier son écriture et donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

1. $A=3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$
2. $B=\sqrt{3^2+5^2}$
3. $C=(-3)^3\times3$
4. $D=\frac{3-\frac{7}{5}}{1-\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}}$
5. $E=\frac{3^4\times3^{-5}}{3^{-2}\times9}$

171 10min Puissances

Exprimer chaque nombre sous la forme d'une puissance de 3.

1. $A=3^{-2}\times3^4$
2. $B=\frac{3^{-5}}{3^2}$
3. $C=\left(3^2\right)^4\times3^{-10}$
4. $D=\frac{9^3\times3^8}{3^2\times3^5}$

172 10min Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. $\mathbb{D}\subset\mathbb{Z}$
2. $\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(1+2\sqrt{3}\right)\in\mathbb{Z}$
3. $2\sqrt{27}-\sqrt{48}-2\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$
4. $\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}\in\mathbb{D}$
5. $\frac{2^{-1}\times4^2}{3\times2^3}\in\mathbb{Q}$
6. $2-\frac{5}{2}\div\frac{15}{8}\notin\mathbb{D}$

173 15min Différentes formes d'un décimal

On considère le nombre $A=\frac{65\times10^3\times10^{-5}}{26\times10^2}$.

1. Montrer que A est un nombre décimal.
2. Donner :
   a. l'écriture décimale de A ;
   b. l'écriture de A sous la forme $a\times10^n$, où a est un entier naturel et n un entier relatif ;
   c. l'écriture de A sous forme de fraction irréductible ;
   d. l'écriture scientifique de A.

174 15min Une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(-2)$ puis $f(4)$. Donner la nature des nombres obtenus.
2. Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$. Donner sa nature et un encadrement à 10^{-3} près.
3. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'image de π par la fonction f.
4. Mathilde affirme que 3 et $\frac{1}{3}$ ont la même image par la fonction f. A-t-elle raison ? Justifier.

175 15min Un produit entier

On considère les nombres $A=\sqrt{48}+\sqrt{20}$ et $B=\sqrt{108}-\sqrt{45}$.

1. Écrire les nombres A et B sous la forme $p\sqrt{3}+q\sqrt{5}$, où p et q sont des entiers relatifs.
2. Montrer que $A\times B$ est un entier naturel.

176 25min Manipuler des racines

On pose $A=2\sqrt{3}-2\sqrt{27}-\sqrt{12}$ et $B=\sqrt{75}+\sqrt{48}-7\sqrt{3}$.

1. Écrire les nombres A et B sous la forme $p\sqrt{3}$ où p est un entier relatif.
2. Pour chaque nombre, donner le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

a. $A\times B$ b. $A-B$ c. $3B+A$
d. $\frac{A}{B}$ e. $\frac{B}{A}$ f. A^2+B^2

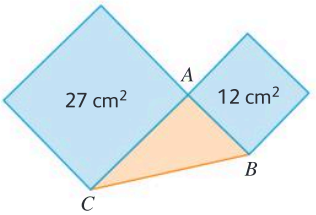
177 10min Un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que :
$AB=\sqrt{3}-1$ et $AC=\sqrt{3}+1$

1. Montrer que l'aire du triangle ABC est un entier naturel.
2. Calculer la longueur BC.
3. Camille affirme que le périmètre du triangle ABC est égal à $2\sqrt{5}$. A-t-elle raison ? Justifier.

178 10min Un triangle et des carrés

ABC est un triangle rectangle en A.
À l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés $ABFG$ et $ACDE$ d'aires respectives 12 cm² et 27 cm².



1. Calculer les longueurs AB, AC et BC. On donnera les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers avec b le plus petit possible.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.

SPECIMEN

179 10min Des intervalles

On donne $I=[-2;1[$ et $J=]-\infty;2]$.

On évitera de déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$ avant la question **4.**

1. Compléter avec le symbole $\in$ ou $\notin$.

a. $\frac{6}{5}\ldots J$

b. $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\ldots I$

c. $-5\times10^{2025}\ldots J$

d. $-3\ldots I\cup J$

e. $2{,}365\times10^{-4}\ldots I\cap J$.

2. Donner si possible :

a. tous les entiers naturels appartenant à I ;

b. tous les entiers relatifs appartenant à J ;

c. deux nombres irrationnels appartenant à J ;

d. un nombre rationnel appartenant à $I\cap J$;

e. un nombre décimal appartenant à $I\cup J$;

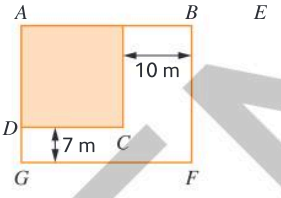
3. Traduire par des inégalités $x\in I$ puis $x\in J$.

4. Déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$.

180 10min Le parking

Sur un terrain rectangulaire $AEFG$, on a aménagé un parking carré, modélisé sur la figure ci-dessous par le carré $ABCD$. Ce parking est bordé de deux allées comme indiqué sur la figure.

L'aire du parking est de 1 200 m².



1. Calculer la longueur AB et écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier naturel.

2. Dans cette question, on exprimera les résultats sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont des entiers.

a. Calculer le périmètre du rectangle $AEFG$.

b. Calculer l'aire du rectangle $AEFG$.

APPROFONDISSEMENT

181 Pas de radical au dénominateur !

1. On pose $A=\frac{2}{3\sqrt{2}-1}$.

a. Calculer $\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{2}+1\right)$.

Info

On dit que $3\sqrt{2}+1$ est l'expression conjuguée de $3\sqrt{2}-1$.

b. En déduire une écriture de A sans radical au dénominateur.

2. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur.

$$B=\frac{-3}{\sqrt{5}-2}\qquad C=\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}\qquad D=\frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

Info

L'expression conjuguée de $a-\sqrt{b}$ est $a+\sqrt{b}$ celle de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ …

182 PRISE D'INITIATIVES

Une somme de 2025 termes

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

2. Calculer $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

3. Montrer que la somme :

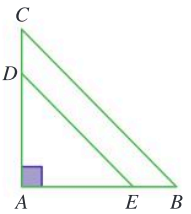
$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$$

est un entier naturel.

183 Des calculs dans une configuration

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=2\sqrt{3}$. D et E sont des points des segments $[AC]$ et $[AB]$ tels que :

- les droites (DE) et (BC) sont parallèles ;
- $BE=1$ et $AD=\frac{5}{2}$.



Calculer AC et DE. On donnera le résultat de AC sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont des nombres rationnels.

184 PRISE D'INITIATIVES

Un entier surprenant ! (1)

Montrer que le nombre $\sqrt{\frac{4^{10}+8^{10}}{4^{11}+8^4}}$ est un entier naturel.

185 Un entier surprenant ! (2)

Montrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^n\times\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^n$ est un entier naturel.

SPECIMEN

186 **Un entier surprenant ! (3)**

Soit $A=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Montrer que A^2 est un entier naturel.

187 **Un entier surprenant ! (4)**

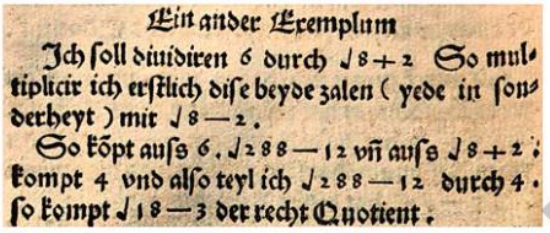
1. Montrer que $\left(\sqrt{3}-2\right)^2=7-4\sqrt{3}$.

2. En déduire une expression simplifiée de $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

3. Montrer que $7+4\sqrt{3}$ est le carré d'une expression que l'on déterminera.

4. Montrer que $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un entier naturel.

188 ***Die Coss***



Ein ander Exemplum

Ich ſoll diuidiren 6 durch √8+2 So mul-
tiplicir ich erſtlich diſe beyde zalen (yede in ſon-
derheyt) mit √8−2.
So kõpt auſs 6. √288−12 vñ auſs √8+2;
kompt 4 vnd alſo teyl ich √288−12 durch 4.
ſo kompt √18−3 der recht Quotient.

Extrait *Die Coss*, 1553, Christoff Rudolff, folio 116, verso.

Traduction

Je dois diviser 6 par $\sqrt{8}+2$. Pour cela, je vais multiplier chacun de ces deux nombres par $\sqrt{8}-2$.
Ainsi pour 6, j'obtiens $\sqrt{288}-12$ et pour $\sqrt{8}+2$, j'obtiens 4 ; donc je divise $\sqrt{288}-12$ par 4 et je trouve $\sqrt{18}-3$.

1. Vérifier les calculs en les détaillant.

2. Pourquoi Christoff Rudolff a-t-il choisi de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{8}-2$?

3. À la manière de Christoff Rudolff, calculer les quotients suivants.

$$A=\frac{8}{3+\sqrt{5}} \qquad B=\frac{\sqrt{12}}{3-\sqrt{6}}$$

189 **À la recherche d'un entier**

Déterminer l'entier n tel que : $4\times16^n=2^{2026}$.

190 PRISE D'INITIATIVES

Un calcul de somme

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant1$,
$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$.

2. En déduire l'écriture sous forme de fraction irréductible de la somme :

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{2025\times2026}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la somme :

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

191 Compétence Raisonner

Entier quoi qu'il en soit !

Soient a et b deux nombres réels non nuls.

On pose $A=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{ab}$.

1. Calculer A dans chacun des cas suivants :

a. $a=2$ et $b=-3$

b. $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{2}{3}$

c. $a=b$

2. Quelle conjecture peut-on formuler ? Démontrer cette conjecture.

192 Soit A le nombre rationnel tel que :

$A=0{,}123612361236123612\ldots$

1. L'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique : la partie décimale est la répétition à l'infini d'un bloc de chiffres appelé la période du nombre. Déterminer la période de A.

2. Donner l'écriture décimale de $10\,000A-A$.

3. En déduire l'écriture fractionnaire de A.

193 **Une étrange égalité**

1. Soit $A=0{,}3333\ldots$ de période 3.

a. Vérifier que $10A-A$ est un entier.

b. En déduire l'écriture fractionnaire de A.

2. Soit $B=0{,}7777\ldots$ de période 7. En procédant de la même façon donner l'expression de B sous forme de quotient.

3. Soit $C=0{,}202520252025\ldots$ de période 2025.
On pose $x=10\,000C-C$. En déduire une expression de C sous forme d'un quotient.

4. Soit $D=20{,}25252525\ldots$ En s'inspirant du calcul précédent, trouver une écriture fractionnaire de D.

5. Soit $E=0{,}999999\ldots$ Trouver une écriture fractionnaire de E.

Info

Ce dernier calcul n'est pas une erreur : $0{,}9999\ldots$ est le *développement impropre* de 1. Attention, les calculs avec les nombres qui comportent une partie décimale infinie sont généralement compliqués. Pour s'en rendre compte, il suffit d'essayer de poser l'opération : $0{,}7777\ldots+0{,}4444\ldots$

194 **Le nombre d'or**

On note $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le « nombre d'or ».

1. Montrer que $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\varphi$.

2. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=2$ et $AC=1$. On note D le point du segment $[BC]$ tel que $CD=CA$ et E le point du segment $[AB]$ tel que $BE=BD$.

Montrer que $\frac{EB}{EA}=\varphi$.

SPECIMEN

exercices — Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

195 **Compréhension d'énoncé**

On considère l'énoncé d'exercice suivant.

On considère le nombre $A = \dfrac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{32}}{7}$.

Le nombre A est-il rationnel ? Justifier.

Pour résoudre cet exercice, on pourra s'aider des indications suivantes.

1. Écrire chaque racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels.

2. Vérifier si le résultat s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs.

Voir p. 14

196 La lumière se propage dans le vide à la vitesse de 300 000 km/s. La distance du Soleil à la Terre est d'environ 150 millions de km.

1. Combien de temps la lumière du Soleil met-elle à nous parvenir sur Terre ?

2. Inès affirme : « C'est facile avec les puissances, je n'ai pas besoin de calculatrice pour trouver qu'elle met 500 s à nous parvenir. » Expliquer sa démarche.

3. Convertir cette durée en minutes et secondes.

197 On considère les deux intervalles suivants :

$I =]-\infty ; 8]$ et $J =]-3 ; 11[$

1. Pour chacun des nombres suivants, préciser s'il appartient à I, à J, à $I \cap J$, à $I \cup J$.

a. -3 **b.** 8

c. $6{,}2$ **d.** $-2{,}5 \times 10^{13}$

2. Déterminer tous les entiers naturels appartenant à I et tous les entiers relatifs appartenant à J.

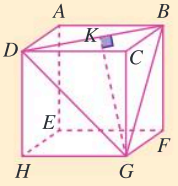
3. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.

198 Simplifier les écritures suivantes, puis donner la nature de chaque nombre.

$A = \sqrt{20} \times \sqrt{45}$ $\quad B = \dfrac{3}{7} \times 7\sqrt{3}$

$C = \left(\dfrac{55\sqrt{5}}{33}\right)^2$ $\quad D = \left(\sqrt{7}\right)^3 \times \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$

199 $ABCDEFGH$ est un cube de côté 4 cm.



1. Calculer la valeur exacte de GD et écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ où a un entier.

2. Quelle est la nature du triangle BGD ? Justifier.

3. Calculer la valeur exacte de GK.

4. Calculer l'aire du triangle BGD. *On donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au mm².*

Aller plus loin

200 **Les limites de la calculatrice (1)**

1. Quel est le résultat affiché par la calculatrice pour le nombre suivant ?

$A = \dfrac{x + y - x}{y}$ avec $x = 10^8$ et $y = 10^{-8}$.

2. Pour x et y quelconques, réduire l'écriture du nombre A. Comparer alors avec le résultat affiché par la calculatrice.

3. Comment peut-on expliquer l'affichage de la calculatrice ?

201 **Les limites de la calculatrice (2)**

On note $a = 5247624$ et $b = 1872239$.

1. Quel est le résultat affiché par la calculatrice pour le nombre $a \times b$? Commenter le résultat.

2. Recopier et compléter les égalités suivantes :

$a = \ldots \times 10^3 + 624$ et $b = 1872 \times \ldots + 239$.

3. En utilisant les égalités précédentes, développer le nombre $a \times b$.

4. En utilisant la calculatrice ainsi que quelques calculs « à la main », donner la valeur exacte de $a \times b$.

Info

La plupart des calculatrices ne disposent que d'une quinzaine de positions possibles pour afficher les chiffres d'un résultat sur une ligne de l'écran. Elles sont donc amenées à arrondir certains décimaux pour les afficher. Il faut donc faire preuve d'esprit critique lorsqu'on manipule de très grands ou de très petits nombres à la calculatrice.

202 PRISE D'INITIATIVES

1. Calculer les nombres suivants.

$a = 1 - \dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$;

$c = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$; $d = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}$

En observant ces résultats, quelle conjecture peut-on formuler ?

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2010

2. Soit n un entier naturel non nul.

Calculer le nombre $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. La conjecture est-elle vérifiée ?

203 PRISE D'INITIATIVES

Pour n entier naturel, on pose :

$A = \dfrac{\left(9^{n+1} + 9^n\right)^2}{\left(3^{2n+1} - 3^{2n}\right)^2}$

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2011

1. Calculer A pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Quelle conjecture peut-on formuler ?

2. Démontrer cette conjecture.

SPECIMEN

La suite de Héron pour approcher $\sqrt{2}$

L'objectif de ce TP est de découvrir une suite de nombres donnant des approximations de plus en plus précises du nombre $\sqrt{2}$.

Objectif PYTHON
Étudier une suite de fractions.
Tester un programme qui utilise une boucle bornée.

Info

Dès l'Antiquité, le nombre $\sqrt{2}$ est apparu comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. On en trouve les premières traces sur une tablette babylonienne, dont le mathématicien grec Héron d'Alexandrie semble s'être inspiré pour construire cette suite.



Partie A Une suite de fractions pour approcher $\sqrt{2}$

On pose $a_0 = 2$ et $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$.

1. Calculer a_1.

2. On définit les nombres a_2 et a_3 par :

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) \text{ et } a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right).$$

Calculer a_2 et montrer que $a_3 = \frac{577}{408}$.

3. a. En suivant le même procédé que précédemment, écrire l'expression de a_4 en fonction de a_3.

b. Donner la valeur approchée de a_4 affichée par la calculatrice.

4. Vérifier que a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ dont on donnera la précision.

Partie B Un algorithme pour approcher $\sqrt{2}$

Dans l'algorithme ci-contre la variable a est un nombre réel et n un entier naturel.

$a \leftarrow 2$
Pour k allant de 1 à n
$a \leftarrow \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.
Fin Pour
Retourner a

1. Donner les valeurs retournées par l'algorithme pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

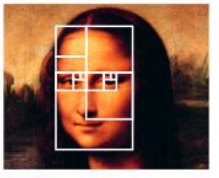
2. On donne ci-contre la traduction de l'algorithme sous forme de fonction en Python.

```
def a(n):
    a=2
    for k in range(1,n+1):
        a=1/2*(a+2/a)
    return a
```

Exécuter ce programme pour $n = 5$ et $n = 6$.
Interpréter et commenter les valeurs obtenues.

La puissance du nombre d'or

Le nombre d'or est apparu dès l'Antiquité comme étonnant et mystérieux. Il intervient dans de nombreux domaines comme l'architecture, la peinture, la nature…



Objectif TABLEUR
Découvrir le nombre d'or.
Utiliser un tableur.

Partie A Le rectangle d'or

1. Construire un triangle ABC, rectangle en A tel que $AB = 1$ et $AC = \frac{1}{2}$.

2. Calculer BC.

3. À l'aide d'un compas, placer le point D de la demi-droite $[AC)$ tel que $CD = BC$.

4. Montrer que $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle « le nombre d'or », il est noté φ. Ainsi $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. On appelle **rectangle d'or** un rectangle dont le rapport de la longueur par la largeur est φ.
On appelle E le point tel que $ADEB$ est un rectangle.
Montrer que $ADEB$ est un rectangle d'or.

Partie B Les puissances de φ

1. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2. En utilisant la relation précédente, montrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$, puis que $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.

3. Montrer que si $\varphi^n = a\varphi + b$, avec n entier naturel, alors $\varphi^{n+1} = (a+b)\varphi + a$.

4. Afin d'automatiser le calcul des nombres a et b dans l'expression de φ^n, on utilise un tableur.

a. Ouvrir une feuille de calcul et écrire dans la colonne A, la suite des premiers entiers naturels.

	A	B	C
1		a	b
2	1	1	0
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		

b. En utilisant la question **3.**, écrire les formules en B3 et C3 qui permettent d'obtenir φ^2.

c. Exprimer alors φ^{15} en fonction de φ.

SPECIMEN

TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Un problème de Sam Loyd

TRAVAIL DE GROUPE

Objectif
Mener une recherche en groupe.
Travailler le calcul fractionnaire.



Dans un de ses problèmes, Sam Loyd raconte qu'il a reçu une encyclopédie d'histoire en neuf tomes numérotés de 1 à 9.
« J'ai découvert, par exemple, qu'en plaçant les volumes sur deux étagères comme le montre le dessin, la fraction $\frac{6\,729}{13\,458}$ est exactement égale à $\frac{1}{2}$. Est-il possible, en utilisant les neuf volumes, de trouver d'autres combinaisons qui forment des fractions égales à $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$? »

1. Démontrer que dans ce cas, le numérateur est toujours un nombre de 4 chiffres.
2. Étonnamment, ici, la recherche au hasard est plus performante que la recherche exhaustive !
a. À l'aide d'un programme, ou en groupe en effectuant les calculs à la main : former une fraction dont le numérateur est composé de 4 chiffres distincts pris au hasard et le dénominateur des 5 autres chiffres écrits au hasard, simplifier la fraction en espérant obtenir une fraction de l'unité…
b. Donner une solution pour chacune des fractions de l'unité.

TP2 L'addition du cancre

a, b, c et d sont des réels strictement positifs tels que :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Pour additionner deux fractions, le cancre effectue :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ !}$$

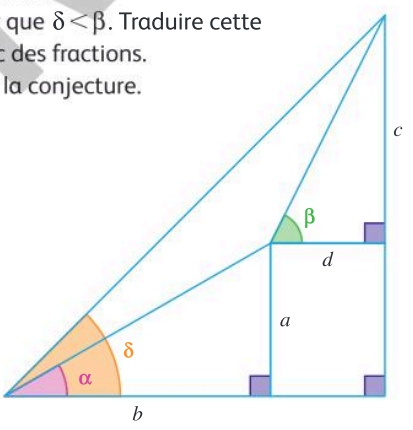
1. Pour chaque couple de fractions proposé, calculer $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ comme le cancre, puis comparer le résultat avec : $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

a. $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{8}{3}$ et $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{13}{7}$ et $\frac{29}{7}$ **d.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Émettre une conjecture.
3. Avec les notations de la figure, on admet que :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

a. Par construction, $\delta > \alpha$. Traduire cette inégalité avec des fractions.
b. Démontrer que $\delta < \beta$. Traduire cette inégalité avec des fractions.
c. Démontrer la conjecture.



TP3 Un développement décimal étonnant

Partie A.

Soit $A = \frac{1}{9\,801}$.

1. Écrire la valeur décimale approchée de A obtenue à l'aide d'une calculatrice (sans puissance de 10).
2. Poser la division et en utilisant judicieusement la calculatrice, obtenir les 30 premières décimales de A.
3. Émettre une conjecture. La confirmer ou l'infirmer en calculant les 200 premières décimales de A à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Partie B.

Soit $B = \frac{1}{81}$.

1. Écrire la valeur décimale approchée de B obtenue à l'aide d'une calculatrice.
2. Poser la division et en utilisant judicieusement la calculatrice, obtenir les 30 premières décimales de B.

Partie C. À l'écrit ou à l'oral

Soit $C = \frac{1}{998\,001}$.

1. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, calculer les 100, puis les 1 000 premières décimales de C.
2. En observant les écritures fractionnaires des nombres A, B, C, proposer d'autres nombres ayant la même particularité en expliquant votre démarche. *Les observations faites resteront à l'état de conjectures, les démonstrations étant hors de portée ici.*

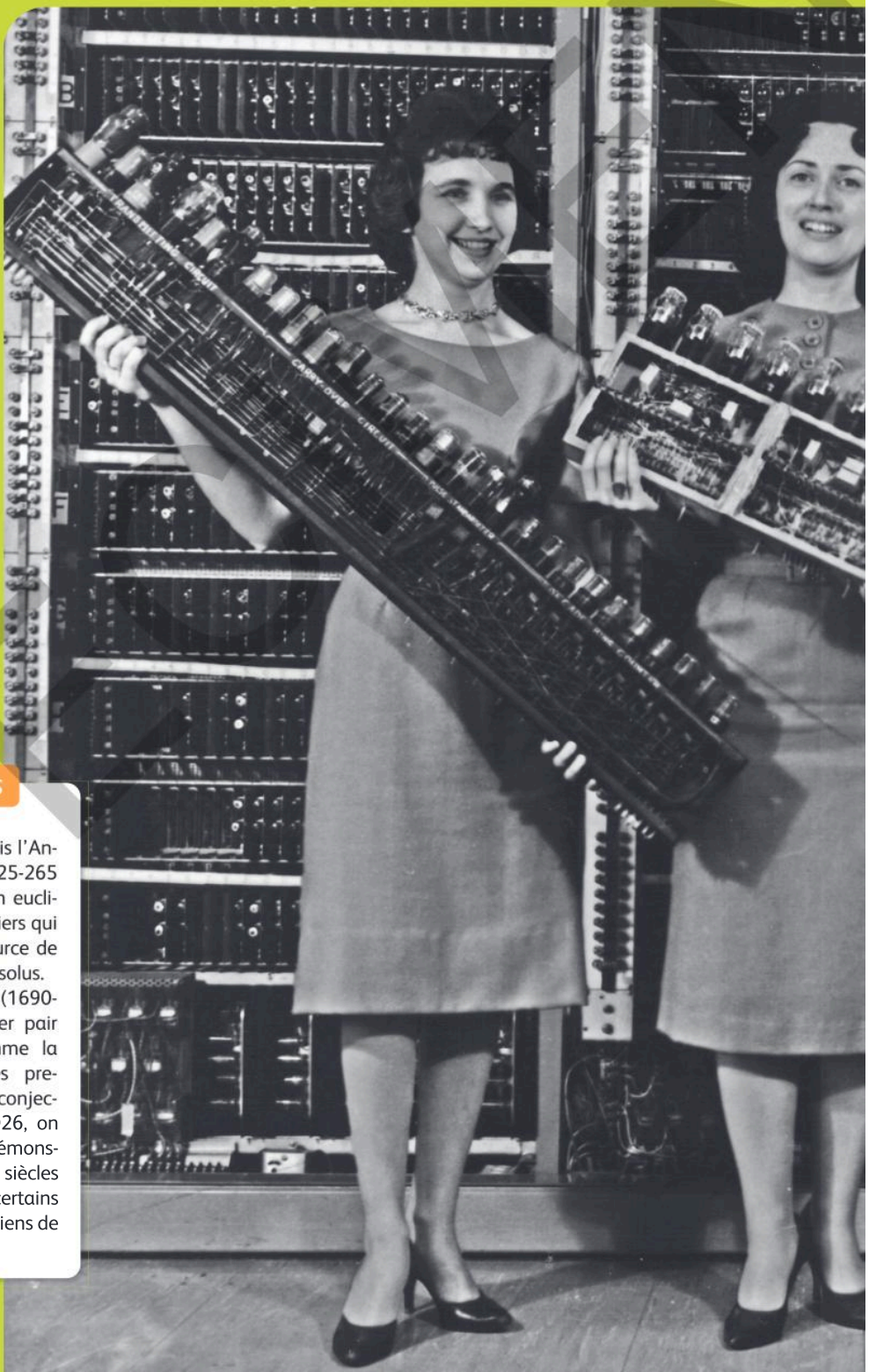
SPECIMEN

CHAPITRE

2 Nombres entiers Arithmétique

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Utiliser les notions de multiple, de diviseur et de nombre premier
- CAPACITÉ 2 Utiliser les notions de nombre pair et de nombre impair



Au fil du temps

Les nombres fascinent depuis l'Antiquité. Déjà, Euclide (vers 325-265 av. J.-C.) décrivait la division euclidienne et les nombres premiers qui sont encore aujourd'hui source de nombreux problèmes non résolus.
La conjecture de Golbach (1690-1764) affirme : « tout entier pair supérieur à 3 s'écrit comme la somme de deux nombres premiers ». On pense que cette conjecture est vraie, mais, en 2026, on n'en a toujours aucune démonstration, après presque trois siècles de recherches menées par certains des plus grands mathématiciens de leur temps…

COPIE

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2012

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Utiliser une division euclidienne

Un enfant possède 100 billes qu'il souhaite répartir en petits tas de même taille, avec un éventuel reste de billes non réparties.

1. Parmi les écritures suivantes, laquelle permet d'obtenir la répartition optimale en 7 tas, c'est-à-dire celle pour laquelle il lui reste le moins de billes à répartir ?

a. $100 = 7 \times 10 + 30$ **b.** $100 = 7 \times 13 + 9$

c. $100 = 7 \times 14 + 2$ **d.** $100 = 7 \times 15 - 5$

2. Répartir au mieux les 100 billes :

a. en 8 tas. **b.** en 9 tas. **c.** en 11 tas.

3. À quelle condition, sur le nombre de tas, ne reste-t-il plus de billes à répartir ?

C Revoir les notions de multiple et de diviseur

1. Recopier et compléter les phrases suivantes en utilisant les mots « diviseur » ou « multiple » et en écrivant une égalité.

a. 12 est un … de 3, car $12 = 3 \times \ldots$

b. 10 est un … de 150, car $\ldots = \ldots \times \ldots$

c. 221 a pour … l'entier 13, car $\ldots = \ldots \times \ldots$

d. 17 a pour … l'entier 85, car $\ldots = \ldots \times \ldots$

2. Donner deux multiples puis deux diviseurs de 30.

3. À quelle condition portant sur ses chiffres un nombre entier est-il divisible par 3 ? et par 5 ? En utilisant ces critères, indiquer quels sont les multiples de 3 et de 5 parmi les entiers suivants : 125 ; 327 ; 810 ; 6 051 ; 9 220 et 12 345.

4. Pour chaque entier N suivant, remplacer le point d'interrogation par un chiffre de sorte que N soit divisible par 3 et par 5 :

a. $N = 63?$ **b.** $N = 7?5$ **c.** $N = ?25$

D Décomposer en produit de facteurs premiers

On rappelle que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de façon unique, à l'ordre près, comme le produit de facteurs premiers.

Ainsi $45 = 3 \times 3 \times 5$, où 3 et 5 sont des nombres premiers.

1. Rappeler la définition d'un nombre premier.

2. Décomposer en produit de facteurs premiers chacun des nombres suivants : 50 ; 84 ; 90 ; 105 ; 108 et 154.

3. En utilisant ces décompositions, écrire les fractions suivantes sous forme irréductible :

$A = \dfrac{50}{84}$ $B = \dfrac{84}{105}$ $C = \dfrac{108}{90}$ $D = \dfrac{154}{84}$

4. Vrai ou Faux ? En utilisant ces décompositions, indiquer pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse.

a. $\sqrt{50} = 2\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{84} = 21\sqrt{2}$



Présentation des circuits de l'ENIAC et d'autres ordinateurs de même conception.

Des maths partout !

Les applications de l'arithmétique (l'étude des propriétés additives et multiplicatives des nombres entiers) sont nombreuses dans le domaine de la cryptographie et de l'informatique. L'ENIAC est le premier ordinateur électronique. Construit aux États-Unis en 1945, il pesait environ 30 tonnes et occupait une surface de 167 m^2.
Six femmes, Marlyn Meltzer, Ruth Teitelbaum, Frances Spence, Kathleen Antonelli, Jean Jennings Bartik en Betty Holberton avaient été sélectionnées pour le programmer. Ainsi, les pionniers de la programmation ont été des pionnières.

EXTRAIT

automatismes

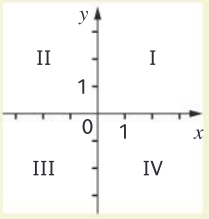
Automatismes transversaux

1 **1.** Le triangle ABC rectangle en A est tel que :
$AB = 5$ et $AC = 10$
Que vaut BC ?
2. Même question dans le cas où le triangle ABC est rectangle en B.

2 Le triangle ABC est isocèle en A et la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 80°. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3 La fonction f est définie sur $[-2 ; +\infty[$ par :
$f(x) = \sqrt{2x+4}$
Calculer les images de -2 ; -1 ; 0 ; 6 et 10 par f.

4 Quel quadrant (I, II, III ou IV) ne contient aucun point de la droite représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$?



D'après *Concours Kangourou*.

5 Représenter les fonctions affines suivantes.
1. $f(x) = 3x + 2$ **2.** $g(x) = 7 - 2x$ **3.** $h(x) = x - 2$

6 Dresser le tableau de signes des fonctions affines de l'exercice précédent.

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. *On écrira les résultats sous forme fractionnaire irréductible.*
1. $2x + 1 = 5x + 8$ **2.** $-3x + 5 = 2x + 1$
3. $4x + 2 = 2x - 3$ **4.** $7x - 2 = 2x + 5$

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $x^2 = 16$ **2.** $x^2 = 121$
3. $x^2 = 12$ **4.** $x^2 = -1$

9 Développer les expressions suivantes.
1. $A = (3x - 4)^2$
2. $B = 2(2x + 3)(-x + 4)$
3. $C = (2x + 1)^2 + (x - 2)(2x + 3)$

10 Factoriser les expressions suivantes.
1. $A = 81x^2 - 16$
2. $B = (3x - 1)^2 + (3x - 1)(2x - 8)$
3. $C = (x + 4)^2 - 2(5x + 1)(x + 4)$

Automatismes préparatoires au chapitre

Pour les exercices **11** *à* **14** *: m, n, p et k représentent des entiers relatifs.*

11 Déterminer la nature de chacun des nombres suivants.
1. $A = k + 9$ **2.** $B = 2n - 7$
3. $C = \dfrac{2n - 7}{2}$ **4.** $D = \dfrac{6p - 12}{3}$
5. $E = n \times p$ **6.** $F = \sqrt{n^2}$

12 Écrire les expressions suivantes sous la forme « 2 × un entier ».
1. $A = 2k + 2$ **2.** $B = 4n + 6$
3. $C = 4n - 8$ **4.** $D = 6m^2 - 2m + 10$

13 Écrire les expressions suivantes sous la forme « 2 × un entier +1 ».
1. $A = 2k + 3$ **2.** $B = 4p + 15$
3. $C = 8n - 11$ **4.** $D = 6m^2 - 2m - 21$

14 Développer les expressions suivantes.
1. $A = (2n + 1)^2$ **2.** $B = (2p + 1)(2n + 1)$
3. $C = (2m - 1)^2$ **4.** $D = 2p(2p + 1)$

15 Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.
1. $\dfrac{4}{6}$ **2.** $\dfrac{44}{33}$ **3.** $\dfrac{45}{30}$ **4.** $\dfrac{24}{42}$

16 Déterminer le plus petit dénominateur commun pour les fractions proposées.
1. $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{4}{7}$ **2.** $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{5}{6}$
3. $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{5}{6}$ **4.** $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{5}{6}$

17 Décomposer en produits de facteurs premiers les entiers suivants : 117 ; 132 ; 357 et 1 547.

18 Décomposer en produits de facteurs premiers les entiers suivants : 665 ; 4 554 ; 16 184 et 19 343.

19 Déterminer tous les diviseurs positifs de 100, 120 et 130.

20 Écrire les nombres suivants sous la forme $a^2 \times b$ avec a et b entiers naturels et b le plus petit possible.
1. 242 **2.** 150 **3.** 300 **4.** 252 **5.** 320

21 Écrire les racines suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers naturels, avec b le plus petit possible : $\sqrt{45}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{117}$; $\sqrt{175}$ et $\sqrt{176}$.

SPECIMEN

activités

1 Nombres premiers : le crible d'Ératosthène PYTHON

Objectif
Comprendre le fonctionnement d'un algorithme et travailler la notion de multiple.

Un *nombre premier* est un entier naturel qui n'a que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

1 Justifier que le plus petit *nombre premier* est 2.

Déterminer la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un nombre entier naturel N donné est un problème résolu depuis longtemps. Au IIe siècle av. J.-C., Ératosthène propose l'algorithme ci-dessous, traduit en langage moderne et appelé crible d'Ératosthène.

① Écrire la liste L de tous les entiers de 2 à N.
② Tant que la fin de la liste L n'est pas atteinte :
  ③ Garder le premier entier de la liste L (le nommer p)
  ④ Éliminer tous les multiples de p dans L.
  ⑤ Passer à l'entier suivant dans L.

2 **a.** Écrire la liste L de tous les entiers de 2 à 30 (étape ①).
b. Réaliser les étapes ③ à ⑤ et justifier qu'à la fin de ces étapes l'entier suivant 2 dans la liste L est premier.
c. Poursuivre l'exécution de l'algorithme et donner la liste des nombres premiers inférieurs à 30.

3 L'algorithme du crible d'Eratosthène est traduit ci-contre en Python.
a. Associer chacune des étapes ① à ⑤ au(x) numéro(s) de(s) ligne(s) du programme.
b. Exécuter le programme afin de déterminer le plus grand nombre premier inférieur ou égal à l'année actuelle.

Info Python
- `list(range(2,N+1))` permet d'obtenir la liste des entiers de 2 à N.
- `len(L)` donne la longueur de la liste L.
- `del(L[j])` supprime l'élément d'indice j de la liste L.
- `i % 5` donne le reste de la division euclidienne de i par 5.

```
1 def liste_premiers(N):
2     L = list(range(2,N+1))
3     i = 0
4     while i < len(L):
5         p = L[i]
6         j = i + 1
7         while j < len(L):
8             if L[j] % p == 0:
9                 del(L[j])
10            j = j + 1
11        i = i + 1
12    return L
```

2 Parité et opérations TRAVAIL DE GROUPE

Objectif
Travailler la notion de parité.

Un entier relatif est soit **pair** (c'est-à-dire divisible par 2), soit **impair** (c'est-à-dire non divisible par 2).

On s'intéresse aux problèmes suivants.

① Si on connaît la parité de deux entiers, peut-on savoir quelle est la parité de leur somme ? De leur différence ?
② Si on connaît la parité d'un entier, peut-on savoir quelle est la parité de son carré ?

1 Soit un entier relatif n.
En écrivant la division euclidienne de n par 2, justifier que :
a. si n est pair, alors on peut écrire $n = 2k$, où k est un entier relatif.
b. si n est impair, alors on peut écrire $n = 2k+1$, où k est un entier relatif.

2 **a.** Conjecturer les réponses aux deux problèmes posés en testant sur quelques entiers.
b. Démontrer ces conjectures.
c. Résumer les résultats en complétant des tableaux comme ci-contre.

3 **a.** Déterminer s'il existe quatre entiers consécutifs dont la somme est impaire.
b. Déterminer s'il existe un entier tel que la somme de son carré avec lui-même soit impaire.

Somme $m+n$		Entier m	
		Pair	Impair
Entier n	Pair		
	Impair		

Différence $m-n$		Entier m	
		Pair	Impair
Entier n	Pair		
	Impair		

Carré	Entier m	
	Pair	Impair
m^2		

SPECIMEN

Cours

1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

a Division euclidienne

Propriété et définition (division euclidienne – admis)

Pour tous entiers relatifs a et b avec $b > 0$, a s'écrit de façon **unique** sous la forme : $a = bq + r$ où q est un entier relatif et r un entier naturel tel que $0 \leqslant r < b$. q est appelé **quotient** et r **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Exemple

On peut écrire $27 = 4 \times 5 + 7$, mais 7 n'est pas le reste dans la division euclidienne de 27 par 4, car $7 \geqslant 4$.
L'écriture de la division euclidienne de 27 par 4 est :

$$27 = 4 \times 6 + 3$$

6 est le quotient et 3 est le reste (on a bien $0 \leqslant 3 < 4$).

Commentaire

Disposition de la division euclidienne de $a = 27$ par $b = 4$:

dividende	→	27	4	←	diviseur
reste	→	3	6	←	quotient

b Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Définitions Soient deux entiers relatifs n et p.

Si le reste dans la division euclidienne de n par p est égal à 0, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif q tel que $n = p \times q$, on dit que :

- p est un **diviseur** de n ou que n **est divisible par** p.
- n est un **multiple** de p.

Exemples

- $12 = 4 \times 3$. Donc :
4 est un diviseur de 12,
12 est un multiple de 4.
- 12 admet comme diviseurs positifs : 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- 0 est divisible par n'importe quel nombre entier relatif, car pour tout entier relatif n, on a $0 = 0 \times n$.
- 0 n'admet qu'un seul multiple : 0.

Commentaire

Tout nombre entier relatif non nul n est toujours divisible au moins par 1 et par lui-même (car $n = 1 \times n$) et admet une infinité de multiples : n, $2n$, $3n$, $-n$, $-2n$, etc. Les multiples de n sont de la forme $k \times n$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété On considère trois entiers relatifs a, n et m.

Si les entiers n et m sont deux multiples de a, alors la somme $(n+m)$, la différence $(n-m)$ et le produit $n \times m$ sont aussi des multiples de a.

Exemples

- 36 et 12 sont des multiples de 3 donc leur somme $36 + 12 = 48$ est aussi multiple de 3.
- La somme, la différence et le produit de deux nombres pairs (c'est-à-dire de deux multiples de 2) sont paires.

Démonstration (pour la somme)

Par hypothèse, il existe deux entiers relatifs k_1 et k_2 tels que :

$$n = k_1 \times a \quad \text{et} \quad m = k_2 \times a$$

On en déduit que :

$n + m = k_1 \times a + k_2 \times a = (k_1 + k_2) \times a$ et $(k_1 + k_2)$ est un entier relatif.

Donc $n + m$ est un multiple de a

c Nombres premiers

Définition Un nombre entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemples

- 2, 3, 5, 7 et 11 sont des nombres premiers.
- 15 n'est pas un nombre premier, car :

$$15 = 3 \times 5$$

3 et 5 sont des diviseurs de 15, qui admet donc des diviseurs positifs autres que 1 et lui-même.

Commentaires

- 1 n'est pas un nombre premier.
- Les nombres premiers peuvent être considérés comme les « briques élémentaires » des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. En effet, chaque entier naturel s'écrit de façon unique, à l'ordre près, sous la forme d'un produit dont chaque facteur est un nombre premier : c'est le **théorème fondamental de l'arithmétique**.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Utiliser les notions de multiple, de diviseur et de nombre premier

Énoncé Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 18 puis ceux de 24. En déduire le plus grand diviseur positif commun à 18 et 24.

2. Montrer que la différence de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

3. Déterminer le plus petit multiple commun positif de 4, 6 et 8. En déduire l'écriture sous forme d'une fraction irréductible du nombre $N = \frac{3}{4} - \frac{7}{6} + \frac{11}{8}$.

4. Justifier qu'il existe un seul entier naturel à la fois pair et premier.

Solution rédigée

1. Les diviseurs positifs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Ceux de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24. Les diviseurs positifs communs à 18 et 24 sont donc 1, 2, 3 et 6. Le plus grand d'entre eux est 6.

2. Soient a et b deux entiers multiples de 7. On souhaite montrer que $a - b$ est aussi multiple de 7. Puisque a et b sont multiples de 7, il existe des entiers k et k' tels que $a = 7k$ et $b = 7k'$.
Par conséquent, $a - b = 7k - 7k' = 7(k - k')$ avec $k - k'$ entier relatif.
Donc $a - b$ est un multiple de 7.

3. Les multiples positifs de 4 sont les entiers qui s'écrivent sous la forme $4k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Les premiers multiples de 4 sont 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32… En écrivant de même les premiers multiples de 6, et les premiers multiples de 8, on remarque alors que le premier multiple de 4 à la fois multiple de 6 et de 8 est 24 puisque $24 = 4 \times 6$ et $24 = 3 \times 8$.
Pour calculer N, on peut choisir 24 comme dénominateur commun :

$$N = \frac{3}{4} - \frac{7}{6} + \frac{11}{8} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} - \frac{7 \times 4}{6 \times 4} + \frac{11 \times 3}{8 \times 3} = \frac{18 - 28 + 33}{24} = \frac{23}{24}$$

4. 2 est un nombre pair. De plus, 2 est premier car ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 2 et ils sont bien distincts. Tout autre nombre pair n admet au moins trois diviseurs distincts : 1, 2 et n. Ainsi, n ne peut être premier.

Point méthode
2. On exploite ici la définition d'un multiple de 7, qui s'écrit sous la forme $7k$ avec k entier. On conclut grâce au calcul littéral en factorisant par 7.

Point méthode
3. Pour réduire au même dénominateur plusieurs fractions, on choisit comme dénominateur commun le plus petit multiple commun des dénominateurs présents ici 4, 6 et 8.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 377 Voir exercices similaires nos 46, 48, 55 et 56

22 Déterminer :
1. les multiples positifs de 7 inférieurs à 60 ;
2. les diviseurs de 100 supérieurs ou égaux à 11 ;
3. les diviseurs positifs communs de 36 et 60.

23 Soit un entier relatif a. Démontrer que la différence de deux multiples de a est un multiple de a.

24 Démontrer que la somme d'un multiple de 5 et d'un multiple de 20 est multiple de 5.

25 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les nombres suivants.
1. $A = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} - \frac{7}{12}$ 2. $B = \frac{5}{14} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3}$

26 Déterminer le plus petit entier naturel non nul qui est à la fois multiple de 15 et de 20.

27 Vrai ou Faux ? Justifier.
1. Si un entier est divisible par 8, alors il est divisible par 4.
2. Si un entier est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

28 Vrai ou Faux ? Justifier.
1. La somme d'un multiple de 9 et d'un multiple de 12 est un multiple de 3.
2. Si un entier est à la fois divisible par 4 et par 6, alors il est aussi divisible par 24.

29 Les entiers naturels non nuls a et b sont tels que $a^2 - b^2$ est premier.
1. Factoriser $a^2 - b^2$ et justifier qu'un des facteurs est nécessairement égal à 1.
2. En déduire que a et b sont des entiers consécutifs.

SPECIMEN

Cours

2 Nombres pairs, nombres impairs

a Définitions

Définitions et propriétés On considère un entier relatif n.

- Si n est divisible par 2 (ou si n est un multiple de 2), on dit que n est **pair**.

Il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2\times k$.

- Sinon, on dit que n est **impair**.

Il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2\times k+1$.

Exemples

38 est pair car $38 = 2\times 19$

47 est impair car :

$47 = 2\times 23+1$

En effet :

Le reste de la division euclidienne de 38 par 2 est 0 : 38 est un entier pair.	Le reste de la division euclidienne de 47 par 2 est 1 : 47 est un entier impair.

b Parité et somme d'entiers

Propriétés

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Démo

Démonstration : parité de la somme de deux entiers impairs

Soient n et p deux entiers impairs.

Par définition, il existe deux entiers k et q tels que $n = 2k+1$ et $p = 2q+1$

donc $n+p = (2k+1)+(2q+1)$

$\Leftrightarrow n+p = 2k+2q+2$

$\Leftrightarrow n+p = 2\times(k+q+1)$ et $k+q+1$ est un nombre entier

L'entier $(n+p)$ est égal au produit de 2 par un entier, il est donc pair.

Démonstration : parité de la somme de deux entiers de parités différentes

Soient n un entier pair et p un entier impair.

Par définition, il existe deux entiers k et q tels que $n = 2k$ et $p = 2q+1$ donc

$n+p = 2k+(2q+1)$

$\Leftrightarrow n+p = 2k+2q+1$

$\Leftrightarrow n+p = 2\times(k+q)+1$

L'entier $(n+p)$ est de la forme $2N+1$, avec N entier, donc il est impair.

Exemples

n désigne un entier relatif.

- Le nombre $4n+6$ est pair car somme de $4n = 2\times(2n)$ qui est pair et de $6 = 2\times 3$ qui est pair.

On aurait aussi pu le justifier en écrivant que :

$$4n+6 = 2\times\Big(\underbrace{2n+3}_{\text{entier}}\Big)$$

- Le nombre $4n+3$ est impair car somme d'un nombre pair $(4n)$ et d'un nombre impair : 3.

c Parité d'un carré

Propriété On considère un entier relatif n.

- Si n est pair, alors le carré n^2 est pair.
- Si n est impair, alors le carré n^2 est impair.

Démo

Démonstration

On considère un entier relatif n.

- Si n est pair : on peut écrire $n = 2\times k$ avec k un entier relatif.

Alors $n^2 = (2k)\times(2k) = 2\times(2k^2)$ et $2k^2$ est un nombre entier.

Donc 2 divise n^2, d'où n^2 est pair.

- Si n est impair : on peut écrire $n = 2k+1$ avec k un entier relatif.

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2 = 4k^2+4k+1$.

Ainsi $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ et $(2k^2+2k)$ est un nombre entier.

On en déduit que n^2 est impair.

Conséquence

Grâce à la propriété ci-dessus, on déduit que :

Le carré d'un nombre entier est pair si et seulement si ce nombre est lui-même pair.

Info

De nombreuses démonstrations utilisent astucieusement la parité des entiers pour prouver des propriétés, par exemple pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Voir page suivante

Info

L'expression « si et seulement si » exprime ici le fait que le carré d'un entier est pair lorsque cet entier est pair, et seulement dans ce cas. Elle traduit une « équivalence logique » entre les propositions « l'entier n est pair » et « l'entier n^2 est pair », qui sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Utiliser les notions de nombre pair et de nombre impair

Énoncé On souhaite démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Pour cela, on va **raisonner par l'absurde**, en supposant que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Dans ce cas, on en déduit que $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
On pose : $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, avec p et q des entiers relatifs n'ayant aucun diviseur premier en commun.

1. Justifier que $p^2=2q^2$. En déduire que p est un entier pair.
2. On pose $p=2k$, où k est un entier relatif.
Justifier que $q^2=2k^2$. En déduire la parité de q.
3. Conclure.

Solution rédigée

1. Comme $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, les carrés de ces deux nombres sont égaux : $2=\frac{p^2}{q^2}$.
En multipliant chaque membre de cette égalité par q^2, on a $p^2=2\times q^2$ et q^2 est un nombre entier. Donc p^2 est pair, d'où on déduit que p est également pair.
Voir page 38

2. Avec $p=2k$ et $p^2=2\times q^2$, on obtient $(2k)^2=2\times q^2$, soit $4k^2=2q^2$.
En divisant chaque membre de cette égalité par 2, on a $q^2=2k^2$ et k est un nombre entier, donc q^2 est pair. Donc q est également pair.

3. D'après la question **1.**, l'entier p est divisible par 2.
D'après la question **2.**, l'entier q est divisible par 2.
On aboutit donc à une contradiction, car on avait supposé que les entiers p et q n'avaient pas de diviseur premier en commun.
On en déduit que l'hypothèse initiale « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est fausse.
On a donc démontré que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Point méthode
1. et **2.** Si n est un entier, la parité de n^2 permet de connaître la parité de n.

Point méthode
3. Pour démontrer par l'absurde, on fait l'hypothèse qu'un résultat est vrai et par un raisonnement, on prouve que l'on aboutit à une contradiction. On conclut alors que la proposition supposée vraie et, en fait, fausse.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 377 Voir exercices similaires nos 85 à 87 et n° 96

30 Soit n un entier pair, déterminer la parité de :
1. $n+1$ **2.** $n-1$ **3.** $n+2$ **4.** n^2+2

31 Démontrer que la somme de deux entiers pairs est un entier pair.

32 Démontrer que :
1. la différence de deux nombres pairs est paire.
2. la différence de deux nombres impairs est paire.
3. la différence d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.

33 On désigne par n et $(n+1)$ deux entiers consécutifs quelconques.
1. Justifier que l'un des deux est pair.
2. En déduire que $\frac{n(n+1)}{2}$ est toujours un entier.

34 Le produit de deux nombres entiers est impair. Que peut-on affirmer de ces deux nombres ?

35 Soit un nombre premier p différent de 2.
1. Quelle est la parité de l'entier p ?
Et celle de l'entier $(p+1)$? Et celle de l'entier $(p-1)$?
2. Démontrer que l'entier p^2-1 est divisible par 4.

36 **1.** Choisir un entier et observer la parité de la somme de ses trois premiers multiples (par exemple pour 17, les trois premiers multiples sont $17=17\times1$; $34=17\times2$ et $51=17\times3$).
2. Recommencer avec d'autres entiers et émettre une conjecture sur la parité de la somme.
3. Démontrer cette conjecture.

SPECIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

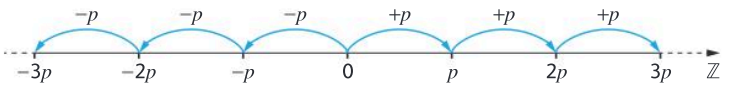
Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Soient n et p deux entiers relatifs. Lorsqu'on peut écrire $n = p \times q$ avec $q \in \mathbb{Z}$, alors on dit que :

n est un **multiple** de p ; n est **divisible** par p

p est un **diviseur** de n

Les **multiples** de p sont les entiers de la forme $k \times p$ avec $k \in \mathbb{Z}$:



Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9

- Par 2 : le chiffre des unités est pair
- Par 3 : la somme des chiffres est divisible par 3
- Par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5
- Par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9

Multiples et opérations

Soient n, m et a trois entiers relatifs.

Si n et m sont des multiples de a, alors :

- la somme $n+m$ est un multiple de a.
- la différence $n-m$ est un multiple de a.
- le produit $n \times m$ est un multiple de a.

Parités différentes et opérations

- Un entier n est **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k$$

Son reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 0.

- Un entier n est **impair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n = 2k+1$$

Son reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 1.

- La somme de deux nombres de même parité est paire.
- La somme de deux nombres de parité différente est impaire.
- n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.
- n est impair si, et seulement si, n^2 est impair.

Nombres premiers

Un entier naturel p est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs à 100 :

2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29
31 – 37 – 41 – 43 – 47 – 53 – 59 – 61 – 67
71 – 73 – 79 – 83 – 89 – 97

- Si un entier naturel $n \geq 2$ n'admet aucun diviseur entre 2 et $\sqrt{n}$ inclus, alors n est premier.
- **Théorème fondamental de l'arithmétique :** tout entier s'écrit de façon unique, à l'ordre près, comme produit d'entiers premiers.

Ce théorème permet :

- de simplifier des fractions

$$\frac{84}{66} = \frac{2\times2\times3\times7}{2\times3\times11} = \frac{2\times7}{11} = \frac{14}{11}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{3\times2}{2^2\times3^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times3}$$

$$= \frac{1\times3}{2\times3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- de simplifier des racines carrées

$$\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



Je m'exerce à démontrer

En raisonnant par l'absurde, démontrer que, pour tout entier n, si n^2 est pair alors n est pair.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2013

SPECIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2014

Voir corrigés p. 378

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

	a	b	c
1. 260 est un multiple de :	4	20	21
2. 15 est un diviseur de :	3	60	525
3. Parmi les nombres suivants, lesquels ne sont pas des multiples de 6 ?	110	486	2 223
4. L'égalité « $234 = 13 \times 18$ » permet d'affirmer que :	18 est un diviseur de 234	13 est un multiple de 234	234 est divisible par 13
5. Un diviseur commun à 120 et 105 est :	3	7	15
6. Un multiple commun de 12 et 15 est :	3	60	180
7. La décomposition en produit de facteurs premiers de 7 524 est :	$4 \times 9 \times 11 \times 19$	$2^2 \times 3^2 \times 11 \times 19$	$19 \times 11 \times 3^2 \times 2^2$
8. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{4}{3}$ est égal à :	$\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$	$\frac{9}{15} - \frac{4}{15} = \frac{5}{15}$	$\frac{1}{3}$
9. $\sqrt{891}$ est égal à :	$9\sqrt{11}$	$81\sqrt{11}$	$11\sqrt{81}$
10. Si n et m sont des entiers pairs, alors :	$(n+3m)$ est pair	(n^2+m^2) est pair	(n^2+4m) est pair
11. Si n est un entier pair et m un entier impair, alors :	$(n+3m)$ est pair	(n^2+m^2) est pair	(n^2+4m) est pair

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. Les diviseurs positifs de 117 sont : 1, 3, 9, 13, 39 et 117

2. Le produit d'un multiple de 3 et d'un multiple de 5 est multiple de 15.

3. La somme de deux entiers impairs est impaire.

4. Soient deux entiers m et n pairs. Le produit $m \times n$ est divisible par 4.

5. Tout entier divisible par 30 est divisible par 5 et par 6.

6. Tout entier divisible à la fois par 5 et par 6 est multiple de 30.

7. Le nombre $n = 2^3 \times 11$ admet 8 diviseurs positifs distincts.

8. Le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

9. La somme de deux entiers consécutifs est toujours impaire.

Partie B.

1. 101 est un nombre premier.

2. 3 977 n'est pas premier.

3. Aucun entier pair n'est premier.

4. Tout entier premier supérieur ou égal à 3 est impair.

5. La somme de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

6. Le produit de deux nombres premiers n'est jamais un nombre premier.

7. La décomposition en produit de facteurs premiers de 665 est : 35×19.

8. La forme irréductible de $\frac{572}{146}$ est $\frac{11}{3}$.

9. La forme irréductible de $\frac{455}{525}$ est $\frac{91}{105}$.

10. $\sqrt{180} = 5\sqrt{6}$

11. $\sqrt{3^2 \times 5^3 \times 11^4} = 363\sqrt{5}$

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2015

Acquérir des automatismes

37 Parmi les nombres suivants, trouver ceux qui sont des entiers relatifs.

1. $A = 2\left(7+\frac{5}{2}\right)$ **2.** $B = 3\sqrt{9}$ **3.** $C = \frac{5-12}{7}$

4. $D = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ **5.** $E = \left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)$

38 Factoriser chacune des expressions suivantes avec le plus grand multiple de 3 possible.

1. $A = (6x+12)(x+2)$

2. $B = (3x-9)(15x+5)$

3. $C = (3x-18)(18x-3)$

4. $D = (3x-6)(2x-8)(6x-12)$

39 Préciser si les entiers suivants sont des multiples de 2 ; 3 ; 5 ou 9.

1. 255 **2.** 111 **3.** 111 333 555 **4.** 234

40 Donner la décomposition en nombres premiers des entiers suivants

1. 24 **2.** 36 **3.** 42 **4.** 108 **5.** 363

41 Écrire les fractions sous forme irréductible.

1. $\frac{2}{4}$ **2.** $\frac{36}{24}$ **3.** $\frac{42}{28}$ **4.** $\frac{9}{5}-\frac{7}{15}$ **5.** $\frac{2}{7}+\frac{5}{10}$

42 Effectuer le calcul demandé et exprimer le résultat sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.

1. $\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}$ **2.** $\frac{28}{15}\times\frac{35}{44}$ **3.** $\frac{110}{7}\times\frac{21}{5}$

43 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier et b entier le plus petit possible.

1. $\sqrt{24}$ **2.** $\sqrt{50}$ **3.** $\sqrt{44}$ **4.** $\sqrt{288}$ **5.** $\sqrt{27}$

44 Déterminer si les entiers suivants sont des multiples de 2, 3, 4, 5 ou 6 (n et k sont des entiers).

1. $A = 6k+15$

2. $B = (3n+6)(4-2n)$

3. $C = (8k+10)(2k+16)$

4. $D = 16n^2+4n$

45 Déterminer la parité des expressions suivantes (n est un entier).

1. $A = 6n+12$

2. $B = 10k+5$

3. $C = 3(n+5)-(n+15)$

4. $D = 4n^2+4n+1$

5. $E = 3k^2+13(k+1)^2$

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Utiliser les notions de multiple, de diviseur et de nombre premier

Voir p. 37

46 Compléter les phrases suivantes avec le mot « multiple » ou « diviseur » et justifier par une égalité.

1. 27 est un … de 3 car $27 = 3\times\ldots$.

2. 4 est un … de 24 car ….

3. 18 est un … de 90 car ….

4. 12 est un … de 480 car ….

47 **Qui suis-je ?**

Déterminer, dans chaque cas, quel entier naturel N vérifie la condition donnée.

1. N divise tous les entiers.

2. N admet un seul diviseur.

3. N a quatre diviseurs positifs, dont 5 et 7.

4. N est un entier à deux chiffres, multiple de 3 et dont la division euclidienne par 10 a pour reste 7 (plusieurs solutions possibles).

48 **Vrai ou faux ?**

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

n désigne un entier naturel.

1. Le reste dans la division euclidienne de 121 par 6 est 1.

2. Si le reste dans la division euclidienne de n par 3 est 1 alors $2n+1$ est un multiple de 3.

3. Si 3 divise n alors 9 divise n^2.

4. Si 5 divise n alors $4n$ est divisible par 10.

Démo

49 Soient a, m et n trois entiers relatifs.

On suppose que m et n sont des multiples de a ;

1. Comment peut-on traduire cette hypothèse ?

2. Montrer que :

a. la somme $(m+n)$ est divisible par a ;

b. la différence $(m-n)$ est un multiple de a ;

c. le produit $(m\times n)$ est un multiple de a.

50 **Vrai ou faux ?**

Soient N, a et b trois entiers relatifs. Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. Si a divise N et si b divise N, alors N est un multiple de $a\times b$.

2. Si a et b sont des multiples de N, alors $(a+3b)$ est divisible par N.

3. Si a est un diviseur de N, alors N est un multiple de a^2.

4. Si a et b divisent N, alors $(a+b)$ divise N.

SPECIMEN

51 n et m sont des entiers relatifs. Déterminer si les entiers suivants sont multiples de 3 ou non. Justifier.

1. $3n+6m$ **2.** $6n+1$

3. $n(3m-12)$ **4.** $35n+n(3n+1)$

52 n et m sont des entiers relatifs. Déterminer si les entiers suivants sont multiples de 5 ou non. Justifier.

1. $3+10m$ **2.** $5m^2-25n$

3. $(30n+5m)^2$ **4.** $n^2+4n(n+15)$

53 Donner une condition nécessaire sur l'entier relatif b afin que les propositions suivantes formulées sur l'entier N soient vraies.

1. $N=3a+b$ et N un multiple de 3.

2. $N=9a+3b$ et N un multiple de 9.

3. $N=5a+2b$ et N un multiple de 5.

4. $N=4a+2b$ et N un multiple de 2.

5. $N=12a+b$ et N un multiple de 4.

54 **Devinette**

Je suis un entier naturel à trois chiffres. Je suis un multiple de 5 et de 9. Mon chiffre des dizaines est impair et mon chiffre des centaines est le triple de celui des dizaines. Qui suis-je ?

55 Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours multiple de 5.

56 **1. a.** Déterminer les multiples positifs de 18 inférieurs à 100.

b. Déterminer les multiples positifs de 24 inférieurs à 100.

c. En déduire le plus petit multiple commun positif de 18 et 24.

2. Écrire alors sous la forme d'une fraction irréductible les nombres suivants :

$$A=\frac{5}{18}-\frac{7}{24} \quad \text{et} \quad B=\frac{7}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\div\frac{12}{7}$$

57 LOGIQUE On considère l'affirmation suivante : « Si un entier est un multiple de 4, alors il est pair. ».

1. Dire en justifiant si cette affirmation est vraie ou fausse.

2. Écrire la réciproque de cette affirmation. Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

3. Écrire la contraposée de cette affirmation. Est-elle vraie ou fausse ?

Info

Pour montrer qu'un énoncé universel est vrai, il faut le prouver dans le cas général. Pour montrer qu'il est faux, il suffit de trouver un cas où il est mis à défaut (un contre-exemple).
La contraposée d'une proposition vraie est vraie. Par exemple, la proposition : « Si un triangle est rectangle, alors il n'a aucun angle obtus. » est vraie. Sa contraposée est : « Si un triangle a un angle obtus, alors il n'est pas rectangle. » Elle est également vraie.

58 LOGIQUE On considère l'affirmation suivante : « Si un entier est divisible par 60, alors il est divisible par 6 et par 10. »

1. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

2. Écrire la réciproque de cette affirmation. Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

59 **1.** Déterminer les diviseurs positifs communs aux entiers 110 et 88.

2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de long et de 88 cm de large. Il a reçu la consigne suivante :

« Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte ».

Quelle sera la longueur du côté du carré ?

3. Combien peut-il découper de carrés par plaque ?

60 Un lycée décide d'organiser une épreuve de cross par équipe pour tous les élèves. Les professeurs constituent le plus grand nombre possible d'équipes. Chaque équipe doit comprendre le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

1. Sachant qu'il y a 588 garçons et 420 filles, quel est le plus grand nombre d'équipes que l'on peut composer ?

2. Combien y-a-t-il de filles et de garçons dans chaque équipe ?



61 **Qui suis-je ?**

Dans chaque cas, déterminer l'entier naturel N.

1. N est un nombre premier inférieur à 30 dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 1.

2. N est un nombre premier inférieur à 30 et la somme de ses deux chiffres est égale à 11.

3. N est un nombre premier compris entre 50 et 100 dont la somme des chiffres est la plus grande possible.

Pour les exercices **62** *à* **64**, *indiquer, en justifiant, pour chacun des nombres donnés, s'il est premier ou non. Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant qui sera démontré dans l'exercice* **105** :

« Si un entier $n \geqslant 2$ n'est divisible par aucun entier p premier tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$, alors n est premier. »

62 **1.** 27 **2.** 31 **3.** 101

63 **1.** 183 **2.** 439 **3.** 579

64 **1.** 2 027 **2.** 2 653 **3.** 10 007

SPECIMEN

exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2015

Pour les exercices 65 à 68, écrire les entiers sous forme de produits de nombres premiers.

65 • 150×10
• $4\times49\times9^2$
• 42 210



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2016

66 363 • 100 • 315 • 675 • 60

67 539 • 500 • 135 • 209 • 455

68 176 • 264 • 605 • 385 • 882

69 **1.** Peut-on trouver deux entiers consécutifs premiers ? Justifier.
2. Peut-on trouver trois entiers consécutifs premiers ? Justifier.

70 **Devinette**
Je suis un entier pair à trois chiffres compris entre 500 et 800. Je suis à la fois divisible par 17 et par 9. Qui suis-je ?

71 Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est multiple de 6.

Pour les exercices 72 à 75, écrire les fractions A et B sous forme irréductible après avoir décomposé les numérateurs et dénominateurs en produits de facteurs premiers.

72 **1.** $A=\dfrac{3\times5^2\times11^3}{2^2\times5\times11^4}$ **2.** $B=\dfrac{2^2\times15}{5\times18}$

73 **1.** $A=\dfrac{294}{63}$ **2.** $B=\dfrac{30}{105}$

74 **1.** $A=\dfrac{28\times9}{420}$ **2.** $B=\dfrac{66}{396}$

75 **1.** $A=\dfrac{18}{49}\times\dfrac{14}{15}$ **2.** $B=\dfrac{32}{12}\div\dfrac{36}{15}$

Pour les exercices 76 à 78, effectuer les calculs suivants, en détaillant les étapes. Donner le résultat sous la forme de fraction irréductible.

76 **1.** $A=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{15}$ **2.** $B=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{3}$

77 **1.** $A=\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{7}{5}\times\dfrac{8}{3}$ **2.** $B=\dfrac{5}{3}\div\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{8}$

78 **1.** $A=\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}}$ **2.** $B=\dfrac{\frac{7}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{3}{4}}$

Pour les exercices 79 à 81, écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a, b\in\mathbb{N}$ avec b le plus petit possible, les nombres suivants après avoir décomposé les entiers en produits de facteurs premiers.

79 **1.** $\sqrt{3\times5^2}$ **2.** $\sqrt{2\times5^3}$ **3.** $\sqrt{2\times3^2\times5^4}$

80 **1.** $\sqrt{294}$ **2.** $\sqrt{8}$ **3.** $\sqrt{7\,500}$

81 **1.** $\sqrt{315}$ **2.** $\sqrt{2\,200}$ **3.** $\sqrt{12\,250}$

82 Simplifier les expressions suivantes, puis vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.
1. $A=3\sqrt{50}+\sqrt{2}$ **2.** $B=\sqrt{63}+\sqrt{28}$
3. $C=\sqrt{8}+\sqrt{72}$ **4.** $D=2\sqrt{45}-3\sqrt{20}+\sqrt{5}$

83 **1.** Décomposer 288 et 648 en produits de facteurs premiers.
2. En déduire tous les diviseurs communs de ces deux entiers.
3. Pour les fêtes de fin d'année, Louna a fabriqué 288 berlingots et 648 caramels mous. Elle souhaite confectionner des sachets contenants chacun autant de berlingots que de caramels mous. Aucun caramel ou berlingot ne doit rester.
a. Louna peut-elle réaliser 36 sachets ?
b. Quel est le nombre maximal de sachets qu'elle peut réaliser ? Dans ce cas, déterminer le nombre de berlingots et de caramels que contient chaque sachet.

Capacité 2 Utiliser les notions de nombre pair et impair

Voir p. 39

84 **Qui suis-je ?**
Déterminer, dans chaque cas, quel entier naturel N vérifie la condition donnée.
1. N est l'entier pair inférieur à 30 dont la somme des chiffres est la plus grande possible.
2. N est l'entier impair compris entre 10 et 50, divisible par 3, et dont la somme des chiffres est la plus petite possible.

Démo
85 **1.** Soient n et p deux nombres entiers.
a. On suppose que n est un nombre pair. Comment peut-on traduire cette hypothèse pour n ?
b. On suppose que p est un nombre impair. Comment peut-on traduire cette hypothèse pour p ?
2. Démontrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.
3. Démontrer que le produit de deux nombres entiers est impair si et seulement si ils sont tous les deux impairs.

SPECIMEN

86 Démontrer que :
1. le produit d'un entier par un entier pair est pair.
2. le produit de deux entiers impairs est impair.
3. le produit de deux entiers consécutifs est pair.

87 1. Démontrer que la somme de deux nombres premiers différents de 2 est paire.
2. Vérifier que les entiers suivants peuvent s'écrire comme somme de deux nombres premiers :

20 • 64 • 120 • 2 024.

Info



La propriété « tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers » est une conjecture formulée par le mathématicien allemand Christian Goldbach (1690–1764).
Début 2025, aucun mathématicien n'est encore parvenu à la démontrer, même si la communauté mathématique pense qu'elle est vraie.
Les nombres entiers donnent lieu à des propriétés d'énoncé très simple, comme la conjecture de Goldbach, mais dont la résolution est extraordinairement complexe. Cette conjecture résiste à toute démonstration depuis plus de 250 ans… !

Pour les exercices **88** *à* **90**, *on travaille dans un triangle rectangle dont les côtés ont pour mesures les entiers* a, b *et* c *(avec* $a \leqslant b < c$*).*

88 Déterminer la parité de c, sachant que a et b sont des entiers pairs.



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2017

89 Démontrer que les entiers a, b et c ne peuvent pas être tous les trois impairs.

90 Démontrer que « c est pair » est équivalent à « a et b ont la même parité ».

91 Montrer que le produit de plusieurs nombres entiers dont au moins un est pair est un nombre pair.

92 Soit a un entier tel que $a^2 = 4q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$.
1. Déterminer la parité de a.
2. Démontrer que $(a+5)^2$ est divisible par 4.

93 On écrit la division euclidienne d'un entier naturel n par 4.
1. Quels sont les restes possibles dans cette division ?
2. En déduire que le nombre n s'écrit nécessairement sous la forme $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$ avec k entier naturel.
3. Si on suppose de plus que l'entier n est impair, quels sont les restes possibles de n dans la division euclidienne par 4 ? Sous quelles formes n peut-il alors s'écrire ?

94 LOGIQUE On considère l'affirmation suivante : « Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et par 3. »
1. Montrer que cette affirmation est vraie.
2. Écrire la réciproque de cette affirmation.
3. On souhaite démontrer que cette réciproque est vraie. Soit n un entier divisible par 2 et par 3.
a. Justifier qu'il existe un entier k tel que $n = 3k$.
b. En raisonnant par l'absurde, montrer que k est nécessairement pair. Conclure.

95 1. Démontrer que :
a. le cube d'un entier pair est pair.
b. le cube d'un entier impair est impair.
2. Préciser la parité des nombres suivants, sans effectuer de calcul :

14^3 ; 15^3 ; 101^3 ; $1024^3 \times 5^3$

Puis vérifier à la calculatrice.

96 Démontrer que :
1. la somme de deux entiers consécutifs est impaire.
2. le produit de deux entiers consécutifs est pair.

97 On cherche à déterminer le plus grand entier qui divise toutes les sommes des carrés de trois nombres pairs consécutifs.
1. Soient les entiers 2 ; 4 et 6. Calculer la somme de leurs carrés et donner la liste de ses diviseurs.
2. Soient les entiers 4 ; 6 et 8. Calculer la somme de leurs carrés et donner la liste de ses diviseurs.
3. Soient les entiers 12 ; 14 et 16. Calculer la somme de leurs carrés et donner la liste de ses diviseurs.
4. Émettre une conjecture concernant le plus grand entier qui divise toutes les sommes de carrés de trois nombres pairs consécutifs.
5. Démonter cette conjecture en remarquant que si n est un entier pair, l'entier pair précédent est $n-2$.

Aide

Dans GeoGebra, la commande ListeDiviseurs(n) donne la liste de tous les diviseurs de n.

98 Un échiquier est composé de 64 cases (une sur deux est blanche, une sur deux noire).
1. Montrer qu'on peut le découper en 32 dominos bicolores de taille 1×2.
2. On enlève les cases A1 et H8 : chercher un découpage de l'échiquier tronqué en dominos bicolores de taille 1×2. Si ce découpage semble impossible, il faut le prouver !



SPECIMEN

Exercices — Entraînement

1 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Analyse d'un énoncé

99 Exercice commenté

Critère de divisibilité par 3 : « un entier N est divisible par 3 si, et seulement si, la somme des chiffres de N est un multiple de 3 ».

On souhaite démontrer ce critère dans le cas particulier où N est un entier à trois chiffres.

En notant c le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités de N, on a alors :

$$N = 100c + 10d + u$$

1. En utilisant les résultats de la division euclidienne par 3 de 100 et de 10, justifier que :

$$N = 3(33c + 3d) + (c + d + u)$$

> Les divisions euclidiennes de 100 et 10 par 3 permettent de donner une expression de N sous la forme $3k + r$.

2. a. Montrer que : « si la somme des chiffres de N est divisible par 3, alors N est divisible par 3. »

> Exploiter le résultat de la question **1.** pour montrer que N peut s'écrire sous la forme du produit de 3 par un entier.

b. Montrer la réciproque du résultat précédent.

> On suppose que N est multiple de 3. On souhaite alors montrer que $c + d + u$ est multiple de 3. Exploiter de nouveau le résultat de la question **1.**

3. Parmi les entiers suivants : 235 ; 678 et 791, indiquer ceux qui sont divisibles par 3.

> Appliquer le critère démontré précédemment.

100 Application immédiate

On considère un entier N à trois chiffres.

1. Montrer que N est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

2. Parmi les entiers suivants, indiquer lesquels sont divisibles par 9 : 324 ; 568 ; 914 et 127.

101 Critère de divisibilité par 5

On considère un entier naturel N dont le chiffre des unités est u.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel k tel que N puisse s'écrire sous la forme : $N = 10k + u$.

2. En déduire que : N est divisible par 5 si, et seulement si, u est égal à 0 ou 5.

102 Je suis un entier naturel comportant 3 chiffres et je suis divisible par 5 et par 9. Mon chiffre des dizaines est le triple de celui des centaines. Je ne suis pas divisible par 10. Qui suis-je ?

103 Raisonner par disjonction des cas

1. En utilisant la division euclidienne, montrer que tout entier naturel n s'écrit sous l'une des trois formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

2. En raisonnant par disjonction des cas, justifier alors que, pour tout entier naturel n, l'entier $n(2n^2+1)$ est divisible par 3.

Info

Raisonner par disjonction des cas consiste à résoudre le problème dans chaque sous-cas, l'ensemble des sous-cas recouvrant finalement toutes les possibilités. Ici le cas où $n = 3k$, celui où $n = 3k+1$ et enfin celui où $n = 3k+2$.

104 PYTHON

Algorithme de recherche des diviseurs

On considère la fonction `diviseur` ci-dessous prenant en paramètre un entier naturel `n` et qui affiche tous les diviseurs positifs de `n` :

```
1def diviseur(n):
2    for k in range(1, n+1):
3        if n%k == 0:
4            print(k)
```

1. a. L'instruction `n%k` permet d'obtenir le reste dans la division euclidienne de `n` par `k`. Expliquer alors l'intérêt du test : `n%k == 0`.

b. Quelle sera la dernière valeur prise par `k` à l'issue de la boucle `for` ?

c. Exécuter pas à pas, à la main, la fonction pour $n = 10$, puis pour $n = 18$.

2. On constate que l'entier `k` de la boucle `for` prend beaucoup de valeurs inutiles.

a. On remarque que 2 divise 18 car $18 = 2 \times 9$. Quel autre diviseur de 18 obtient-on sans faire de calcul supplémentaire ?

b. On propose la fonction incomplète `diviseur_bis` ci-dessous.

```
1from math import sqrt, floor
2
3def diviseur_bis(n):
4    fin = floor(sqrt(n))
5    for k in range(1,...):
6        if n%k == 0:
7            print (...)
8            print (...)
```

L'expression « `n//k` » permet d'obtenir le quotient dans la division euclidienne de `n` par `k`.

`floor(sqrt(n))` donne la partie entière de $\sqrt{n}$.

Compléter cette fonction afin qu'elle affiche tous les diviseurs de `n`.

c. Déterminer tous les diviseurs de 245.

3. Comparer les temps d'exécution de chacune des fonctions pour $n = 1\,234\,567\,890$.

SPÉCIMEN

105 LOGIQUE Premier ou non ?

L'objectif de cet exercice est de proposer une démarche permettant de savoir si un entier naturel n supérieur ou égal à 2 est premier ou non.

1. On veut démontrer la propriété suivante :
« Si un entier $n \geqslant 2$ n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier : son plus petit diviseur dans $\mathbb{N}$ autre que 1 ».
Dans la suite, n désigne un entier non premier tel que $n \geqslant 2$. On note p son plus petit diviseur différent de 1.

a. En raisonnant par l'absurde, montrer que p est nécessairement un nombre premier.

b. Justifier qu'il existe un entier $q \geqslant p$ tel que $pq = n$. En déduire que ce plus petit diviseur premier de n vérifie l'encadrement : $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$.

c. En déduire que : si un entier $n \geqslant 2$ n'est divisible par aucun entier p premier tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$, alors n est premier.

2. En utilisant cette propriété, indiquer, en justifiant, si les entiers suivants sont premiers ou non :

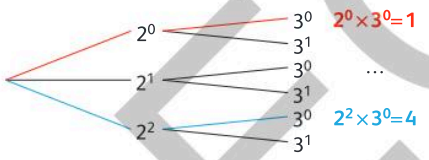
83 • 91 • 731 • 983 • 8 633 • 10 001.

106 Décomposition en produit de facteurs premiers et diviseurs

1. On pose $N = 12$. Sa décomposition en produit de facteurs premiers est : $N = 2^2 \times 3$.

a. Justifier que si d est un diviseur positif de N, alors la décomposition en produit de facteurs premiers de d ne comporte pas d'autres facteurs premiers que 2 ou 3.

b. On construit l'arbre incomplet suivant.



Expliquer comment cet arbre permet d'obtenir tous les diviseurs de N, sans en oublier.
Les déterminer tous.

2. En utilisant une démarche analogue à la question **1.**, déterminer tous les diviseurs positifs de 45, de 50, de 70 et de 147.

107 Nombre de diviseurs positifs d'un entier

On considère un entier naturel n.

1. a. On choisit $n = 63$. En décomposant n en produit de facteurs premiers et en exploitant un arbre de dénombrement (voir ex. 106), montrer que n admet exactement six diviseurs positifs, puis les déterminer tous.

b. De la même façon, montrer que $n = 231$ admet exactement huit diviseurs positifs puis les déterminer tous.

c. Reprendre la question **b.** pour $n = 24$.

2. Plus généralement, on écrit n comme produit de facteurs premiers $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \cdots \times p_k^{n_k}$ où les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont tous distincts, et les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont des entiers naturels non nuls.

a. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de n en fonction des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

b. Est-il possible que n admette exactement 5 diviseurs positifs ? Si oui, préciser la forme de l'entier n.

108 Qui suis-je ?

Soit un entier naturel n dont les seuls diviseurs premiers sont 2 et 3.

1. Est-il possible que n admette exactement trois diviseurs positifs ?

2. Déterminer les valeurs possibles de n dans chacun des cas suivants.

a. n possède exactement quatre diviseurs positifs.

b. n possède exactement six diviseurs positifs.

c. n possède exactement dix diviseurs positifs.

109 PRISE D'INITIATIVES Que peut-on penser de l'affirmation suivante ?

« Plus l'entier n est grand, plus il a de diviseurs. »

110 LOGIQUE Carrés et nombre de diviseurs

On considère un entier naturel n.
Préciser, pour chaque affirmation suivante, si elle est vraie ou fausse.

1. Si n est un carré parfait (c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $n = k^2$), alors n admet un nombre impair de diviseurs positifs.

2. Si n admet un nombre impair de diviseurs positifs, alors n est un carré parfait.

111 Carrés et cubes parfaits

On dit qu'un entier n est un **carré parfait** (resp. un **cube parfait**) lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $n = k^2$ (resp. $n = k^3$) avec k entier.
Ainsi, $49 = 7^2$ est un carré parfait, $512 = 8^3$ est un cube parfait.

1. Déterminer le plus petit entier naturel m tel que $6\,804 \times m$ soit un carré parfait.

2. Déterminer le plus petit entier naturel m tel que $1\,920 \times m$ soit un cube parfait.

112 Nombres entiers premiers entre eux

Deux entiers sont dits **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur positif commun est 1.

1. Les nombres 25 et 14 sont-ils premiers entre eux ? Même question pour 70 et 15.

2. On considère l'affirmation suivante :

« Deux nombres premiers
sont toujours premiers entre eux. »

a. Cet énoncé est-il vrai ? Justifier.

b. Qu'en est-il de la réciproque ?

3. On se propose de démontrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux. Soient n et $n+1$ deux entiers consécutifs.
On considère d un diviseur positif commun de n et $n+1$. Montrer que d divise 1 puis conclure.

SPECIMEN

113 Deux entiers naturels distincts sont dits **amicaux** si chacun est égal à la somme des diviseurs positifs stricts (autres que lui-même) de l'autre.

1. Montrer que 220 et 284 sont amicaux (découverte attribuée à Pythagore).

2. Justifier que 1 184 et 1 210 sont amicaux, ainsi que 2 620 et 2 924. *On pourra utiliser la liste des entiers premiers inférieurs à 100.*

Voir p. 40

114 Nombres premiers entre eux et fractions irréductibles

On souhaite montrer que, pour tout entier naturel n, les entiers $A = 3n+2$ et $B = n+1$ sont toujours premiers entre eux.

1. On considère d un diviseur positif commun de A et B.

a. Justifier que d divise $3B - A$.

b. En déduire que d divise 1 et conclure.

c. Que peut-on dire de la fraction $\frac{A}{B}$?

2. À l'aide d'une méthode analogue à celle utilisée pour la question **1.**, démontrer que la fraction $\frac{5n+21}{n+4}$ est irréductible quelle que soit la valeur de l'entier naturel n.

Info

Si a et b sont entiers, la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

115 Forme des nombres premiers supérieurs à 6

On considère un nombre premier $p \geqslant 6$.

On effectue la division euclidienne de p par 6 et on écrit : $p = 6q + r$, où q et r sont des entiers naturels avec $q \geqslant 1$ et $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$.

1. Justifier que r ne peut pas être égal à 0, 2, 3 ou 4.

2. Les entiers de la forme $6k+1$ et $6k+5$, avec k un entier naturel non nul, sont-ils tous des nombres premiers ?

116 ALGO **Être ou ne pas être premier ?**

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$.

1. Compléter la propriété suivante :

« Si n n'admet aucun … entre 2 et …,
alors n est premier ».

2. a. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine si un entier $n \geqslant 3$ est premier ou non.

```
k ← 2
Tant que (k ne divise pas n) et (k ⩽ …) Faire :
    k ← k + 1
Fin Tant que
Si k ne divise pas n Alors :
    Afficher « n est … »
Sinon :
    Afficher « n … »
```

b. Modifier cet algorithme pour que, dans le cas où l'entier n n'est pas premier, il renvoie son plus petit diviseur d supérieur ou égal à 2.

3. PYTHON Coder cet algorithme dans le langage Python et le mettre en œuvre pour tester si les entiers suivants sont premiers ou non :

97 • 271 • 451 • 537 • 743 • 893 • 11 111

4. Dans une lettre adressée à Bernoulli, Euler écrivait en 1771 : « Cette progression 41, 43, 47, 53, etc. dont le terme général est $41 - x + x^2$ (où $x \in \mathbb{N}$) est d'autant plus remarquable que les 40 premiers termes sont des nombres premiers. »

a. Vérifier l'affirmation d'Euler.

b. Le 41e terme de la suite d'Euler est-il premier ?

2 Nombres pairs, nombres impairs

117 Soit n un entier.

1. On suppose que n est pair. Démontrer que son carré n^2 est divisible par 4.

2. On suppose que n est impair. Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est égal à 1.

118 Parité et opérations

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. On suppose que a est pair et b est impair. Préciser la parité des entiers suivants.

a. $9a + 4b$ **b.** $2a - 5b$ **c.** $a^2 + b^2$

2. Mêmes questions dans le cas où a et b sont impairs.

119 Soit n un entier naturel.

1. Étudier la parité de $3n^2 + n$.

2. Même question pour $4n^2 + n$

120 Soit n un entier. Montrer que n et n^{2024} ont la même parité.

121 **1.** Soit n un entier pair. Montrer que l'entier $n^4 + 4n^2 + 32$ est un multiple de 16.

2. a. Justifier que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

b. Soit n un entier impair. Montrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

122 Exercice guidé

Soit n un entier naturel. Montrer que l'entier $n^3 - n$ est divisible par 6.

Pistes de résolution

On pourra factoriser $n^3 - n$ et remarquer que cette différence est en fait le produit de trois entiers consécutifs.

SPECIMEN

123 Impairs et somme de deux carrés

Soit un entier naturel N impair.

On cherche une condition nécessaire pour qu'on puisse écrire $N = a^2 + b^2$ avec a et b dans $\mathbb{N}$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la parité de $a^2 + b^2$, pour a et b deux entiers.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
Pair	Pair			
Pair	Impair			
Impair	Pair			
Impair	Impair			

2. On suppose qu'on peut écrire $N = a^2 + b^2$.

a. En utilisant la question **1.**, justifier que les entiers a et b n'ont pas la même parité.

b. On pose $a = 2u$ et $b = 2v + 1$ avec u et v dans $\mathbb{N}$.

Démontrer que N est de la forme $(4k + 1)$, où $k \in \mathbb{N}$.

3. Les entiers impairs de la forme $(4k + 1)$ peuvent-ils tous s'écrire comme la somme de deux carrés ?

124 PYTHON Impairs et différences de carrés

Soit un entier relatif n.

1. Simplifier l'expression $(n+1)^2 - n^2$.

2. En déduire que tout nombre impair est égal à la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

3. Écrire 49, puis 51 comme la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

4. En langage Python, les instructions « a//b » et « a%b » renvoient respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b.

On définit la fonction Python suivante.

```
def différence_carrés_consécutifs(k):
    n=k//2
    return n,n+1
```

a. Exécuter à la main la fonction différence_carrés_consécutifs pour $k = 23$.

b. Que permet de faire cette fonction lorsqu'on donne en argument un entier k impair ?

125 Nombres de Mersenne

On considère pour tout entier naturel n non nul le nombre $M_n = 2^n - 1$ appelé n-ième nombre de Mersenne.

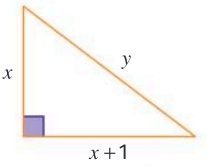
1. Quelle est la parité du nombre M_n pour tout entier naturel n non nul ? Justifier.

2. Calculer les cinq premiers nombres M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5.

Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ?

3. On suppose désormais que n est un entier pair et que $n \geqslant 4$. À l'aide d'une identité remarquable, justifier que M_n peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit de deux entiers à préciser. M_n peut-il alors être premier dans ce cas ? Justifier.

126 ALGO



On appelle **triangle rectangle presque isocèle (TRPI)** un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont des entiers consécutifs x et $x+1$, et dont la longueur de l'hypoténuse y est entière. On dira dans ce cas que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

1. Démontrer qu'un couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI si, et seulement si, $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

2. Soit un couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définissant un TRPI.

a. Démontrer que y^2 est impair. Que peut-on en déduire sur la parité de y ?

b. Soit d un diviseur commun de x et y.

En étudiant $(y^2 - 2x^2 - 2x)$, démontrer que d divise 1.

c. Quelles sont les seules valeurs possibles des diviseurs communs de x et y ?

3. On souhaite chercher de façon systématique les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ définissant des TRPI, où $1 \leqslant x \leqslant 1000$ et $1 \leqslant y \leqslant 1000$.

```
Pour x allant de 1 à ... Faire
    Pour y allant de x à ... Faire
        Si ... Alors
            Afficher (x;y)
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

b. Au cours de son exécution, l'algorithme affiche les couples solutions ci-contre.

Vérifier les résultats établis à la question **2.** sur ces couples solutions.

```
(3;5)
(20;29)
(119;169)
(696;985)
```

127 Nombres premiers jumeaux

Deux nombres premiers sont **jumeaux** lorsque la différence entre le plus grand et le plus petit est égale à 2. Ainsi les nombres premiers 3 et 5 sont jumeaux.

1. Proposer 4 couples de nombres premiers jumeaux.

2. Justifier que des nombres premiers jumeaux sont obligatoirement impairs.

3. Soit un entier naturel $p \geqslant 6$ tel que les entiers p et $p-2$ sont des nombres premiers jumeaux.

D'après l'exercice 115, on peut écrire : $p = 6q + 1$ ou $p = 6q + 5$, avec q un entier naturel non nul.

a. En utilisant que $p-2$ est un nombre premier, justifier que p est de la forme $6q+1$.

b. Les entiers de la forme $p = 6k + 1$ et $p-2$, avec k un entier naturel non nul, sont-ils tous des nombres premiers jumeaux ?

4. Déterminer tous les nombres premiers jumeaux inférieurs à 100.

Info

Les mathématiciens conjecturent qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux. Mais début 2026, aucune preuve de cette conjecture ou du contraire n'a été établie.

SPÉCIMEN

BILAN

128 10min Calculer en simplifiant

Calculer et simplifier les nombres suivants.

1. $A = \dfrac{4\,725}{2\,625}$ **2.** $B = \dfrac{\sqrt{75}\times\sqrt{192}}{\sqrt{196}}$

3. $C = \dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{8}$ **4.** $D = \dfrac{8}{5}\times\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{3}$

129 15min Parité et combinaisons linéaires

Soient a, b, u et v quatre entiers relatifs.

1. Pour a et b impairs, étudier la parité de :

a. $3a$ **b.** $2b$ **c.** $2a+3b$ **d.** $4a+2b$

2. On suppose que a est pair et b impair.

a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la parité de $au+bv$.

u	v	au	bv	$au+bv$
Pair	Pair			
Pair	Impair			
Impair	Pair			
Impair	Impair			

b. À quelle condition sur les entiers u et v le nombre $(au+bv)$ est-il pair ?

3. On suppose que les entiers a et b sont pairs.

À quelle condition sur les entiers u et v le nombre $(au+bv)$ est-il pair ?

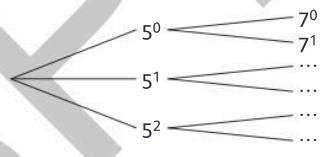
130 15min Diviseurs positifs d'un entier

L'objectif est de déterminer tous les diviseurs positifs d'un entier N dans certains cas particuliers.

1. On choisit $N = 175$.

a. Décomposer N en produit de facteurs premiers.

b. Recopier et compléter l'arbre de dénombrement ci-dessous, puis déterminer tous les diviseurs positifs de N.



2. Déterminer tous les diviseurs positifs de $N = 686$.

3. On pose $N = 3^n$ où n est un entier naturel.

Déterminer l'entier n de façon que N admet exactement cinq diviseurs positifs.

131 10min Ils se suivent…

1. Soit n un entier, exprimer en fonction de n :

a. l'entier précédant n ;

b. l'entier suivant n.

2. Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est multiple de 3 et que leur produit est multiple de 6.

132 20min Nombres abondants, nombres déficients et nombres parfaits

Un entier naturel n est dit **abondant** s'il est strictement inférieur à la somme de ses diviseurs stricts (autres que lui-même) positifs.

Un entier naturel n est dit **déficient** s'il est strictement supérieur à la somme de ses diviseurs stricts positifs.

Un entier naturel n est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts positifs.

1. Déterminer, pour chaque entier n compris entre 2 et 12 (inclus), si n est abondant, déficient ou parfait.

2. Montrer que 28 est parfait.

3. Soit p un nombre premier.

Démontrer que p est déficient.

Info

Les nombres parfaits sont encore une énigme en 2026. On ignore s'il en existe une infinité, on ignore également s'il existe des nombres parfaits impairs (probablement que non…).

133 15min Décompositions en produit de facteurs premiers

1. Décomposer 126 et 147 en produits de facteurs premiers.

2. Écrire sous forme irréductible la fraction $\dfrac{126}{147}$.

3. Écrire le nombre $\sqrt{147}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ tels que b est le plus petit possible.

4. Déterminer tous les diviseurs positifs de 147.

5. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.

« Si deux entiers ont les mêmes diviseurs premiers, alors l'un est multiple de l'autre. »

134 15min PGCD de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On note $\text{PGCD}(a\,;b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.

1. On choisit $a = 2^2\times 3 = 12$ et $b = 2\times 3^2\times 5 = 90$.

Déterminer $\text{PGCD}(a\,;b)$.

2. Reprendre la question **1.** avec $a = 390$ et $b = 525$.

3. a. On suppose que a et b sont tous les deux pairs.

Justifier que $\text{PGCD}(a\,;b)$ est un entier pair.

b. On suppose que $\text{PGCD}(a\,;b)$ est pair.

Que peut-on en déduire pour la parité des entiers a et b ? Justifier.

4. a. On suppose que l'un des deux entiers a ou b (au moins) est impair.

Quelle est la parité de $\text{PGCD}(a\,;b)$?

b. On suppose que $\text{PGCD}(a\,;b)$ est impair.

Montrer, avec des exemples, qu'on ne peut être certain de la parité des entiers a et b.

SPECIMEN

APPROFONDISSEMENT

135 Compétence Modéliser

Trou de mémoire

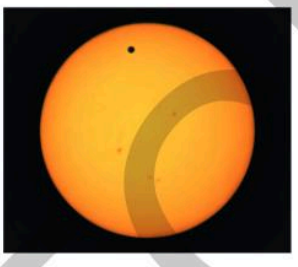
Zorana a effectué la somme de cinq entiers consécutifs mais elle ne sait plus si elle a obtenu 567 ou 657 ou 765.

1. Déterminer la somme qu'elle a obtenue.
2. Donner les cinq entiers.

136 Pavages

1. Soit un rectangle de dimensions 24 cm sur 40 cm. Sarah veut partager ce rectangle en carré dont les côtés sont les plus grands possibles : déterminer la longueur du côté d'un carré.
2. Maintenant Sarah veut former un grand carré à l'aide de rectangles de dimensions 24 cm sur 40 cm. Déterminer le nombre minimum de rectangles nécessaires.

137 Alignement de planètes



En simplifiant les données et en comptant en jours terrestres, Vénus tourne autour du Soleil en 225 jours et la Terre en 365 jours. On suppose qu'un jour donné, le Soleil, Vénus et la Terre sont alignés.
Calculer la durée minimale pour que ce phénomène se reproduise et donner le nombre de révolutions autour du Soleil effectuées par chaque planète.

138 Nature d'un nombre

Stéphanie définit la fonction S pour tous les entiers naturels par $S(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Calculer $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$ et $S(4)$. Que peut-on remarquer ?
2. L'objectif de cette question est de démontrer que la fonction S donne toujours un entier. Pour cela on va démontrer que $A(n)=n(n+1)(2n+1)$ est un toujours un multiple de 6.

a. Justifier que $A(n)$ est toujours un entier pair.
On souhaite démontrer que $A(n)$ est toujours un multiple de 3.
b. Justifier que tout entier naturel n peut s'écrire sous la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ où k est un entier naturel.
c. En raisonnant par disjonction de cas, démontrer que, pour tout entier naturel n, $A(n)$ est un multiple de 3.
d. En conclure la nature de $S(n)$ pour n entier.

139 Critère de primalité

1. Recopier le tableau en incluant les lignes manquantes, puis entourer les nombres premiers. Émettre une conjecture concernant les colonnes ne contenant pas de nombres premiers.

A	B	C	D	E	F
	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
96	97	98	99	100	101

2. Montrer que les nombres de la colonne A sont les multiples d'un même entier ; en déduire qu'ils ne peuvent pas être premiers.
3. Écrire les nombres de la colonne C sous la forme $6k+r$ où r est un entier à déterminer.
Démontrer que les nombres de cette colonne (excepté 2) ne peuvent être premiers.
4. Utiliser le même raisonnement, pour démontrer que les nombres de colonne D ne peuvent être premiers (excepté 3) et qu'aucun nombre de la colonne E ne peut être premier.
5. Énoncé une condition de primalité d'un entier en fonction de son reste dans la division euclidienne par 6.

140 Compétence Modéliser

Le chevalier des temps anciens



Le dernier jour d'un mois de la Première Guerre mondiale, un obus a exhumé le corps d'un soldat des temps anciens. Il gisait à côté de sa hallebarde.
Si on fait le produit du quantième du mois, par la longueur en pieds de la hallebarde, par le quart du temps (en années) qui s'est écoulé entre la mort et l'exhumation et enfin par la moitié de l'âge du Chevalier quand il est mort, on obtient 225 533.

1. Déterminer l'âge du Chevalier au moment de sa mort.
2. Déterminer l'année de son décès.
3. À l'aide du mot clé *duc*, de la date de naissance et la date de décès : déterminer l'identité du Chevalier en utilisant un moteur de recherche.

SPÉCIMEN

141 Somme de cubes

1. Choisir trois nombres entiers consécutifs et calculer le nombre C qui est la somme des cubes de ces trois entiers.
2. Vérifier que C est divisible par 9.
3. Démonstration de cette propriété.
a. Soit n un nombre entier. Exprimer en fonction de n l'entier précédant n et l'entier suivant n.
b. Vérifier que $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$.
c. Exprimer en fonction de n la somme $C(n)$ des cubes des trois entiers consécutifs dont n est la valeur centrale.
d. Justifier que tout entier n peut s'écrire sous l'une des formes suivantes (où $k \in \mathbb{N}$) :

$n = 3k$ ou bien $n = 3k+1$ ou bien $n = 3k+2$

e. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, C est un multiple de 9.

142 De moins en moins de nombres premiers ?

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle **factorielle** n, notée $n!$, le produit de tous les entiers compris entre n et 1.
Ainsi $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$.
Soit un entier $n \geqslant 2$.
1. Soit un entier k compris entre 2 et n (inclus).
a. Justifier que $n!$ est divisible par k.
b. En déduire que $(n!+k)$ n'est pas premier.
2. Montrer qu'il n'existe aucun entier premier entre $(n!+2)$ et $(n!+n)$.
3. Utiliser le résultat précédent pour donner cinq entiers consécutifs non premiers.
4. Existe-t-il une liste de cent milliards d'entiers consécutifs ne comportant aucun nombre premier ?

Info

Ce résultat semble témoigner de la raréfaction des nombres premiers. Cependant la propriété suivante, démontrée par le russe Tchebychev (1821-1894), tempère cette impression : « Si $n > 3$, alors il existe toujours un nombre premier compris entre n et $2n$. »

143 Irrationalité de $\sqrt{3}$

On souhaite démontrer par l'absurde et par disjonction de cas que le nombre réel $\sqrt{3}$ est irrationnel.
On suppose qu'il existe deux entiers naturels p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.
1. Justifier que $p^2 = 3q^2$.
2. Premier cas : p est pair
a. Étudier la parité de p^2 puis celle de q^2.
b. En déduire la parité de q et conclure dans ce cas.
3. Second cas : p est impair
a. Étudier la parité de p^2 puis celle de q^2.
b. En déduire la parité de q.
c. D'après les questions précédentes, il existe donc deux entiers naturels k et n tels que :

$p = 2k+1$ et $q = 2n+1$.

① On rappelle que : $p^2 = 3q^2$
Montrer alors que l'on a :

$2k^2 + 2k = 6n^2 + 6n + 1$

② Déterminer la parité de $2k^2 + 2k$
③ Déterminer la parité de $6n^2 + 6n + 1$
④ Conclure.
4. En déduire la nature de $\sqrt{3}$.

144 Nombres de Mersenne

On appelle **nombre de Mersenne** les entiers définis par : $M_n = 2^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Calculer les quinze premiers nombres de Mersenne. Parmi eux, lesquels sont premiers ?
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$ et pour tout réel x :

$$x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1\right)$$

3. Soit un entier $n \geqslant 2$.
a. On suppose que n n'est pas premier et on pose : $n = k \times d$, avec k et d entiers compris entre 2 et n.
Montrer que M_n est divisible par $\left(2^d - 1\right)$.
b. En déduire une condition nécessaire pour que M_n soit premier.
4. Cette condition est-elle suffisante ?

Info

Début 2026, on connaît seulement 52 nombres premiers de Mersenne. Le plus grand est $M_{136\,279\,841}$, il s'écrit avec plus de 41 millions de chiffres.



145 Plus grand diviseur commun

Soit N_k un entier naturel de la forme $k(k+1)(2k+2\,026)$, où k est un entier naturel non nul.
On cherche à déterminer le plus grand entier naturel qui divise tous les entiers N_k lorsque k varie dans $\mathbb{N}^*$.
1. a. Donner la liste des diviseurs de N_k pour $k = 1$, $k = 2$ puis $k = 3$.
b. Quel est le plus grand diviseur commun aux nombres N_1, N_2 et N_3 ?
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul k, 4 est un diviseur de N_k.
3. En remarquant que $k + 1013 = (k+2) + 1011$, démontrer que N_k est toujours un multiple de 3.
4. Conclure.

Aide

Dans GeoGebra, la commande ListeDiviseurs(n) donne la liste de tous les diviseurs de n.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

146 Interpréter des données en arithmétique

Dans l'ensemble de cet exercice, n désigne un entier naturel

1. Associer chaque expression à sa traduction par une égalité mathématique.

Expression	Traduction
① L'entier n est un diviseur de 25.	ⓐ Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 25k + 1$.
② L'entier n est multiple de 25.	ⓑ Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $25 = k \times n$.
③ L'entier n a pour reste 1 dans la division euclidienne par 25.	ⓒ Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
④ L'entier n est impair.	ⓓ Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 25k$.

2. On veut montrer que, si n est multiple de 5, alors n^2 est multiple de 25. Compléter la démonstration suivante :
On suppose que n est multiple de 5, alors ….
Donc on peut écrire $n^2 = (\ldots)^2 = \ldots$ donc ….

3. Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 5 est 1, alors le reste de la division euclidienne de n^2 par 5 est également 1.

147 Choisir le bon connecteur logique

a, b et n désignent des entiers naturels.
Compléter les phrases suivantes avec le connecteur logique approprié parmi : « donc », « car », « si et seulement si ».

1. n est multiple de 25 … n est multiple de 5.
2. 10 divise N … 5 divise N.
3. $a \times b$ est pair … a est pair.
4. n est impair … n^2 est impair.
5. 2 et 5 sont des diviseurs de n … 20 est un diviseur de n.
6. n est multiple de 3 … n^2 est multiple de 9.

148 Critères de divisibilité par 4 et par 25

On considère un entier relatif N.
On effectue la division euclidienne de N par 100 : $N = 100 \times q + r$, avec q et r entiers relatifs tels que $0 \leqslant r < 100$.

1. Justifier que r est l'entier à deux chiffres qui s'écrit avec le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de N.
2. Démontrer que N est divisible par 4 si, et seulement si, r est divisible par 4
3. Démontrer un critère sur r permettant d'affirmer que N est divisible par 25.

Aller plus loin

149 PRISE D'INITIATIVES Compétence Calculer

Encore la conjecture de Goldbach !

En 1742, Christian Goldbach écrit, dans une lettre adressée à Leonhard Euler, que tout entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.
Vérifier que la conjecture de Goldbach est vraie pour tous les entiers pairs compris entre 50 et 80 (inclus).

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2018

Info

La conjecture de Goldbach est l'un des célèbres résultats non encore démontrés début 2026. En 2014, elle avait été vérifiée numériquement pour tous les entiers pairs inférieurs à 4×10^{18}. Source de nombreuses recherches mathématiques, elle inspire également le monde de la littérature, comme Denis Guedj dans *le Théorème du perroquet* et celui du cinéma avec le film *Le Théorème de Marguerite*.

150 Équations avec des entiers

On cherche à déterminer les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (E).

1. Soient x et y deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$(x-2)(y-2) = 4$$

2. En déduire la résolution de l'équation (E).

151 Ensemble des nombres premiers

Dans cet exercice, on démontre que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Pour cela, on raisonne **par l'absurde** en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini N de nombres premiers distincts, que l'on note alors $p_1, p_2, \ldots p_N$.
On pose $K = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_N + 1$.

1. Justifier que pour tout entier i entre 1 et N, le nombre premier p_i n'est pas un diviseur de K.
2. Le nombre K admet-il un diviseur premier ?
3. Conclure.

Info

Le fait qu'il existe une infinité de nombres premiers est connu depuis longtemps, puisqu'il est déjà démontré dans la proposition 20 du Livre IX des *Éléments* d'Euclide (III^e siècle av. J.-C.).

152 PRISE D'INITIATIVES

Par définition, les nombres premiers admettent exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$.
Quel est l'ensemble des entiers naturels admettant exactement trois diviseurs dans $\mathbb{N}$?

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2019

SPECIMEN

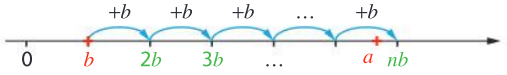
Multiples et diviseurs d'entiers naturels

Objectif PYTHON
Manipuler des fonctions, des boucles Tant que et l'instruction Si.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$.
Le but de ce TP est de résoudre les problèmes suivants, sans utiliser de multiplication, ni de division.
① Déterminer si a est un multiple de b.
② Déterminer le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a.

Partie A Résolution du problème ①

L'idée consiste à calculer les multiples successifs de l'entier b : b, $2b$, $3b$, etc., et de tester leur égalité éventuelle avec l'entier a.



1. On considère la fonction test_multiple suivante.

Langage naturel

```
Fonction test_multiple(a,b)
    N ← b
    Tant que N < a Faire
        N ← N + b
    Fin Tant que
    Si N = a Alors
        Afficher (« a est un multiple de b »)
    Sinon
        Afficher (« a n'est pas un multiple de b »)
    Fin Si
Fin Fonction
```

Exécuter, à la main, la fonction test_multiple pour $a = 50$ et $b = 10$, puis pour $a = 50$ et $b = 11$.

2. Justifier que la fonction test_multiple permet de résoudre le problème ①.

3. Programmer cette fonction et préciser si 1 302 est un diviseur de 29 946.

```
def test_multiple(a,b):
    N=b
    while N<a:
        N=N+b
    if N==a:
        print("a est un multiple de b")
    else:
        print("a n'est pas un multiple de b")
```

4. Que faut-il modifier dans la fonction test_multiple pour qu'elle renvoie le quotient de a par b dans le cas où a est un multiple de b ?
Vérifier en programmant en Python.

Partie B Résolution du problème ②

1. On choisit $a = 100$ et $b = 13$.
a. Calculer les multiples de l'entier b : b, $2b$, $3b$, $4b$, … jusqu'à avoir dépassé l'entier a.
b. Quel est le plus grand multiple de l'entier b qui est inférieur ou égal à l'entier a ?

2. Reprendre la question **1.** avec $a = 255$ et $b = 15$, puis avec $a = 645$ et $b = 71$.

3. En s'inspirant de la fonction test_multiple et du schéma donné en Partie A, construire une fonction multiple_inférieur qui prend en argument deux entiers naturels a et b tels que $a > b$ et qui renvoie le plus grand multiple de b qui est inférieur ou égal à a.

4. Programmer en Python la fonction multiple_inférieur, puis vérifier les résultats obtenus aux questions **1.** et **2.**

5. En modifiant la fonction multiple_inférieur, programmer une fonction nombre_multiples qui prend en argument deux entiers naturels a et b tels que $a > b$ et qui renvoie le nombre de multiples positifs de b qui sont inférieurs ou égaux à a. La tester.

Partie C Application : division euclidienne de a par b

On rappelle que la **division euclidienne de a par b** est l'écriture unique $a = b \times q + r$ où q et r sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant r < b$.
q est le **quotient** et r est le **reste** dans la division euclidienne de a par b.

1. Justifier que $b \times q$ est le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a.

2. En s'inspirant des fonctions créées précédemment, programmer une fonction Division_Euclidienne qui prend en argument deux entiers naturels a et b tels que $a > b$ et qui renvoie le quotient q et le reste r dans la division euclidienne de a par b. La tester.

Info
Le nom de « division euclidienne » est un hommage rendu à Euclide, qui en a expliqué le principe dans ses *Éléments* au III^e siècle av. J.-C., par soustractions successives.
Mais celui-ci était connu bien avant, en Égypte, chez les Babyloniens, ou en Chine.

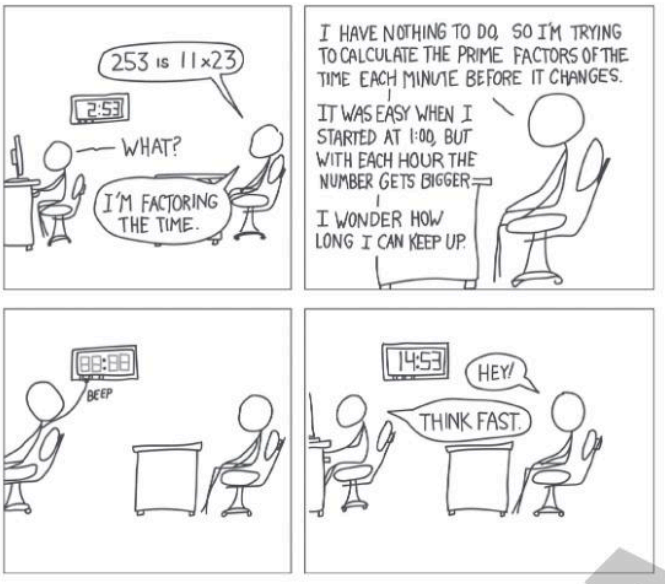
SPECIMEN

TP Mener une recherche

TABLEUR

Compétence Chercher et communiquer

La minute Factorisation



Objectif

- Exploiter la notion de nombre premier et de décompositions en produit de facteurs premiers.
- Exploiter les fonctionnalités d'un tableur gérant le calcul formel

Ce TP s'appuie sur une mini bande dessinée humoristique (du site xkcd.com) dans laquelle un personnage désœuvré s'amuse, chaque minute, à transformer l'heure affichée par une horloge digitale en un nombre qu'il factorise en produit de facteurs premiers…

Partie A Comprendre le gag

1. Lire et comprendre ce gag. Rire discrètement.
2. Décomposer 1 453 comme produit de facteurs premiers. Rire franchement avec votre professeur de mathématiques.

Partie B Créer un gag

L'objectif de cette partie est de répondre à la question : ce gag fonctionne-t-il avec d'autres affichages d'heure ?
Dans le format anglo-saxon, les heures vont de 00:00 am jusqu'à 11:59 am le matin, et de 12:00 pm jusqu'à 11:59 pm l'après-midi.
1. Donner le nombre d'entiers compris entre 100 (une heure de l'après-midi) et 1 159 (11 h 59 du soir) qui peuvent représenter un affichage d'heure (par exemple 175 ne représente pas un affichage possible).
2. Entre 00:00 et 12:59, les affichages dans les deux modes sont identiques. Quelle opération permet de passer du mode anglo-saxon au mode 24 h entre 13:00 et 23:59 ? En déduire que, quelle que soit l'heure, la parité du nombre affiché est identique dans les deux modes.
3. Expliquer pourquoi on peut réduire les recherches aux affichages d'entiers impairs.
4. Expliquer pourquoi le gag ne fonctionne pas pour les affichages finissant par 5.
5. Montrer qu'il existe exactement deux horaires entre 1 h et 2 h de l'après-midi pour lesquels le gag fonctionne, l'heure affichée en mode anglo-saxon ne donnant pas un nombre premier alors qu'en mode 24 h l'affichage donne un nombre premier.

Partie C Tableur

Dans cette partie, on utilise un tableur permettant de faire du calcul formel pour vérifier le résultat obtenu dans la question **5. partie B**, puis pour déterminer tous les horaires de la journée pour lesquels le gag fonctionne.
1. Préparer la feuille de calcul en mettant des titres aux colonnes et en écrivant 101 dans la cellule A2.

	A	B	C	D
1	heure anglo	est premier	heure 24	est premier
2	101	true	?	?
3	103	true	?	?

2. Écrire une formule dans la cellule A3 qu'il suffira de copier « vers le bas » afin d'obtenir tous les entiers impairs compris entre 101 et 159.
3. Écrire les formules suivantes :

- cellule B2 : `=EstPremier(A2)`
- cellule C2 : `=Si(B2==«false», A2 + 1200)`
- cellule D2 : `=EstPremier(C2)`

4. Expliquer ce que fait la formule de la cellule C2.
5. Copier-coller ces formules « vers le bas » et retrouver les résultats de la partie précédente.
6. Modifier uniquement le nombre représentant l'affichage de l'heure dans la cellule A2 afin de déterminer tous les affichages permettant de réaliser ce gag.

Info

L'idéal est d'utiliser le tableur de Geogebra, et sinon le logiciel Xcas ou LibreOffice avec l'extension CmathOooCas.

SPÉCIMEN

CHAPITRE

3 Calcul littéral Équations

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Développer ou factoriser une expression algébrique
- CAPACITÉ 2 Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème, exprimer l'ensemble des solutions
- CAPACITÉ 3 Effectuer des calculs littéraux mettant en jeu des écritures fractionnaires
- CAPACITÉ 4 Exprimer une variable en fonction d'une autre



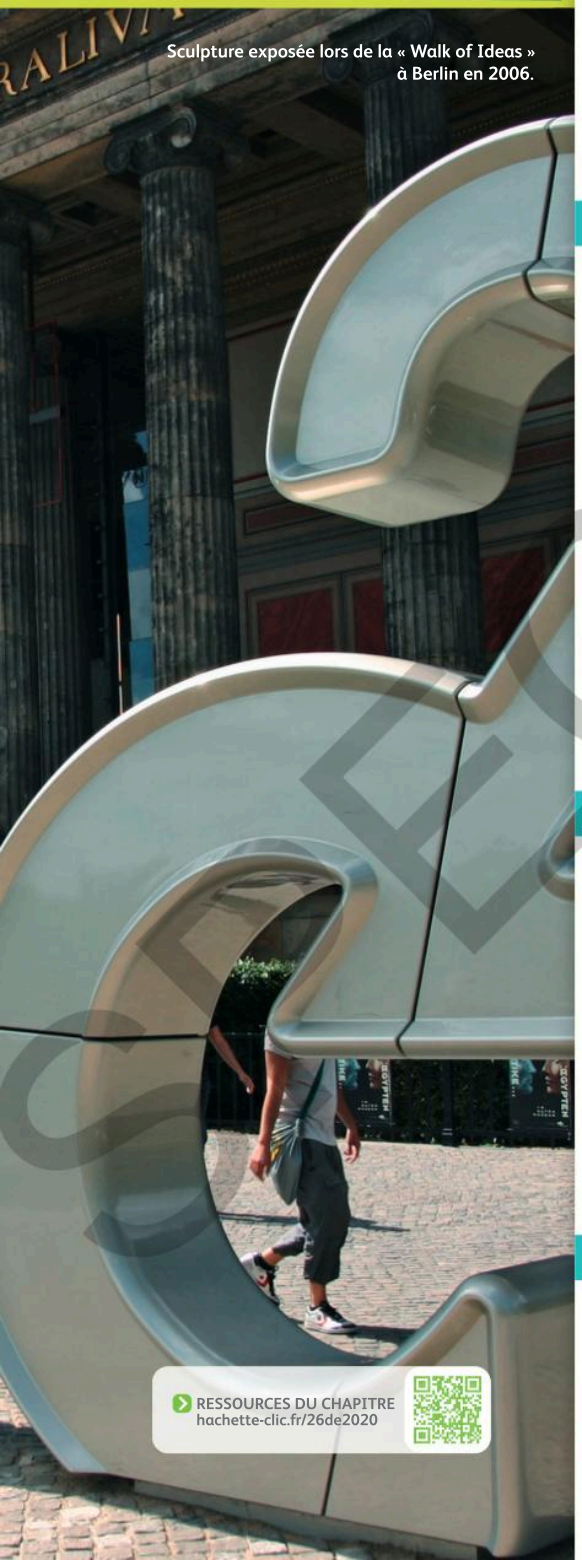
Au fil du temps

La résolution des équations est le premier objectif que se fixe l'*algèbre*. Elle remonte aux temps les plus anciens de l'histoire de l'humanité, puisque dès 2 000 ans avant J.-C., Babyloniens, Égyptiens et Chinois développèrent des méthodes pour résoudre des équations. Une avancée décisive est due au savant perse Al-Khwarizmi, au IX^{e} siècle, qui a jeté les bases des méthodes algébriques de résolution des équations. Elles n'ont pas cessé d'être améliorées et affinées, même si aujourd'hui encore, de très nombreuses équations d'apparence simple ne peuvent être résolues par des méthodes exactes.

CORRIGÉ

Des maths partout !

« L'équation » $e = mc^2$ est sans doute la plus connue du grand public. En physique, elle est nommée « relation d'Einstein » et identifie l'énergie de masse e comme le produit de la masse m par le carré de la vitesse de la lumière notée c. Attribuée à Einstein en 1905 dans le cadre de sa théorie de la « relativité restreinte », elle a été en fait « approchée » par plusieurs savants au début du XX^{e} siècle, dont le français Henri Poincaré.



Sculpture exposée lors de la « Walk of Ideas » à Berlin en 2006.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2020

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

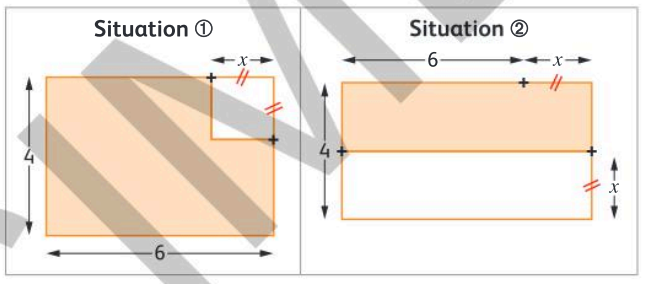
B Vrai ou faux ?

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier.

1. Pour tout nombre réel x, $-(3x-8) = -3x-8$.
2. Pour tout nombre réel x, $-6(2x-1) = -12x+6$.
3. Pour tout nombre réel x, $2x-(3x-2) = -5x+2$.
4. Pour tout nombre réel x, $(5x-1)(x+4) = 5x^2+19x-4$.
5. Le nombre -2 est solution de l'équation $x^2+2 = -3x$.
6. L'unique solution de l'équation $-3x = 2$ est $-0{,}66$.
7. L'expression factorisée de $6x^2-3$ est $3(2x^2)$.

C Géométrie et calcul littéral

Les quadrilatères représentés ci-dessous sont des rectangles.



Pour chaque situation, associer, parmi les expressions suivantes, celles qui représentent l'aire colorée.

1. $-x^2-2x+24$
2. $x(4-x)-6(x-4)$
3. $24-x^2$
4. $4(6-x)+x(4-x)$
5. $(x+6)(4-x)$
6. $(6-x)(4-x)-(2x^2-10x)$

D Résoudre un problème à l'aide d'un calcul littéral

La facture d'eau d'un jardinier s'élève à 545 € par an. Il prévoit d'économiser 55 € d'eau par an en installant un récupérateur d'eau de pluie. Le récupérateur a coûté 168 € à l'achat et va nécessiter chaque année 13 € pour l'entretien (nettoyage, tuyaux…). Le jardinier souhaite savoir au bout de combien de temps l'installation du récupérateur sera remboursée.

1. Au bout de deux ans, sera-t-elle remboursée ?
2. On note x le nombre d'années passées depuis l'installation du récupérateur. Montrer que le problème revient à résoudre l'équation : $168 = 42x$.
3. En déduire la solution du problème.

E Différence de deux carrés

1. Si a et b sont deux nombres réels quelconques, rappeler la forme factorisée de l'expression a^2-b^2.
2. Utiliser cette « identité remarquable » pour déterminer les formes factorisées des expressions suivantes.

a. x^2-16 b. $4x^2-9$ c. $(3x+1)^2-(x+2)^2$

SPECIMEN

automatismes

Automatismes transversaux

Pour les exercices **1** *à* **5**, *effectuer les calculs mentalement.*

1 On donne les nombres suivants :

50	25	3	4

En utilisant tout ou une partie de ces nombres, donner un calcul valant :

1. 203 **2.** 10 **3.** 137

2 Effectuer les calculs suivants.

1. $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$ **2.** $4\times\frac{5}{2}$ **3.** $524\times\frac{1}{2}$

3 Simplifier la fraction $\frac{30}{14}$.

4 Calculer $\frac{3^2\times 2^3}{6}$.

5 Convertir 12,5 cm^2 en mm^2.

Pour les exercices **6** *et* **7**, *effectuer les calculs sans calculatrice.*

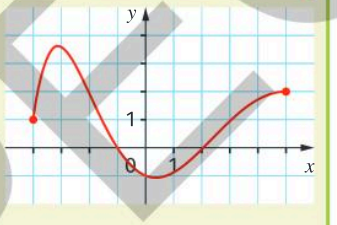
6 Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$.

1. $\sqrt{18}-3\sqrt{2}$ **2.** $\sqrt{300}-3\sqrt{12}$

7 Donner le résultat sous la forme irréductible.

1. $\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}-\frac{1}{10}$ **2.** $\dfrac{\frac{1}{3}-5}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$

8 On donne ci-contre la courbe d'une fonction f. Par lecture graphique, déterminer :



1. les images $f(-2)$ et $f(5)$;

2. les solutions de l'équation :

a. $f(x)=0$ sur $[-4;5]$ **b.** $f(x)=1$ sur $[2;5]$

9 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=5$ cm et $BC=9$ cm. Donner la valeur exacte de AC et l'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers.

10 Assembler correctement les instructions suivantes pour que l'algorithme construise un rectangle de 20 cm^2.

① Tracer un segment de 5 cm
② Répéter 2 fois
③ Tourner le stylo de 90°
④ Tracer un segment de 4 cm

Une même instruction peut être répétée plusieurs fois.

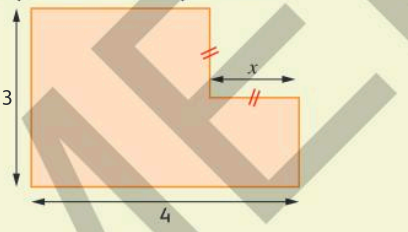
Automatismes préparatoires au chapitre

Pour les exercices **11** *à* **13**, *effectuer les calculs mentalement.*

11 En utilisant la distributivité, calculer les produits suivants.

1. 14×7 **2.** 85×6 **3.** 213×8

12 Exprimer en fonction de x l'aire de la figure ci-dessous. Même question avec le périmètre.



13 La valeur -2 est-elle solution de l'équation $-3x^2-5x+2=0$?

Pour les exercices **14** *à* **21**, *effectuer les calculs sans calculatrice.*

14 Développer, réduire et ordonner les expressions littérales suivantes.

1. $4x-3+(x-7)$ **2.** $(x-4)(2x+3)-2x^2$

15 Développer, réduire et ordonner les expressions littérales suivantes.

1. $x(2x-1)-3x^2$ **2.** $(7x-8)(5-8x)-2x^2$

16 Factoriser les expressions suivantes.

1. $5x^2-10x$ **2.** $2(x-4)+(x-4)(8-3x)$

17 Factoriser l'expression suivante :

$(x-5)(3x+4)+(x-5)(8-3x)+2(x-5)$

18 On considère l'expression :

$A(x)=(3x-7)(2x+5)-(2x+5)(x-3)$

1. Développer $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

19 Montrer que, pour tout réel $x\neq 2$:

$$\frac{4}{x-2}+3=\frac{3x-2}{x-2}$$

20 Résoudre les équations suivantes.

1. $6x-5=11$ **2.** $7x+8=5x-2$

21 Résoudre les équations suivantes.

1. $3x(5x-10)=0$ **2.** $3(9-x)(2x+1)=0$

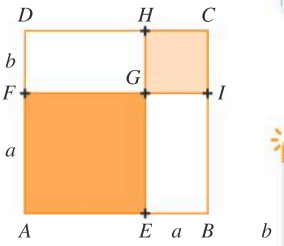
SPECIMEN

activités

1 Vous avez dit remarquable ?

Objectif
(Re)découvrir les identités remarquables et les mettre en œuvre.

1 Dans la figure ci-contre, tous les quadrilatères représentés sont des rectangles.
On pose $AE = AF = a$ et $EB = DF = b$.



a. En exprimant l'aire du carré $ABCD$ de deux manières différentes, justifier l'identité :
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
b. En remarquant que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$, retrouver l'identité précédente en utilisant la formule de double-distributivité.

Info
L'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est vraie pour **toute** valeur de a et b : on dit que cette égalité est une **identité**.

2 En utilisant le calcul littéral, démontrer les identités suivantes.
a. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **b.** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Info
Les trois identités :
① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
sont appelées **identités remarquables**.

3 On considère les expressions suivantes.
$A = (x-7)(x+7)$ $B = x^2 - 14x + 49$ $C = 4x^2 + 28x + 49$
$D = (2x+7)^2$ $E = x^2 - 49$ $F = (x-7)^2$
a. Parmi ces expressions, repérer celles qui sont écrites sous une forme développée et celles qui sont écrites sous une forme factorisée.
b. Quelles sont les expressions égales ? Justifier.

4 **a.** En utilisant les identités remarquables, développer et réduire :
$$(x+1)^2 - (x-1)^2$$
b. En déduire la valeur de $100\,000\,001^2 - 99\,999\,999^2$.

2 Modéliser un problème par une équation

Objectif
Mettre un problème en équation.



On propose les quatre problèmes suivants.
① La somme de trois entiers consécutifs est égale au double du troisième. Quels sont ces entiers ?
② Déterminer tous les triangles rectangles dont les mesures des côtés sont trois entiers consécutifs.
③ Après une augmentation de 5 %, un article coûte 27 €. Quel était son prix initial ?
④ Une boutique de souvenirs propose deux modèles, A et B, de porte-clés. Le modèle A coûte 2 € de plus que le modèle B. Julie achète trois porte-clés A et quatre porte-clés B pour une somme de 27 €. Quel est le prix de chaque type de porte-clés ?

1 Associer à chaque problème l'équation correspondante, parmi celles proposées ci-dessous, en précisant ce que représente l'inconnue x dans le cadre du problème.
a. $x + (x+1) + (x+2) = 2x + 4$ **b.** $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$
c. $x + \dfrac{5}{100} = 27$ **d.** $3x + 2 + 4x = 27$
e. $(x-1) + x = x + 1$ **f.** $3(x+2) + 4x = 27$
g. $1{,}05x = 27$ **h.** $(x-1) + x + (x+1) = 2x$
i. $4(x+2) + 3x = 27$ **j.** $x - \dfrac{5}{100}x = 27$

2 Résoudre les équations choisies, puis les problèmes posés.

SPECIMEN

Cours

1 Manipulations algébriques

a Différentes formes d'une expression algébrique

On utilise les lettres pour désigner une grandeur qui varie (on parle alors de variable) ou une grandeur inconnue. Le calcul littéral permet de transformer une expression algébrique pour résoudre des problèmes (étudier l'évolution d'une quantité dépendant d'une variable, chercher la ou les valeurs d'une inconnue, démontrer une propriété…).
Une expression algébrique peut s'écrire sous différentes formes :

Forme développée (somme algébrique de *termes*)	**Forme factorisée** (produit ou quotient de *facteurs*)
Exemples	**Exemples**
$2x^2-11x+12$	$(x-4)(2x-3)$
Pour tout réel $x \neq 1$: $2-\dfrac{3}{x-1}$.	Pour tout réel $x \neq 1$: $\dfrac{2x-5}{x-1}$.

Définition On appelle **identité** une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs données aux différentes lettres qui interviennent.

Exemple
L'expression $A=(2x)^2-2x(x+1)$ est une somme algébrique.
Sa forme **développée** est :
$A=4x^2-2x^2-2x=2x^2-2x$
Sa forme **factorisée** est :
$A=2x(x-1)$

Exemple
L'expression A s'écrit ainsi :
$A=2x^2-2x=2x(x-1)$
Ces égalités sont valables pour **toute** valeur de x, ce sont des **identités**.

b Formules de distributivité

Propriété Pour tous nombres a, b, c, d et k, on a les identités suivantes.

→ on développe

① $k(a+b)=ka+kb$
② $k(a-b)=ka-kb$
③ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

on factorise ←

Exemples

$B=2x(3x-5)-(3x^2-1)$
$=6x^2-10x-3x^2+1$
$=3x^2-10x+1$

$C=2x^2-(-2x+2)(4-x)$
$=2x^2-\left[-8x+2x^2+8-2x\right]$
$=2x^2-\left[2x^2-10x+8\right]$
$=2x^2-2x^2+10x-8$
$=10x-8$

c Identités remarquables

Propriété Pour tous nombres a et b, on a les identités suivantes.

→ on développe

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

on factorise ←

Voir Démo activité 1

Exemples

- $(3x+4)^2=(3x)^2+2\times3x\times4+4^2$
  $=9x^2+24x+16$
- $(5x-1)(5x+1)=(5x)^2-1^2$
  $=25x^2-1$
- $(3-2x)^2$
  $=3^2-2\times3\times2x+(2x)^2$
  $=9-12x+4x^2$
  $=4x^2-12x+9$

d Techniques de factorisation

Pour factoriser une expression algébrique, on utilise essentiellement deux techniques :

- en repérant un **facteur commun**

Exemple

$(3-x)(5x+4)-2(3-x)(2x+1)=(3-x)\left[(5x+4)-2(2x+1)\right]$
$=(3-x)(5x+4-4x-2)=(3-x)(x+2)$

- en reconnaissant une **identité remarquable**

Exemples

$49x^2-28x+4$	$36x^2-100$
$=(7x)^2-2\times7x\times2+2^2$	$=(6x)^2-10^2$
$=(7x-2)^2$	$=(6x-10)(6x+10)$

Remarque
Pour factoriser une expression, il peut être parfois nécessaire de combiner ces deux techniques pour faire apparaître un facteur commun.

Exemple

$x(3x+6)+x^2-4$
$=x\times3(x+2)+(x+2)(x-2)$
$=3x(x+2)+(x+2)(x-2)$
$=(x+2)(4x-2)$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Développer ou factoriser une expression algébrique

Énoncé

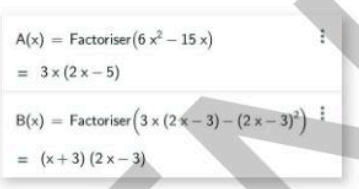
1. Développer et ordonner les expressions suivantes.

a. $6x(3-2x)$ **b.** $(x-3)(3x+4)$

2. On considère les expressions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$A(x)=6x^2-15x$ et $B(x)=3x(2x-3)-(2x-3)^2$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les factorisations ci-contre. Valider les résultats ainsi obtenus.



3. Développer les expressions suivantes lorsque c'est possible, sinon les factoriser.

a. $(7x-4)^2$ **b.** $25x^2+20x+4$ **c.** $(6x-8)(6x+8)$

Solution rédigée

1. a. $6x(3-2x)=6x\times3-6x\times2x=18x-12x^2=-12x^2+18x$

b. $(x-3)(3x+4)=x\times3x+x\times4-3\times3x-3\times4$

$=3x^2+4x-9x-12=3x^2-5x-12$

2. Grâce au logiciel, on connaît les plus grands facteurs communs. Pour $A(x)$, le facteur commun est $3x$. On le fait apparaître dans l'expression.

$A(x)=6x^2-15x=3x\times2x-3x\times5=3x\times(2x-5)$

Pour $B(x)$, le facteur commun est $(2x-3)$. On a alors :

$B(x)=3x(2x-3)-(2x-3)^2=3x(2x-3)-(2x-3)(2x-3)$

$=(2x-3)(3x-(2x-3))=(2x-3)(x+3)$

On retrouve bien les expressions données par le logiciel.

3. a. L'expression est déjà factorisée, on va la développer. On reconnaît ici l'identité remarquable ② : $(a-b)^2$ avec $a=7x$ et $b=4$.

Donc $(7x-4)^2=(7x)^2-2\times7x\times4+4^2=49x^2-56x+16$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

b. L'expression est déjà développée, on va la factoriser. On reconnaît ici l'identité remarquable ① : $a^2+2ab+b^2$ avec $a=5x$, $b=2$ et $2ab=20x$.

Donc $25x^2+20x+4=(5x)^2+2\times5x\times2+2^2=(5x+2)^2$.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

c. L'expression est déjà factorisée, on va la développer. On reconnaît ici l'identité remarquable ③ : $(a-b)(a+b)$ avec $a=6x$ et $b=8$.

Donc $(6x-8)(6x+8)=(6x)^2-8^2=36x^2-64$.

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Point méthode

1. et **2.** Quand on développe ou factorise, il faut faire attention à reporter correctement les signes « − ».

Point méthode

3. Pour repérer une identité remarquable, on peut compter les termes : a-t-on une différence de deux carrés ou une somme du type $a^2\pm2ab+b^2$? Il faut ensuite identifier les valeurs de a et b.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 379 Voir exercices similaires nos 41 à 55

22 Développer les expressions suivantes.

1. $2(x+3)$ **2.** $3x^2(2-x)$

3. $(3x-4)(1+2x)$ **4.** $(2x+1)(x-3)$

23 Factoriser les expressions suivantes.

1. $8x+6$ **2.** $6t^2+12t$

3. $4x(3-2x)+(3-2x)(x+1)$

4. $5(x-1)-3x(x-1)$

24 Compléter les égalités suivantes à l'aide des identités remarquables.

1. $(x-\ldots)(x+\ldots)=\ldots-25$

2. $(\ldots+4)^2=t^2+8t+\ldots$

3. $(3x-\ldots)^2=\ldots-\ldots+1$

4. $(\ldots+9)^2=4x^2+\ldots+\ldots$

5. $9x^2+\ldots x+\ldots=(\ldots+5)^2$

6. $16x^2-\ldots=(\ldots-7)(\ldots+7)$

SPÉCIMEN

Cours

2 Résolution algébrique d'équations

a Équations équivalentes et opérations

Définition

• Une **équation d'inconnue** x est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu x.

Résoudre dans un ensemble E une telle équation, c'est déterminer **toutes** les valeurs de x appartenant à E qui rendent l'égalité vraie.

Ces valeurs sont les **solutions dans E** de l'équation.

• On dit que deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Exemple

• L'équation $x^2+x-2=0\,(E)$ admet 1 et -2 comme solutions dans $\mathbb{R}$. En effet :

$1^2+1-2=2-2=0$ et

$(-2)^2+(-2)-2=0$

L'équation $2x+3=-x+6\,(E')$ admet 1 comme unique solution. Ainsi, les équations (E) et (E') ne sont pas équivalentes.

• L'équation (E') est équivalente à l'équation :

$2x+3-3=-x+6-3$ soit

$2x=-x+3$

On note alors :

$2x+3=-x+6 \Leftrightarrow 2x=-x+3$

Le symbole $\Leftrightarrow$ signifiant que les deux équations sont équivalentes.

Propriété Les manipulations algébriques suivantes transforment une équation en une équation équivalente.

① Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une équation.

② Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une équation par un même nombre **non nul**.

③ Développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

b Application : équations du premier degré

Pour résoudre une équation du 1er degré, on isole l'inconnue dans un membre de l'égalité en utilisant les propriétés d'équivalences.

Exemple

$2x+3=-x+6 \Leftrightarrow 2x=-x+3$

$\Leftrightarrow 2x+x=-x+3+x \Leftrightarrow 3x=3$

$\Leftrightarrow \frac{3}{3}x=\frac{3}{3} \Leftrightarrow x=1$

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est $S=\{1\}$.

c Équations se ramenant au premier degré

La résolution de certaines équations se ramène parfois à celle d'équations du premier degré.

Pour cela, on peut regrouper tous les termes dans le même membre et tenter de factoriser ce membre.

On est ramené à résoudre des équations du type **équation produit nul** ou **équation quotient nul**.

On exploite alors les propriétés suivantes.

Propriétés ① **Règle du produit nul** : un produit de deux nombres réels est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Autrement dit, on a l'équivalence :

$$A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ ou } B(x)=0$$

② **Règle du quotient nul** : un quotient de deux nombres réels est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

Autrement dit, on a l'équivalence :

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ et } B(x)\neq 0$$

Les valeurs de x qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites** du quotient.

Exemple

• L'équation $(3x+1)(x-1)=0$ est équivalente à :

$3x+1=0$ ou $x-1=0$

$\Leftrightarrow 3x=-1$ ou $x=1$

Cette équation admet $-\frac{1}{3}$ et 1 comme uniques solutions.

• L'équation $\frac{5x-1}{x+1}=0$ admet pour valeur interdite -1. Elle est équivalente à :

$5x-1=0$ et $x\neq -1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$ et $x\neq -1$

$\frac{1}{5}$, différent de -1, est donc l'unique solution de l'équation.

• Pour tout réel $x\notin\{3;-1\}$, les équations $\frac{x}{x-3}=\frac{x-2}{x+1}$ et $x(x+1)=(x-2)(x-3)$ sont équivalentes. Ces équations admettent 1 comme unique solution.

Remarque

Pour résoudre des équations s'écrivant sous la forme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ avec a, b, c et d réels tels que b et d sont **non nuls**, on peut exploiter le **produit en croix** :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si et seulement si } a\times d=b\times c$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème , exprimer l'ensemble des solutions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(4x+1)^2-9$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
1. Déterminer, pour tout réel x, la forme développée puis une forme factorisée de $f(x)$.
2. Pour chacune des questions suivantes, indiquer puis utiliser la forme la plus adaptée pour y répondre.
a. Déterminer l'image de 0 par la fonction f.
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Solution rédigée

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=(4x)^2+2\times4x\times1+1^2-9=16x^2+8x-8$ et

$$\begin{aligned}f(x)&=(4x+1)^2-3^2\\&=((4x+1)-3)((4x+1)+3)\\&=(4x-2)(4x+4)\\&=2(2x-1)\times4(x+1)\\&=8(2x-1)(x+1)\end{aligned}$$

2. a. La forme la plus adaptée ici est la forme développée.
On a immédiatement $f(0)=16\times0^2+8\times0-8=-8$.
b. Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les antécédents de 0 par f. Autrement dit, on est ramené à résoudre l'équation $f(x)=0$.
La forme la plus adaptée pour résoudre cette équation est la forme factorisée car elle permet de se ramener à la résolution d'une équation produit :

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\Leftrightarrow 8(2x-1)(x+1)=0\\&\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ ou } x+1=0\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-1\end{aligned}$$

$$S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$$

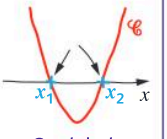
Ainsi, la courbe coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2};0\right) \text{ et } (-1;0)$$

Point méthode
1. On obtient alors trois écritures du nombre $f(x)$ valables pour tout réel x : la forme initiale, la forme développée et la forme factorisée.

Point méthode
2. a. La forme développée convient particulièrement pour calculer l'image d'un nombre par une fonction.

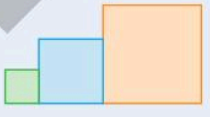
Point méthode
2. b. Il peut être judicieux de raisonner sur une esquisse (même erronée) pour reformuler la question dans un cadre algébrique. On doit donc résoudre l'équation : $f(x)=0$.



J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 379 Voir exercices similaires nos 56 à 59

25 On colle trois carrés dont les longueurs des côtés sont trois entiers consécutifs.



1. On note n la longueur du côté du plus petit carré. Exprimer en fonction de n les deux autres longueurs puis l'aire de la figure totale sous forme développée.
2. Répondre aux mêmes questions mais en notant n la longueur du côté du deuxième carré.
3. Répondre aux mêmes questions mais en notant n la longueur du côté du troisième carré.
4. On cherche à savoir s'il existe trois carrés ayant comme longueurs trois entiers consécutifs dont l'aire de la figure totale est égale à 245.
a. Laquelle des trois aires trouvées précédemment semble la plus adaptée pour répondre à la question posée ?
b. Répondre à la question.

26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(3x-2)^2-49$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
1. Déterminer, pour tout réel x, la forme développée puis une forme factorisée de $f(x)$.
2. Pour chacune des questions suivantes, indiquer puis utiliser la forme la plus adaptée pour y répondre.
a. Déterminer l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction f.
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
d. Le point $A(4;51)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}$?
e. Déterminer les abscisses des points d'ordonnées 15 de la courbe $\mathscr{C}$.

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Effectuer des calculs littéraux mettant en jeu des écritures fractionnaires

Énoncé

1. Écrire sous la forme d'un unique quotient les sommes algébriques suivantes en précisant les éventuelles valeurs interdites.

a. $\dfrac{5}{2a^2}+\dfrac{3}{a}$ **b.** $\dfrac{5}{2x+4}-\dfrac{3x+1}{x-1}$

2. On considère, pour tout réel $x\neq 2$, le nombre $f(x)=\dfrac{14}{x-2}+6x+8$.

a. Justifier que, pour tout réel $x\neq 2$, on a $f(x)=\dfrac{(2x-2)(3x+1)}{x-2}$.

b. Résoudre l'équation $f(x)=0$ (E).

Solution rédigée

1. a. Les dénominateurs $2a^2$ et a s'annulent pour $a=0$. Ainsi, 0 est l'unique valeur interdite de ces quotients et, pour tout réel $a\neq 0$, on a :

$$\frac{5}{2a^2}+\frac{3}{a}=\frac{5}{2a^2}+\frac{3\times 2a}{a\times 2a}=\frac{5}{2a^2}+\frac{6a}{2a^2}=\frac{6a+5}{2a^2}$$

b. Les dénominateurs $2x+4$ et $x-1$ s'annulent respectivement en -2 et 1. Donc -2 et 1 sont les valeurs interdites. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$:

$$\frac{5}{2x+4}-\frac{3x+1}{x-1}=\frac{5(x-1)}{(2x+4)(x-1)}-\frac{(3x+1)(2x+4)}{(x-1)(2x+4)}$$
$$=\frac{(5x-5)-(6x^2+14x+4)}{(x-1)(2x+4)}=\frac{-6x^2-9x-9}{(x-1)(2x+4)}$$

2. a. Pour démontrer cette identité, on calcule séparément, pour tout réel $x\neq 2$, chacun des deux membres. D'une part, on a :

$$f(x)=\frac{14}{x-2}+6x+8=\frac{14}{x-2}+\frac{(6x+8)(x-2)}{x-2}=\frac{6x^2-4x-2}{x-2}$$

Et d'autre part, $\dfrac{(2x-2)(3x+1)}{x-2}=\dfrac{6x^2+2x-6x-2}{x-2}=\dfrac{6x^2-4x-2}{x-2}=f(x)$.

b. L'équation $f(x)=0$ est une équation quotient nul. On note (E) cette équation dans la suite. On a les équivalences suivantes :

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{(2x-2)(3x+1)}{x-2}=0\Leftrightarrow(2x-2)(3x+1)=0 \text{ et } x-2\neq 0$$

Or, par la règle du produit nul, $(2x-2)(3x+1)=0\Leftrightarrow 2x-2=0$ ou $3x+1=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$. On a : $1\neq 2$ et $-\dfrac{1}{3}\neq 2$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S=\left\{1;-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Point méthode

1. Les valeurs interdites sont celles qui annulent un dénominateur.
Pour additionner ou soustraire deux quotients, on les réduit au même dénominateur, par exemple le produit des dénominateurs.

Point méthode

2. a. Pour démontrer une égalité $A=B$, on peut adopter l'une des trois méthodes suivantes.
① On calcule un membre (A ou B) pour retrouver l'autre (B ou A) : $A=\ldots=B$ ou $B=\ldots=A$.
② On calcule séparément les membres A et B pour retrouver le même résultat C :
$\left.\begin{matrix}A=\ldots=\ldots=C\\B=\ldots=\ldots=C\end{matrix}\right\}$ donc $A=B$
③ On montre que la différence $A-B$ est nulle.

Point méthode

2. b. Pour résoudre une équation comportant des quotients, on se ramène à une équation quotient.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 379 Voir exercices similaires nos 60 à 69

27 Déterminer les éventuelles valeurs interdites des expressions suivantes.

1. $\dfrac{4x+1}{3-x}$ **2.** $5-\dfrac{3x+1}{x(x-2)}$

3. $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{x+2}{2x-5}$ **4.** $\dfrac{3x+1}{x^2+1}$

28 Résoudre les équations quotients suivantes.

1. $\dfrac{4x+1}{3-x}=0$ **2.** $\dfrac{2}{x+1}=0$

3. $\dfrac{x(3x-9)}{x-2}=0$ **4.** $\dfrac{4-x^2}{x}=0$

29 On considère l'équation $\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{4}{x}=0\,(E)$.

1. Préciser les valeurs interdites de cette équation.

2. Recopier la ligne ci-dessous et la compléter pour réduire au même dénominateur.

$$\frac{2}{2x+1}-\frac{4}{x}=\frac{2\times\ldots}{x(2x+1)}-\frac{4\times\ldots}{x(2x+1)}=\frac{\ldots}{x(2x+1)}$$

3. Résoudre alors l'équation (E). On vérifiera à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

30 Écrire sous la forme d'un unique quotient les expressions **2.** et **3.** de l'exercice **27**.

SPÉCIMEN

CAPACITÉ 4 Exprimer une variable en fonction d'une autre

Énoncé Pour chacune des situations suivantes, répondre aux questions **1.** et **2.**

1. Indiquer l'ensemble dans lequel peut varier le nombre x.

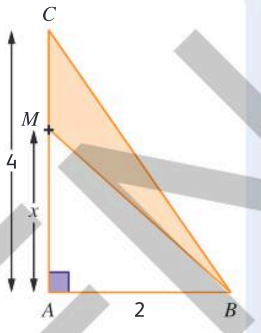
2. Déterminer l'expression demandée.

Situation ①

Un fournisseur d'énergie propose à ses abonnés un tarif comprenant un abonnement annuel de 65 € et facture 0,15 € chaque kilowatt heure (kWh) entièrement consommé.
Exprimer le montant facturé pour une consommation annuelle de x kWh.

Situation ②

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A et M un point qui se déplace sur le côté $[AC]$. On note $x = AM$.
Exprimer l'aire du triangle BMC en fonction de x.



Solution rédigée

1. Situation ① x représente le nombre de kWh consommé durant l'année, ainsi, x est un entier positif. Par conséquent, x peut varier dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Situation ② x représente la longueur AM, donc x est un nombre réel positif. De plus, M est mobile sur le segment $[AC]$: lorsque M est confondu avec A, la distance x est nulle et lorsque M est confondu avec C, on a $x = AC = 4$. Lorsque M varie sur $[AC]$, x prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0\,;4]$.

2. Situation ① Le montant de la facture est la somme de l'abonnement annuel (65 €) et du coût des consommations $(0{,}15x)$. Ainsi, le montant facturé est égal à $65 + 0{,}15x$ euros.

Situation ② On a $CM = AC - CM = 4 - x$ donc l'aire du triangle CMB est :

$$\frac{CM \times AB}{2} = \frac{(4-x)\times 2}{2} = 4 - x$$

Point méthode

1. Le contexte de la situation donne des indications sur la nature du nombre x.
Dans la situation ②, on imagine le déplacement du point M sur $[AC]$ pour déduire l'intervalle dans lequel peut varier x.

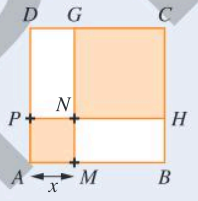
Point méthode

2. Pour exprimer les quantités demandées en fonction de la variable, on établit des liens entre ces quantités en analysant l'énoncé.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 379 Voir exercices similaires nos 70 à 80

31 Dans un carré $ABCD$ de côté 10, on considère un point M mobile sur le segment $[AB]$. Sur la figure, $AMNP$ et $GNHC$ sont des carrés.



1. Dans quel intervalle la variable x peut-elle varier ?

2. Exprimer l'aire de la zone colorée en fonction de x.

32 On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2$ et $BC = x$.

1. Exprimer la longueur AC en fonction de x.

2. Pour quelles valeurs de x cette formule est-elle valable ?

3. Exprimer l'aire A puis le périmètre P du triangle ABC en fonction de x.

33 Un opérateur de téléphonie propose un forfait mensuel de 25 € incluant les appels et SMS illimités et 50 Giga octets (Go) de données.
Au-delà de 50 Go, l'opérateur facture 5 € par Go supplémentaire.

1. De combien sera la facture d'un client ayant consommé 60 Go de données dans le mois ?

2. On suppose qu'un client consomme x Go de données dans le mois, x étant un entier naturel.
Exprimer, en fonction de x, le montant facturé au client.

Indication

Distinguer les cas $x \leqslant 50$ *et* $x > 50$.

34 Dans un circuit, un générateur de force électromotrice e, avec une résistance interne r et une intensité I, délivre une tension U donnée par la formule :

$$U = e - rI$$

1. Exprimer la force électromotrice e en fonction de U, r et I.

2. Exprimer l'intensité I en fonction de e, r et U.

SPECIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

Des outils pour transformer des expressions algébriques

Formules de distributivité

développer →

① $k(a+b)=ka+kb$
② $k(a-b)=ka-kb$
③ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

← factoriser

Identités remarquables

développer →

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
③ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

← factoriser

Développer pas à pas une expression

$E=(3x+2)^2+4x(x-2)-(3x^2-5)$

Identité remarquable	Distributivité	Distributivité
$(3x+2)^2$ $=9x^2+12x+4$	$4x(x-2)$ $=4x^2-8x$	$-(3x^2-5)$ $=-3x^2+5$

$E=9x^2+12x+4+4x^2-8x-3x^2+5$
$=10x^2+4x+9$

Factoriser pas à pas une expression

$F=9x^2-4+(3x+2)(x-2)$

On repère une identité remarquable.
$9x^2-4=(3x)^2-2^2$
$=(3x-2)(3x+2)$

$F=(3x-2)(3x+2)+(3x+2)(x-2)$

On a fait apparaître un facteur commun.
$(3x-2)(3x+2)+(3x+2)(x-2)$
$=(3x+2)[(3x-2)+(x-2)]$
$=(3x+2)(4x-4)$

Identifier et résoudre une équation

① Équations du premier degré
➥ Développer chaque membre pour se ramener à une équation du type $ax+b=cx+d$.
➥ Isoler l'inconnue dans un des membres de l'équation.

② Équations produits
➥ Se ramener à un second membre nul et factoriser, si possible, le premier membre.
➥ Appliquer la règle du produit nul.

③ Équations quotients
➥ Identifier les éventuelles valeurs interdites.
➥ Se ramener à un second membre nul et écrire le premier membre comme un unique quotient.
➥ Appliquer la règle du quotient nul ou exploiter un produit en croix.

④ Exprimer une solution
➥ On note les solutions d'une équation sous forme d'un ensemble, souvent appelé S, en utilisant des accolades { } pour indiquer qu'il s'agit d'un ensemble de valeurs.



Je m'exerce à démontrer

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2021

SPÉCIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2022

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Voir corrigés p. 380

	a	b	c
1. La forme développée de $(x+3)(2x-1)$ est :	$3x+2$	$2x^2+5x-3$	$2x^2+4x+2$
2. La forme développée de $(2x-1)^2$ est :	$2x^2-4x+1$	$4x^2-1$	$4x^2-4x+1$
3. Pour tout nombre réel x, $(4x-3)(4x+3)$ est égal à :	$(4x-3)^2$	$4x^2-9$	$16x^2-9$
4. La forme factorisée de $(x-2)(5x+1)-(x-2)(2x-3)$ est :	$(x-2)(3x-2)$	$(x-2)(3x+4)$	$(x-2)(4x+3)$
5. La forme factorisée de $25x^2-64$ est :	$(5x-8)(5x+8)$	$(5x-8)^2$	$(25x-8)^2$
6. La forme factorisée de $81x^2-18x+1$ est :	$(9x-1)(9x+1)$	$(9x-1)^2$	$(9x+1)^2$
7. Pour tout nombre réel x, x^2+4x+1 est égal à :	$(x+1)^2$	$(x+2)^2$	$(x+2)^2-3$
8. Pour tout nombre réel $x \neq 2$, $3-\dfrac{x+1}{x-2}$ est égal à :	$\dfrac{2x-5}{x-2}$	$\dfrac{2x-3}{x-2}$	$\dfrac{2x-7}{x-2}$
9. L'équation $(3x+9)(1-2x)=0$ admet pour solution :	3	-3	0,5
10. L'équation $\dfrac{x(5x+10)}{2x-4}=0$ admet pour solution :	0	-2	2
11. Parmi les inégalités suivantes, quelle est celle qui est vraie pour toute valeur du réel a ?	$a^2 \geqslant a$	$(a+1)^2 \geqslant 2a$	$a \leqslant 2a$
12. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$, si $x > y$ alors :	$x-y>0$	$\dfrac{x}{y}>1$	$\dfrac{x}{y}<1$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3(x-1)(2x+1)-2(x-1)^2$$

On donne également les trois expressions suivantes.

$$A(x)=(x-1)(4x+5) \quad ; \quad B(x)=4x^2+x-5$$
$$C(x)=(x-1)(4x+2)$$

1. La forme développée et réduite de $f(x)$ est $B(x)$.

2. La seule expression qui n'est pas égale à $f(x)$ est $C(x)$.

3. L'image de 0 par la fonction f est 5.

4. L'équation $B(x)=-5$ admet deux solutions.

5. 0 admet deux antécédents par la fonction f, à savoir 1 et 0,8.

Partie B.

On considère l'équation $\dfrac{2}{3x+1}=\dfrac{4}{x+1}$ (E).

1. -1 et $\dfrac{1}{3}$ sont les valeurs interdites de (E).

2. L'équation (E) est équivalente à l'équation :

$$\frac{-10x-2}{(x+1)(3x+1)}=0$$

3. L'équation (E) admet trois solutions.

SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2023

Acquérir des automatismes

35 **1.** Compléter la formule suivante du cours.

$$k(a+b)=\dots$$

2. Développer les expressions suivantes.

a. $5(x-9)$ **b.** $-3(2x+7)$ **c.** $3x(8x-4)$

36 **1.** Compléter la formule suivante du cours.

$$(a+b)(c+d)=\dots$$

2. Développer les expressions suivantes.

a. $(2x-1)(x-4)$ **b.** $(6x-12)(2x+7)$

37 **1.** Détailler deux façons d'effectuer les produits $2\times3\times4$.

2. En déduire deux façons de développer l'expression $A(x)=3(x-2)(x+4)$.

38 Florentin explique à sa sœur les méthodes de factorisation de la classe de Seconde :

« Tu observes ton expression algébrique, si celle-ci comporte un facteur commun (méthode ①) alors tu factorises par ce facteur commun. S'il n'y a pas de facteur commun, alors tu regardes si ton expression est une forme développée d'une identité remarquable (méthode ②). Si oui, alors tu utilises la formule du cours, sinon sans aide supplémentaire, tu ne peux pas factoriser en classe de Seconde. »

Pour les expressions suivantes, indiquer si une méthode proposée s'applique et factoriser.

1. $5x^2-10x$ **2.** x^2-2x+2

3. $3(2x-1)-(2x-1)^2$ **4.** x^2+6x+9

5. $(x-4)(6x-9)-(2+x)(x-5)$

39 **1.** Dans chaque cas, donner l'ensemble des solutions de l'équation $ax=b$.

$ax=b$
- Si $a\neq0$ alors $S=\dots$
- Si $a=0$
  - Et si $b=0$ alors $S=\dots$
  - Et si $b\neq0$ alors $S=\dots$

2. En déduire les solutions des équations suivantes.

a. $x-5=3$ **b.** $3x+4=x-6$

c. $5x=5x+6$ **d.** $2x+4=2(x+2)$

40 Dans chaque cas, résoudre l'équation proposée.

1. $2x-5=0$ **2.** $5x+3=0$

3. $x^2-25=0$ **4.** $x^2+9=0$

5. $(x-3)(x+2)=0$ **6.** $9x^2+12x+4=0$

7. $\dfrac{x-5}{x+1}=\dfrac{2x+3}{x+1}$ **8.** $\dfrac{x^2-1}{x-1}=2x$

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Développer ou factoriser une expression algébrique

Voir p. 61

Dans les exercices 41 à 46, développer et réduire les expressions.

41 **1.** $6t(2+t^2)$ **2.** $2u(1-2u^3)$ **3.** $2b(5b^5+b^2)$

42 **1.** $u(3-2u)$ **2.** $4t^2(2-t+5t^4)$ **3.** $3tu(2t+6u)$

43 **1.** $(2t-3)(t+8)$ **2.** $(3u+u^2)(2-u)$

3. $(x+1)(3-2x^2)$

44 **1.** $(1-t)(2+5t)$ **2.** $(2t+u)(3u+t^3)$

3. $2u(u-1)(2+u)$

45 **1.** $(1-t)^2$ **2.** $(3u+2)^2$ **3.** $(u-1)(u+1)$

46 **1.** $(2+5t)^2$ **2.** $(2u-3)^2$ **3.** $(3-5t)(3+5t)$

Dans les exercices 47 à 53, factoriser les expressions.

47 **1.** $15-9t^6$ **2.** $12u+8u^3$ **3.** $2a^5-6a^3$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2024

48 **1.** $10x^3+15x$

2. $21u^4-7u^3$

3. $24t^2+8$

49 **1.** $2(t-1)+t(t-1)$

2. $7u(u+1)-(u+1)$

3. $(3-x)^2+5x(3-x)$

50 **1.** $(1+u)(2+u^2)-5u(2+u^2)$

2. $4x(1-2x)+3(1-2x)$

3. $(2t+1)^2-(4t^3+2t^2)$

51 **1.** $49-t^2$

2. $9u^2-24u+16$

3. $25a^2+10a+1$

52 **1.** $49t^2+84t+36$

2. x^2-4x+4

3. $25u^2-16t^2$

53 **1.** $(2x+1)(x-3)+x^2-6x+9$

2. $(16x^2-25)-(x+2)(4x-5)$

3. $(x^2+16x+64)-(3x-5)(x+8)$

SPECIMEN

54 Compléter les identités suivantes à l'aide des identités remarquables.

1. $(6x+\ldots)^2=\ldots+\ldots+9$

2. $(7-\ldots)(7+\ldots)=\ldots-16x^2$

3. $(5-\ldots)^2=\ldots-20x+4x^2$

4. $(\ldots-6)(\ldots+6)=100x^2-\ldots$

55 Compléter les identités suivantes à l'aide des identités remarquables.

1. $(x-\ldots)^2=\ldots-14x+\ldots$

2. $(\ldots-4)(\ldots+4)=x^2-\ldots$

3. $(2x-\ldots)^2=\ldots-8x+\ldots$

4. $(\ldots+\ldots)^2=4x^2+4x+\ldots$

CAPACITÉ 2 Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème, exprimer l'ensemble des solutions

Voir p. 63

Dans les exercices 56 à 59, donner la forme développée puis la forme factorisée. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions 3.

56 Pour tout nombre réel x, on considère l'expression :

$A(x)=5(9-3x)-(9-3x)(x+1)$

1. Développer et réduire $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. a. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

b. Déterminer $A(\sqrt{2})$ puis $A(3)$.



57 Pour tout nombre réel x, on considère l'expression :

$$A(x)=(x-3)(2x+1)-(x-3)^2$$

1. Développer et réduire $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. a. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

b. Déterminer $A(1)$.

58 Pour tout nombre réel x, on considère l'expression :

$$A(x)=(2x-4)^2-(x-3)^2$$

1. Développer et réduire $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$ à l'aide d'une identité remarquable.

3. a. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

b. Déterminer $A\left(\frac{3}{2}\right)$.

59 Pour tout nombre réel x, on considère l'expression :

$$A(x)=(3x+1)^2+(3x+1)(x-1)$$

1. Développer et réduire $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. a. Déterminer $A\left(-\frac{1}{3}\right)$, $A(0)$ et $A(\sqrt{3})$.

b. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

CAPACITÉ 3 Effectuer des calculs littéraux mettant en jeu des écritures fractionnaires

Voir p. 64

60 Zaia simplifie l'expression $A=\frac{3a}{a-2}$ ainsi :

pour tout réel $a\neq 2$, $\frac{3a}{a-2}=\frac{3\cancel{a}}{\cancel{a}-2}=\frac{3}{-2}=-1{,}5$

1. Évaluer A lorsque $a=4$.

2. Que peut-on en déduire sur cette simplification ?

3. Quelle erreur a commise Zaia ?

61 Simplifier, si possible, chacune des expressions littérales suivantes.

1. $\frac{5x}{x(2-x)}$ **2.** $\frac{2a}{5-a}\times\frac{a-3}{a}$

3. $\frac{3a}{2b+1}\times\frac{b}{2a^2}$ **4.** $\frac{7x}{y-1}\times\frac{y}{7+x}$

Dans les exercices 62 à 64, réduire les expressions au même dénominateur.

62 **1.** $\frac{1}{2}+\frac{5}{x}$

2. $\frac{x}{3x-2}-\frac{2+x}{3}$



63 **1.** $\frac{x}{x+1}+\frac{3}{x^2}$ **2.** $\frac{1}{2+x}-\frac{2}{x-3}$

64 **1.** $\frac{2}{2x+1}+\frac{5}{x}$ **2.** $\frac{2}{x+1}-\frac{x-1}{3-4x}$

65 Déterminer les éventuelles valeurs interdites des expressions suivantes.

1. $\frac{2x+1}{5}$ **2.** $\frac{7}{x-1}$ **3.** $\frac{6x-3}{4x}$ **4.** $1-\frac{1}{x}$

66 On souhaite résoudre l'équation (E) : $\frac{x+1}{x-2}=3$.

1. Quelle est la valeur interdite ?

2. a. Montrer que l'équation est équivalente à résoudre $\frac{-2x+7}{x-2}=0$.

b. En déduire les solutions de (E).

67 QCM

Indiquer la bonne réponse.

On considère l'équation (E) : $\frac{x-3}{x+2}=-1$.

1. La valeur interdite de (E) est :

a. -1 **b.** 2 **c.** -2 **d.** Autre réponse

2. L'équation (E) est équivalente à :

a. $\frac{x-3}{x+2}=0$ **b.** $-\frac{5}{x+2}=0$ **c.** $\frac{2x-5}{x+2}=0$

d. Autre réponse

3. La solution de l'équation (E) est :

a. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **b.** $S=\{-2\}$ **c.** $S=\left\{\frac{1}{2};-2\right\}$

d. Autre solution

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2023

68 Simplifier les expressions fractionnaires suivantes.

1. $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ avec $x \neq 2$ **2.** $\dfrac{3x-9}{x-3}$ avec $x \neq 3$

3. $\dfrac{(2x+3)^2}{8x+12}$ avec $x \neq -\dfrac{3}{2}$ **4.** $\dfrac{4x-6}{36-16x^2}$ avec $x \neq \pm\dfrac{3}{2}$

69 Montrer que la différence des inverses de deux nombres entiers consécutifs non nuls est l'inverse de leur produit.

Aide

Soit n un nombre entier non nul, le nombre entier qui le suit s'écrit donc $n+1$.

Cas n° 4 Exprimer une variable en fonction d'une autre

Voir p. 65

Pour les exercices 70 à 72 compléter chaque tableau.

70 On considère l'expression $E = -3a + (-a+1)$.

a	-2	4		$\frac{1}{3}$
E			-19	

CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2027



71 On considère l'expression $E = \dfrac{x-y}{3x}$.

x	1			2	
y	1	2	-1	0	
E					14

72 On considère l'expression $E = \dfrac{x-y}{3-x}$.

x	1			-3	
y		2	-1	0	-2
E	5				

73 On considère l'égalité $2a = \dfrac{b}{b-1}$.

1. a. Montrer que $b \neq 1$.

b. Évaluer a lorsque $b = \dfrac{1}{2}$.

2. a. Montrer que $b = \dfrac{2a}{2a-1}$.

b. Évaluer b lorsque $a = 2$.

c. Pour quelle valeur de a l'égalité ne peut être vérifiée ?

74 L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est donnée par $a = \dfrac{b \times h}{2}$. Exprimer la hauteur h en fonction de a et de b.

75 La loi d'Ohm permet de relier la tension U, en volt, l'intensité I, en ampère et la résistance R, en ohm, à l'aide de la formule $U = RI$.

1. Exprimer R en fonction de U et I.

2. Calculer I pour $R = 40\text{A}$ et $U = 220\text{V}$.

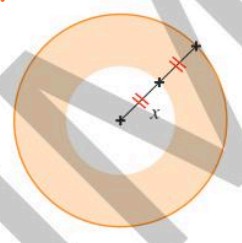
76 En physique, la vitesse moyenne v (en m.s^{-1}) se calcule en fonction de la distance parcourue d, en mètre, pendant un temps t, en seconde, à l'aide de la formule $v = \dfrac{d}{t}$.

1. Exprimer t en fonction de v et d.

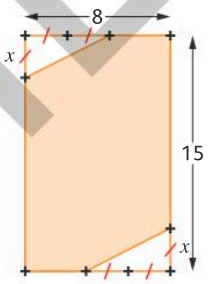
2. Calculer d pour $v = 10\ \text{m.s}^{-1}$ et $t = 60\text{s}$.

77 Exprimer en fonction de x l'aire de chaque partie colorée. Celle de droite est inscrite dans un rectangle.

1.

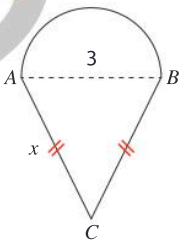


2.

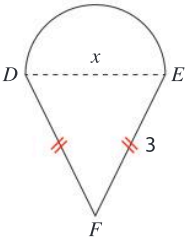


78 Exprimer le périmètre de chacune des figures suivantes en fonction de x.

1.



2.



79 On considère un carré d'aire A dont on double les côtés. Exprimer la nouvelle aire A' de ce carré en fonction de A.

80 Un cinéma propose deux tarifs pendant l'été :

- 5 € par séance ;
- 2 € par séance, après l'achat d'une carte d'abonnement de 15 €.

Valentin veut choisir le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de séances auxquelles il assistera.

1. a. Exprimer le prix à payer, $t(n)$, avec le tarif normal pour assister à n séances.

b. Même question avec le tarif abonné t_a.

2. À combien de séances Valentin doit-il assister pour que le prix payé soit le même avec les deux tarifs ?

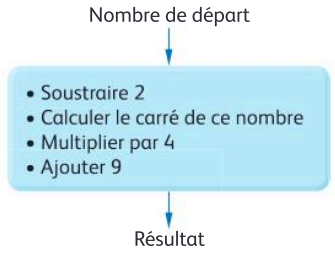
3. Que peut-on conseiller à Valentin ?

SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Manipulations algébriques

81 On considère le programme de calcul suivant.



1. Montrer que si 4 est le nombre de départ, le programme donne 25.
2. On note x le nombre de départ.
a. Exprimer, en fonction de x, le résultat obtenu par le programme.
b. Montrer que le résultat peut s'écrire $4x^2-16x+25$.
c. En déduire mentalement une autre valeur de départ dont le résultat du programme donne 25.

82 **1.** Pour tout nombre réel x, factoriser l'expression :
$$D(x)=(x+1)^2-x^2$$
2. En déduire la parité de la différence entre deux nombres entiers consécutifs.

Dans les exercices 83 à 85, réduire l'expression dans la question 1. et simplifier, si possible, l'expression dans la question 2.

83 **1.** $(2xy^2-3x)-(xy^2+5x)$ **2.** $\dfrac{9a^2b^4}{6ab^5}$

84 **1.** $(2xy^2)^2-(x^2y^4+5x)$ **2.** $\dfrac{3b(a+1)}{2b^2(a+1)^2}$

85 **1.** $xy(x^3y^4-5x)+y\left(5x^2+3(x^2y)^2\right)$
2. $\dfrac{(3ab^3)^3}{9a^3b^5}$

Dans les exercices 86 à 88, factoriser les expressions.

86 **1.** $4x(7x-6)+2(7x-6)$
2. $(3x-4)^2-7x(3x-4)$
3. $(2x+1)(3-x)+(3-x)$

87 **1.** $4(2t+5)^2-2t(2t+5)$
2. $(3x+3)(15x-7)-(15x-7)$
3. $(x+1)(7x+2)+2x(x+1)-(x+1)$

88 **1.** $(5x+6)^2-(5x+6)$
2. $(2x+3)(x-2)+(x-2)$
3. $(8x-3)(3x+7)-5(8x-3)+2x(8x-3)$

Analyse d'un énoncé

89 **Exercice commenté**
1. Factoriser $3x-9$.
› Faire apparaître un produit dans chaque terme, puis chercher un facteur commun.
2. En déduire une forme factorisée de l'expression $3x-9+(x-3)(2x+8)$.
› Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente.

90 **Application immédiate**
1. Factoriser $4x-20$.
2. En déduire une forme factorisée de l'expression $(x-5)(3x+9)-(4x-20)$.

Dans les exercices 91 à 94, faire apparaître un facteur commun puis factoriser l'expression de départ.

91 $4x+20-2x(x+5)$

92 $(x+2)(2x-1)+4x^2-2x$

93 $(6x-5)^2+18x-15$

94 $(3x+2)(x-7)-x+7$

95 Factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
1. $(x+1)^2-36$
2. $(x+1)^2-(3x+2)^2$
3. $9-(2x-1)^2$
4. $(x-6)^2-(6x+1)^2$

96 Factoriser à l'aide des identités remarquables.
1. $(x-3)(x+2)-(x^2-9)$
2. $(x-1)(2x+3)+4x^2+12x+9$
3. $4x^2-25+(x-2)(2x-5)$
4. $x^2-4x+4-(x-2)(2x+1)$

97 Factoriser à l'aide des identités remarquables.
1. $25x^2+70x+49+5(5x+7)$
2. $x^2-16+(x+4)(x+1)$
3. $(x-5)(x+10)-x^2+10x-25$
4. $36x^2+12x+1-(x+3)(6x+1)$

98 Factoriser à l'aide des identités remarquables.
1. $(x-6)(3x+2)-x^2+12x-36$
2. $(2x-5)(3x+4)+9x^2+24x+16$
3. $4x^2-12x+9-(3x-2)(2x-3)$
4. $16x^2-36-(4x-6)(2x+1)$

SPECIMEN

99 L'unité de mesure de température aux U.S.A. est le degré Fahrenheit (°F), alors qu'en France on utilise le degré Celsius (°C).

1. Pour convertir une température exprimée en °C en °F, on utilise la relation $f = 1{,}8c + 32$ où f correspond à la température en °F et c à celle en °C.
Quelle température un Américain lit-il sur son thermomètre lorsque l'eau commence à geler ?

2. a. Exprimer c en fonction de f.

b. Le 18 juillet 2023, la température record de 128 °F a été mesurée à *Death Valley*. Qu'aurait affiché un thermomètre français ?



100 Vérifier l'égalité :

$$5x^2 - 22x + 8 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x - 4)$$

Aide

Pour vérifier une égalité de cette forme, il suffit de développer le second membre et de vérifier qu'on tombe bien sur le résultat attendu.

101 Vérifier l'égalité :

$$8x^2 - 21x - 9 = 4\left(2x + \frac{3}{4}\right)(x - 3)$$

102 Vérifier l'égalité :

$$48x^4 - 36x^3 - 80x^2 + 60x = 8(3x^3 - 5x)\left(2x - \frac{3}{2}\right)$$

103 On considère l'expression, appelée « polynôme du second degré », définie pour tout nombre réel x par : $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels fixés tels que $a \neq 0$.

1. On suppose que $P(x)$ peut être factorisé par $(x - 1)$. Que peut-on en déduire pour $P(1)$?

2. On suppose maintenant que l'on a : $P(1) = 0$.

a. Démontrer l'égalité : $c = -a - b$.

b. En déduire que l'on a, pour tout réel x :

$$P(x) = (x - 1)(a(x + 1) + b)$$

c. Recopier et compléter : « L'expression $P(x)$ peut être factorisée par $(x - 1)$ si et seulement si … ».

Dans les exercices **104** *à* **108**, *déterminer les valeurs interdites et réduire au même dénominateur.*

104 **1.** $1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **2.** $\dfrac{2}{3x + 1} + \dfrac{4}{2 - 3x}$

105 **1.** $\dfrac{3x}{3x - 1} + \dfrac{x}{4x + 1}$ **2.** $3 - \dfrac{5}{2x - 3}$

106 **1.** $\dfrac{x + 2}{x - 1} + \dfrac{x + 3}{x - 2}$ **2.** $3x + \dfrac{x - 3}{2x - 1}$

107 **1.** $\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{2x + 1}$ **2.** $\dfrac{5x}{5x - 3} - x^3$

108 **1.** $\dfrac{1 - 3x}{x + 3} - \dfrac{2x + 1}{3 - x}$ **2.** $\dfrac{x + 3}{x^2} + \dfrac{3x}{4x - 3}$

109 **Un raisonnement qui interroge**

Voici, ci-dessous, une drôle de « démonstration ».

On considère deux nombres égaux a et b.
On a alors : $a = b$ d'où $a^2 = ab$
Par conséquent, $a^2 - b^2 = ab - b^2$
c'est-à-dire $(a - b)(a + b) = (a - b)b$
d'où, $a + b = b$ (après simplification par $a - b$).
Donc, si par exemple, $a = b = 1$, alors on en déduit que $a + b = b$ c'est-à-dire que $2 = 1$.

Où est l'erreur ?

110 TABLEUR Amara a retrouvé un défi lancé par un ami. Celui-ci a volontairement supprimé un mot.

On considère trois nombres entiers consécutifs dans l'ordre croissant. Si on ajoute le deuxième entier au produit des trois entiers, la somme S obtenue est égale au cube du [illegible] entier.

1. Il utilise un tableur pour effectuer une conjecture.

	A	B	C	D
1	1er entier	2e entier	3e entier	Somme
2	1	2	3	8
3	2	3	4	27
4	3	4	5	64
5	4	5	6	125

a. Quelle formule a-t-il pu entrer dans la cellule D2 pour être recopiée vers le bas ?

b. Quelle conjecture peut-il faire ?

2. Démontrer cette conjecture.

SPECIMEN

2 Résolution algébrique d'équations

111 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

1. $x+5=0$ **2.** $3x+1=0$

3. $-4x+3=-1$ **4.** $2x=3-x$

112 Résoudre dans $\mathbb{D}$ les équations suivantes.

1. $3-4x=2x$ **2.** $6x-3=2x$

3. $4x-3=5+2x$ **4.** $x+2=3-2x$

113 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $3x=7-5x$ **2.** $4x+13=x-10$

3. $x-2=8-9x$ **4.** $2x+3=3x-13$

114 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

1. $(4x+1)(x-2)=0$ **2.** $(6x-1)(-2x+6)=0$

115 Résoudre les équations suivantes.

1. $(5x-3)(2x+7)=0$ **2.** $(2x-1)(3x+12)=0$

116 Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{x+3}{x-1}=0$ **2.** $\dfrac{3x-6}{2x-1}=0$

117 Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{5x+5}{x^2-1}=0$ **2.** $\dfrac{4x-1}{3x+5}=0$

118 Le problème 24 du *papyrus de Rhind* s'énonce ainsi : « Un nombre ajouté à son septième donne 19. Quel est ce nombre ? »
Résoudre ce problème.

Info

Entré dans les collections du British Museum en 1863, ce papyrus, écrit en hiératique, est l'une de nos sources principales pour la connaissance des mathématiques dans l'ancienne Égypte.



119 Mathilde affirme : « Si on retire 1 à la somme des carrés de trois nombres entiers consécutifs, on obtient toujours un multiple de 3 ». A-t-elle raison ?

Aide

Trois nombres entiers consécutifs sont trois entiers « qui se suivent », comme 2, 3 et 4 ou bien 7, 8 et 9.

Analyse d'un énoncé

120 **Exercice commenté**

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\dfrac{1-x}{3+x}=2$.

1. (E) est-elle une équation du type quotient nul ?

> Une équation quotient nul est de la forme $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$.

2. Montrer que cette équation est équivalente à (E') : $\dfrac{-3x-5}{3+x}=0$.

> On transforme l'égalité à l'aide d'opérations qui ne changent pas l'ensemble des solutions. Ici, on peut soustraire 2 à chaque membre de l'égalité…

3. En déduire les solutions de (E).

> Les solutions de (E') étant les mêmes que celles de (E) alors on résout (E') dont le cours nous donne une méthode.

121 **Application immédiate**

Résoudre l'équation $\dfrac{5-3x}{1+x}=1$.

122 On considère l'expression $C(x)=\dfrac{x+6}{3x-2}$.
Résoudre $C(x)=0$, $C(x)=-5$ et $C(x)=4$.

123 On considère l'expression $A(x)=(x-2)^2-1$.

1. Factoriser $A(x)$.

2. Résoudre $A(x)=0$.

3. En s'inspirant des questions **1.** et **2.**, résoudre $A(x)=8$.

124 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x+6)^2-1$$

Dans chaque cas, choisir la forme la plus adaptée (initiale, développée, factorisée), puis répondre à la question.

1. Résoudre $f(x)=0$.

2. Trouver le (ou les) antécédent(s) de 35.

3. Trouver le (ou les) antécédent(s) de –1.

125 On considère l'expression définie pour tout nombre réel x par : $P(x)=x^3-4x^2+x+6$.

1. Calculer $P(-1)$, $P(2)$, $P(3)$.

2. Vérifier, pour tout nombre réel x, l'égalité :

$$P(x)=(x-2)(x+1)(x-3)$$

3. Proposer une expression $Q(x)$ qui s'annule en –1, 2, 3 et 4.

4. En s'inspirant des questions précédentes, proposer une expression :

a. $R(x)$ qui s'annule en 1 et 2 ;

b. $S(x)$ qui s'annule en –2 et 5.

SPECIMEN

126 Un agriculteur possède un terrain rectangulaire de 8 450 m^2. Il souhaite l'aménager avec une partie cultivable au centre, et un chemin faisant le tour du terrain.



1. On note L la longueur de ce terrain. Sachant qu'il est deux fois plus long que large, déterminer la longueur et la largeur du terrain.
2. On note x la largeur du chemin. Faire un schéma de la situation.
3. a. Justifier que l'aire du chemin est égale à $390x - 4x^2$.
b. En déduire une expression, en fonction de x, de l'aire de la partie cultivable.
4. Il faut un chemin large de 3 m pour faire passer les engins agricoles.
a. Quelle est l'aire de la partie cultivable ?
b. Quelle est alors l'aire du chemin ?

Dans les exercices 127 à 130, préciser les valeurs interdites puis résoudre l'exercice à l'aide de la propriété suivante :

Rappel

Produit en croix : pour tous réels a, b, c et d avec b et d non nuls, on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ si $a \times d = b \times c$.

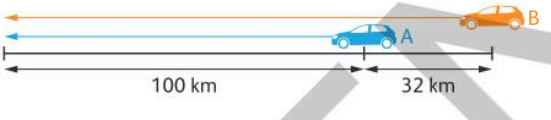
127 Résoudre $\frac{x+4}{x-3} = -2$

128 Résoudre $\frac{2x+1}{x-2} = -3$

129 Résoudre $\frac{3x-1}{x+4} = 2$

130 Résoudre $\frac{3}{x+2} = \frac{2}{2x-3}$, puis $\frac{4x-3}{x+4} = \frac{4x-1}{x-2}$

131 Deux amis, Alric et Bart, partent en même temps de deux villes, respectivement la ville A et la ville B. Le trajet de Bart passe par la ville A et emprunte ensuite la même route qu'Alric.
Alric a dû parcourir 100 km et Bart 132 km pour que la rencontre s'effectue.



En moyenne, Bart a roulé à une vitesse supérieure de 20 km.h^{-1} à celle d'Alric.
On cherche à quelles vitesses moyennes ils ont roulé.
On note x la vitesse moyenne d'Alric.
1. Parmi les grandeurs temps, distance et vitesse, laquelle se traduit par une égalité dans le problème ci-dessus ?
2. Montrer que le problème peut revenir à résoudre l'équation $\frac{100}{x} = \frac{132}{x+20}$.
3. Trouver la solution du problème.

132 PYTHON Pour trouver une solution de l'équation $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = 0$, Gaia utilise la fonction python A ci-dessous :

```
def A(x):
    if x!=0 and x!=-3:
        return 1/x+2/(x+3)
    else:
        return "impossible"
```

1. Pourquoi a-t-elle utilisé une instruction conditionnelle if… else… ?
2. Que renvoie la fonction A si x vaut 1 ?
3. Elle complète son programme ainsi :

```
for x in range(-100,100):
    if A(x)==0:
        print(x)
```

a. Parmi quels nombres cherche-t-elle une solution ?
b. Que va afficher le programme ?

133 Si on ajoute un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{13}$, on obtient $\frac{1}{3}$.
1. Mettre l'énoncé en équation.
2. Résoudre cette équation.

Aide

Que l'on utilise le produit en croix ou non, pour résoudre des équations quotient, il est important de toujours lister les valeurs interdites.

SPECIMEN

134 On dispose d'une boîte cylindrique de diamètre 4 cm et de hauteur 6 cm remplie de microbilles. On souhaite transvaser son contenu dans une boîte à base carrée de côté 4 cm. Quelle doit être la hauteur minimale de cette boîte pour qu'elle puisse contenir les microbilles ? *On donnera une valeur arrondie au centième par excès.*

135 On souhaite savoir s'il existe un ou plusieurs triangles rectangles dont les longueurs sont trois nombres entiers consécutifs.
Soit n la valeur médiane des trois longueurs.
1. Exprimer en fonction de n les trois longueurs du triangle.
2. Parmi les trois entiers décrits dans la question **1.**, lequel serait la longueur de l'hypoténuse ?
3. Montrer, en utilisant le théorème de Pythagore, que n vérifie l'équation $n^2 - 4n = 0$.
4. En déduire tous les triangles rectangles ayant pour longueurs des côtés trois nombres entiers consécutifs.

136 Pour créer un bac à l'aide d'une plaque d'acier de 1 m de large sur 2 m de long, on découpe quatre carrés de côté x dans les coins puis on replie les bords rectangulaires vers l'intérieur.

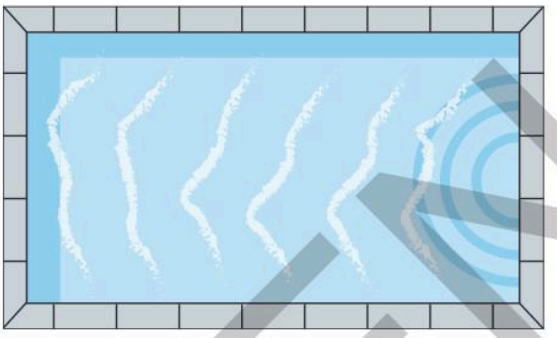


1. À quel intervalle appartient x ?
2. Exprimer la largeur, la longueur et la hauteur du bac en fonction de x.
3. En déduire l'expression du volume en fonction de x.
4. On souhaite que le volume du bac soit exactement égal à 0,192 m^3. Montrer que, pour satisfaire cette contrainte, x doit être solution de l'équation :
$$4x^3 - 6x^2 + 2x - 0{,}192 = 0$$
5. Montrer que :
$$4x^3 - 6x^2 + 2x - 0{,}192 = (x - 0{,}2)(4x^2 - 5{,}2x + 0{,}96)$$
6. On admet que $4x^2 - 5{,}2x + 0{,}96 = 0$ a pour solution les valeurs approchées 0,22 et 1,08. Quelles valeurs de x permettent d'obtenir un tel bac ?

137 Déterminer deux entiers naturels consécutifs dont la différence des carrés vaut 809.

138 On considère un carré dont on augmente la longueur de chaque côté de 6 cm. L'aire du nouveau carré augmente alors de 81 cm^2.
1. Déterminer la longueur d'un côté du carré initial.
2. En déduire l'aire du carré initial.

139 Une société de pisciculture possède un bassin rectangulaire de largeur ℓ et de longueur L dont la capacité est de 7 200 m^3 et la profondeur de 2 m.



1. Quelle est la surface occupée par le bassin ?
2. a. Exprimer L en fonction de ℓ.
b. Montrer que le périmètre du bassin est égal :
$$\frac{7\,200}{\ell} + 2\ell$$
3. a. Le périmètre de ce bassin mesure 250 m, montrer que pour ℓ non nul, la largeur du bassin est solution de l'équation $2\ell^2 - 250\ell + 7\,200 = 0$.
b. Montrer que $2\ell^2 - 250\ell + 7\,200 = 2(\ell - 80)(\ell - 45)$.
c. En déduire les dimensions du bassin.

140 Benjamin et Evie sont à Londres pour assister à une comédie musicale. Il y a deux types de places : des places en hauteur à 30 £, des places plus proches de la scène à 45 £.
Le spectacle, qui affiche complet avec 500 spectateurs, rapporte 18 000 £ de recette. Déterminer le nombre de places vendues à 30 £ et à 45 £.



141 Mathieu s'entraîne pour un triathlon sur un circuit de 6 km, qui comprend 2 km de natation, 2 km de vélo et 2 km de course à pied. Il court 2 fois plus vite qu'il ne nage et se déplace en vélo 2 fois plus vite qu'il ne court. S'il avait parcouru les 6 km à vélo il aurait mis 21 min.
Quelle est la durée totale de son entraînement ?

SPÉCIMEN

BILAN

142 25min Choisir la forme la plus adaptée

On considère les expressions suivantes.

$A(x)=(2x+1)(x-5)+(3x+2)^2$

$B(x)=(2x-5)^2-(3x-7)(2x-5)$

$C(x)=(x-3)^2-16$

$D(x)=25x^2-70x+49$

1. Développer et réduire les expressions $A(x)$ et $B(x)$.

2. Factoriser les expressions $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$.

3. Dans chaque cas, utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.

a. Calculer $A(5)$.

b. Calculer $A(-1)$.

c. Résoudre $B(x)=0$.

d. Calculer $B(1)$.

e. Résoudre $C(x)=0$.

f. Calculer $A\left(\sqrt{17}+3\right)$.

g. Calculer $D(0)$.

h. Résoudre $D(x)=49$.

143 20min Différentes équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $3x-7=3-5x$

2. $(3x+4)(2x-6)=0$

3. $5x-2(x-4)=3-(2-x)$

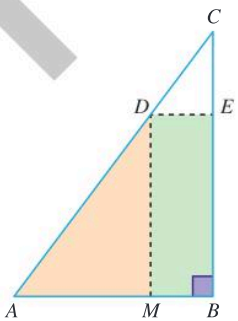
4. $(3x-3)^2+6=42$

5. $\dfrac{5x-7}{x+3}=0$

6. $\dfrac{2x+7}{4-x}=3$

144 20min Modéliser un problème

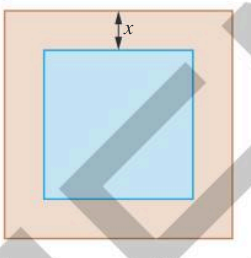
On considère un triangle ABC rectangle en B, de côté $AB=9$ cm. On place un point M sur le segment $[AB]$. On forme alors un rectangle $BMDE$.



Où faut-il placer le point M pour que l'aire du triangle AMD soit égale à l'aire du rectangle $BMDE$?

145 25min Modéliser par une équation

On souhaite entourer un parc fleuri carré de 10 m de côté par une allée en terre de x m de largeur. Pour cela, on doit utiliser une quantité de terre permettant de recouvrir 36 m^2.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable x ?

2. Exprimer l'aire de l'allée en fonction de x.

3. Expliquer pourquoi résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $x^2-10x+9=0$.

4. Montrer que $x^2-10x+9=(x-1)(x-9)$.

5. En déduire la largeur de l'allée pour que sa surface occupe 36 m^2.

146 15min Équation du 3e degré

On souhaite résoudre l'équation (E) :

$$x^3+3x^2-6x-8=0$$

1. Montrer que -1 est une solution de (E).

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)\left(x^2+2x-8\right)$$

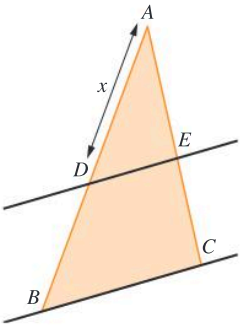
3. Montrer que, pour tout réel x :

$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$$

4. En déduire les solutions de (E).

147 20min Un problème de périmètre

Dans un triangle ABC de dimension $AB=10$ cm, $AC=8$ cm et $BC=6$ cm, on place un point D tel que $AD=x$. Le point E est le point d'intersection de la droite parallèle au segment $[BC]$ passant par le point D.



1. Exprimer la longueur DE puis la longueur AE en fonction de x.

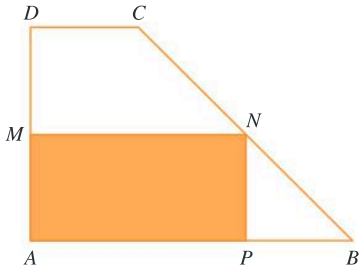
2. Déterminer la position du point D telle que le périmètre du triangle ADE soit égal à la moitié de celui du triangle ABC.

SPECIMEN

148 25min **Un problème agricole**

Un exploitant agricole dispose d'une parcelle de forme trapézoïdale. Dans cette parcelle, il souhaite délimiter une zone rectangulaire. On modélise la parcelle par un trapèze rectangle $ABCD$ avec $AB = 60\,\text{m}$, $CD = 20\,\text{m}$ et $AD = 40\,\text{m}$.

On considère un point M mobile sur le segment $[AD]$ et on construit le rectangle $AMNP$ inscrit dans le trapèze $ABCD$, comme l'indique la figure ci-dessous.



L'objectif de cet exercice est de déterminer :

① s'il existe une position de M pour laquelle l'aire de la surface colorée est égale à 800 m^2.

② s'il existe une position de M pour laquelle l'aire colorée est égale à celle du triangle PBN.

On note x la longueur AM et $\mathscr{A}$ la fonction, qui à x associe l'aire du rectangle $AMNP$.

1. À quel intervalle la variable x appartient-elle ? On note I cet intervalle dans la suite.

2. a. On admet que le triangle BNP est rectangle isocèle en P. Exprimer la longueur AP en fonction de x.

b. En déduire que l'aire du rectangle $APNM$ est égale à $\mathscr{A}(x) = 60x - x^2$ (forme 1).

c. Justifier que, pour tout réel $x \in \text{I}$, on a :

$$\mathscr{A}(x) = 900 - (x-30)^2 \text{ (forme 2)}$$

3. Résoudre les deux problèmes posés en introduction en précisant, dans chaque cas, les positions du point M correspondantes.

149 20min **Une identité pour résoudre une équation**

1. Montrer que pour tout réel x distinct de 1 et de $-\frac{2}{3}$, on a l'identité suivante.

$$\frac{2}{1-x} - \frac{x}{3x+2} = \frac{(x+1)(x+4)}{(1-x)(3x+2)}$$

2. Résoudre alors l'équation suivante.

$$\frac{2}{1-x} = \frac{x}{3x+2}$$

APPROFONDISSEMENT

150 **Pendule de Foucault**



Le pendule de Foucault permet une expérience visant à mettre en évidence la rotation de la Terre, depuis un site terrestre d'observation. La première démonstration publique a eu lieu en 1851, sous la voûte du Panthéon, à Paris.

Une boule est placée au bout d'un fil et est lâchée sans vitesse initiale, les oscillations générées vérifient la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

où T est la période d'une oscillation, en seconde, L désigne la longueur du pendule, en mètre, et g est la constante gravitationnelle, exprimée en m.s^{-2}. On prendra $g \approx 10\,\text{m.s}^{-2}$.

1. La longueur du pendule utilisé dans le Panthéon en 1851 était de 67 m. Déterminer alors la période d'oscillation arrondie à la seconde près.

2. a. Exprimer L en fonction de T et de g.

b. Quelle doit être la longueur du pendule pour que la période d'une oscillation soit de 4 s ? *On donnera une valeur arrondie au centimètre.*

151 **De nouvelles identités remarquables**

Soient a, b, c, d et e des nombres réels.

1. Développer $(a+b+c)^2$ et $(a+b-c)^2$.

2. En déduire le développement de $(a-b+c)^2$ et $(a-b-c)^2$. Vérifier les réponses.

3. Application

Soient x, y et z des réels non nuls tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

a. Montrer que $xy + yz + zx = 0$.

b. En déduire qu'on a dans ce cas :

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

4. Pour aller plus loin

a. Recopier et compléter le tableau à double entrée ci-dessous.

×	a	b	c	d
a	a^2			
b			bc	
c				cd
d				

b. En déduire le développement de $(a+b+c+d)^2$.

c. Conjecturer le développement de $(a+b+c+d+e)^2$. Vérifier le résultat.

SPECIMEN

152 On modélise une bouteille thermos par un cylindre de révolution de diamètre 6 cm et de hauteur 25 cm.

1. On y verse le contenu d'une théière pleine à ras bord. On assimile la théière à une sphère de diamètre 11 cm. Quelle est alors la hauteur du liquide dans le thermos ? *On donnera un résultat en cm arrondi au centième.*

2. On ajoute deux morceaux de sucre, assimilés à des pavés droits de 1,6 cm de long, 1,6 cm de large et 1,1 cm de haut. Quelle est la nouvelle hauteur du liquide dans le thermos ?

3. Combien peut-on ajouter de sucre avant que le thermos ne déborde ?

Info

Le volume d'une sphère est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$.

153 Équation bicarrée

Benjamin cherche à résoudre l'équation :

$$(x+1)^4 = 256 \quad (E)$$

Pour cela, il propose de faire un « changement de variable », c'est-à-dire de changer d'inconnue afin de se ramener à une équation plus simple à résoudre.

1. Il pose $X = (x+1)^2$. Écrire la nouvelle équation ainsi formée.

2. Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $(X+16)(X-16) = 0$.

3. a. Résoudre l'équation trouvée à la question **2.**

b. Benjamin affirme qu'une des deux solutions est impossible, pourquoi ?

c. Justifier que l'équation (E) est équivalente à $(x+1)^2 = 16$.

4. Résoudre l'équation trouvée à la question **3.c.**

5. Conclure quant aux solutions de l'équation (E).

154 Quantité conjuguée

1. Soient a et b deux nombres réels positifs.
Justifier l'égalité : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$.

Info

On dit que $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ est « la quantité conjuguée » de $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$, mais aussi que $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ est « la quantité conjuguée » de $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

2. a. Déterminer la quantité conjuguée de l'expression $A = \sqrt{5}+1$.

b. Multiplier A par sa quantité conjuguée. Que remarque-t-on ?

c. Justifier alors l'égalité $\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}-1$.

3. De la même manière, justifier les égalités suivantes.

a. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{6}$ **c.** $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

4. Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur.

a. $\frac{5}{\sqrt{3}+2}$ **b.** $\frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$ **c.** $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

Aide

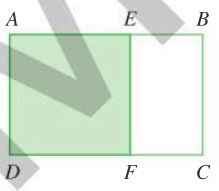
On retiendra que pour écrire sans radical au dénominateur, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

155 Application directe

Soit x un réel positif, écrire l'inverse de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ sans utiliser de barre de fraction.

156 Le nombre d'or

De nombreux peintres et architectes de la Renaissance italienne, en particulier Léonard de Vinci (1452-1519), ont évoqué l'existence d'un rectangle aux proportions « idéales », vérifiant la propriété suivante.



« Lorsque l'on ôte au rectangle considéré, un carré construit sur sa largeur, on obtient un nouveau rectangle, plus petit, semblable au rectangle d'origine, c'est-à-dire dont le rapport longueur sur largeur est égal à celui du rectangle initial. »

1. Valeur exacte du nombre d'or φ

On note L et ℓ la longueur et la largeur du rectangle idéal $ABCD$.

On pose $\varphi = \frac{L}{\ell}$.

a. Démontrer que :

$$\frac{\ell}{L} = \frac{L-\ell}{\ell}$$

b. En déduire que φ est solution de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (E)$$

c. Vérifier que, pour tout réel x, on a :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

d. Résoudre alors l'équation (E) puis en déduire la valeur exacte de φ.

2. Construction d'un rectangle d'or

On considère un carré $AEFD$ et I le milieu du côté $[DF]$. Le cercle de centre I et passant par E coupe la demi-droite $[DF)$ en C.

a. Démontrer que $\frac{DC}{DA} = \varphi$.

b. En déduire la construction d'un rectangle d'or connaissant sa largeur.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

157 Mettre un problème en équation

On considère le problème suivant.

Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 5 ans, il aura le double de l'âge de son fils. Quels sont les âges respectifs du fils et du père ?

Étape 1 : choix de l'inconnue et mise en équation.

On appelle x l'âge actuel du fils.

1. Exprimer en fonction de x l'âge actuel du père, l'âge du fils dans 5 ans et l'âge du père dans 5 ans. On pourra remplir le tableau suivant.

	Âge du fils	Âge du père
Actuellement	x	
Dans 5 ans		

2. En utilisant la donnée « dans 5 ans, le père aura le double de l'âge de son fils », justifier que x est solution de l'équation $x+30=2(x+5)$.

Étape 2 : résolution de l'équation.

Résoudre l'équation précédente.

Étape 3 : retour au problème.

Interpréter la résolution précédente et conclure en répondant au problème posé.

158 Mise en équation : à moi de jouer !

Appliquer la méthode de l'exercice 157.

On partage une somme d'argent (en écu) entre trois personnes : la première reçoit un tiers de la somme, la deuxième reçoit la moitié de ce qu'a reçu la première à laquelle s'ajoutent 150 écus et la troisième reçoit 750 écus. Déterminer la somme partagée et la part de chacun.

159 Des erreurs « classiques »

1. On demande à Sonia de développer une expression. Voici sa réponse :

Pour tout réel x,

$$(2x+3)^2-(3x+2)=2x^2+9-3x+2$$

Expliquer et corriger les erreurs faites par Sonia.

2. On demande à Lilian de factoriser une expression. Voici sa réponse :

Pour tout réel x,

$$(3x+2)(4x-1)-(3x+2)$$
$$=(3x+2)[(4x-1)-0]$$
$$=(3x+2)(4x-1)$$

Expliquer et corriger l'erreur faite par Lilian.

Aller plus loin

160 À l'aide d'un logiciel de calcul formel

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB=10$ et $AD=6$. Les points M, N, P et Q appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ de sorte que :

$$AM=BN=CP=DQ$$

On cherche à savoir si l'aire du quadrilatère $MNPQ$ peut être égale à la moitié de celle du rectangle $ABCD$.

1. Réaliser une figure. Dans la suite, on pose $x=AM$.

2. a. À quel intervalle appartient la variable x ?

b. Montrer que le problème se ramène à résoudre l'équation suivante.

$$60-[x(6-x)+x(10-x)]=30\,(E)$$

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a effectué les calculs ci-contre. Quel(s) résultat(s) est(sont) utile(s) à la résolution de l'équation (E) ? Le(s) démontrer puis conclure.

Calcul formel

1 f(x):=60-(x(6-x)+x(10-x))
→ f(x) := 2 x² − 16 x + 60

2 Résoudre(f(x)=30)
→ {x = 3, x = 5}

3 Factoriser(f(x)-30)
→ 2 (x − 5) (x − 3)

161 PRISE D'INITIATIVES Problème issu de l'ouvrage chinois *Neuf chapitres sur l'art du calcul*

Une ville entourée d'une fortification carrée de dimension inconnue comprend une porte au milieu de chaque côté.
En sortant de la ville par le nord, à vingt pas vers le nord se trouve un arbre.
En quittant la ville par le sud, marche quatorze pas vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir cet arbre.
On cherche les dimensions de la ville.

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2028

162 PRISE D'INITIATIVES Compétences Chercher – Calculer

Nombre de nuitées

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €. Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

Déterminer le nombre de nuitées passées dans chaque hébergement.

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2029

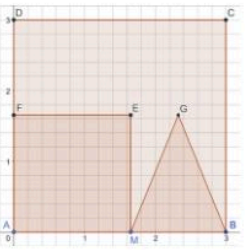
SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

Trouver la bonne position

Soit un carré $ABCD$ de 3 cm de côté. On place un point M sur le segment $[AB]$ et on note $AM = x$. Puis on construit le carré $AMEF$ et le triangle MGB isocèle en G dont la hauteur issue de G a pour longueur x.
L'objectif est de déterminer la position du point M, si elle existe, pour que la somme des aires du carré $AMEF$ et du triangle MBG soit égale à 5 cm^2.



Objectif
Résoudre un problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Partie A Conjecture avec Geogebra

On rappelle que le projeté orthogonal du sommet principal d'un triangle isocèle est le milieu du côté opposé.
On se place dans le repère orthonormé d'origine A, avec 1 cm pour unité, dans lequel B a pour coordonnées $(3\,;0)$ et D a pour coordonnées $(0\,;3)$.

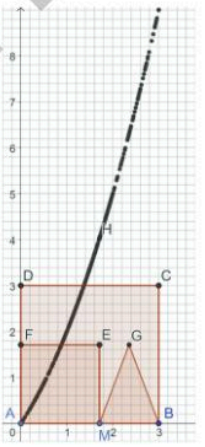
1. Exprimer la longueur MB en fonction de x.

2. Expliquer pourquoi les coordonnées du point G sont $\left(x+\dfrac{3-x}{2}\,;x\right)$.

3. a. Construire le carré $ABCD$ à l'aide de l'outil Polygone régulier.
b. Placer un point M sur le segment $[AB]$. Puis construire le carré $AMEF$.
On remarque que la variable $poly2$ qui a été créée correspond à l'aire du carré $AMEF$.
c. La fonction $x(M)$ retourne l'abscisse du point M. Construire le point G.
d. À l'aide de l'outil Polygone, construire le triangle isocèle en G.
e. Construire la variable $aire$ égale à la somme des aires du carré $AMEF$ et du triangle MBG.

4. Enfin, construire le point H de coordonnées $(x(M)\,;aire)$ et laisser la trace active (clic droit sur le point puis *Afficher la trace*).

5. En déplaçant le point M, proposer une réponse au problème posé.



Partie B Modéliser le problème par une équation

1. Exprimer l'aire du carré $AMEF$, puis l'aire du triangle MBG en fonction de x.

2. En déduire que le problème revient à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=5$$

3. Montrer que cette équation est équivalente à :

$$x^2+3x-10=0$$

4. Montrer que $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$.

5. En déduire la ou les positions du point M pour qu'il vérifie le problème posé.

SPECIMEN

TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Des carrés parfaits ! PYTHON

1. Calculer les nombres suivants.
a. $1\times2\times3\times4+1$ **b.** $2\times3\times4\times5+1$ **c.** $3\times4\times5\times6+1$
2. Quelle remarque ces calculs inspirent-ils ?
3. On considère la fonction `mystere` ci-contre écrite en langage Python.
Cette fonction calcule la racine de sommes de la forme exposée dans la question **1.**

```
1 from math import *
2
3 def mystere(n):
4     produit=...
5     somme=produit+1
6     return sqrt(somme)
```

a. Compléter la ligne 4.
b. Exécuter cette fonction pour différentes valeurs de l'entier naturel n.
c. Conjecturer alors une expression explicite de ces sommes en fonction de l'entier naturel n.
4. Démontrer cette conjecture.

Aide
2. a. La fonction `sqrt` de la bibliothèque `math` calcule la racine carrée d'un nombre positif entré en argument.

TP2 Coïncidences ?

1. Calculer les nombres suivants.
a. $\dfrac{1^3+2^3+3^3}{3\times2}-2$ **b.** $\dfrac{2^3+3^3+4^3}{3\times3}-2$ **c.** $\dfrac{3^3+4^3+5^3}{3\times4}-2$ **d.** $\dfrac{4^3+5^3+6^3}{3\times5}-2$
2. Que remarque-t-on ? Est-ce une coïncidence ? Argumenter.

TP3 Des contraintes de conception

Un client commande des cartes de vœux auprès d'une société d'imprimerie.
Le modèle initialement retenu est une carte rectangulaire de dimensions 15 cm × 6 cm. Toutefois, le service fabrication demande de modifier les dimensions pour obtenir des cartes dont l'aire est égale à 154 cm^2. Pour des raisons techniques, les modifications des dimensions de la carte initiale doivent obéir à la contrainte suivante : si on diminue la longueur a d'une certaine quantité, sa largeur b doit être augmentée du double de cette quantité.

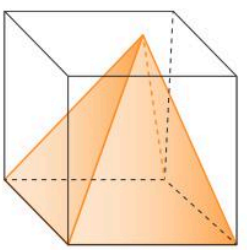


À l'écrit ou à l'oral, expliquer la démarche permettant de déterminer les dimensions qui doivent être fixées pour ces cartes de vœux.

TP4 Un aquariophile fan d'égyptologie !

Dans un aquarium cubique de côté 10 cm, il y a une décoration pyramidale.
Cette pyramide est pleine, sa base est le fond de l'aquarium et son sommet est un point de la face supérieure.

Quelle hauteur d'eau faut-il mettre pour que le volume d'eau soit égal à la moitié du volume du cube ?



SPÉCIMEN

CHAPITRE

4 Ordre dans $\mathbb{R}$ Inéquations

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Comparer deux quantités
- CAPACITÉ 2 Résoudre une inéquation du premier degré
- CAPACITÉ 3 Modéliser une situation par une inéquation



Au fil du temps

La construction de l'ensemble des nombres réels est une avancée récente des mathématiques, initiée au milieu du XIX^{e} siècle pour permettre le développement de « l'analyse réelle », théorie extrêmement féconde qui a permis des progrès majeurs dans toutes les sciences. Les grands artisans de cette construction sont Bolzano, Weiertrass, Méray, Cantor ou encore Dedekind.

L'ensemble des nombres réels est « ordonné », grâce à la « relation d'ordre $\leqslant$ », qui permet de comparer les nombres réels entre eux.

SPÉCIMEN

Des maths partout !

Depuis des siècles, l'humanité a été attirée par le souci de comparer les grandeurs et par les valeurs extrêmes. C'est au milieu du XIX^{e} siècle que le mont Everest, dans la chaîne de l'Himalaya à la frontière entre Népal et Chine (région du Tibet), est identifié comme le probable plus haut sommet sur Terre. C'est effectivement le cas, et il culmine à 8 849 mètres d'altitude.

Le mont Everest.



RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2030

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Comparer des nombres

1. Compléter par le symbole $<$ ou $>$. Justifier.

a. $\frac{13}{17}\ldots 1$ **b.** $\frac{7}{3}\ldots 1$ **c.** $3-\left(\frac{2}{3}\right)^2\ldots 2-15\times\frac{2}{9}$

d. $\frac{9}{7}\ldots 2-\frac{4}{7}$ **e.** $20\div\frac{25}{3}\ldots\frac{12}{11}$ **f.** $2003\times 10^{-3}\ldots 1+\frac{103}{100}$

2. Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant.

$$\frac{3}{2};\ \frac{7}{8};\ \frac{5}{6};\ \frac{11}{8};\ 1-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ -21\times\frac{1}{6}$$

C Inégalités et intervalles

Dans chaque cas, traduire sous forme d'appartenance à un (ou des) intervalle(s) les inégalités vérifiées par le réel x.

1. $x\leqslant\frac{2}{3}$ **2.** $x>-8$ **3.** $x<4$ et $x\geqslant -3$

4. $x\geqslant 7$ **5.** $-6<x\leqslant\sqrt{2}$ **6.** $x\geqslant 5$ ou $x<1$

D Solutions d'une équation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $-2x+3=5x-4$

b. $-4(3-x)=7$

c. $3(2x-1)=8x-(x+6)$

d. $(3x-2)^2=7x^2+(2x+1)(x-4)$

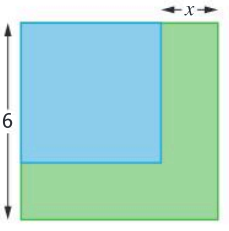
2. On considère l'équation $(E):3x^2+13x=5-x$.

Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont solution de l'équation (E). Justifier.

a. 0 **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** 5 **d.** -5

E Modéliser un problème

Un paysagiste veut créer dans une parcelle carrée de côté 6 m un bassin carré comme l'indique le schéma ci-contre. Le reste du terrain sera formé d'une allée parsemée de gazon. Il souhaite que l'aire de l'allée ne dépasse pas 20 m^2.



On note x la largeur de l'allée.

1. À quel intervalle doit appartenir le nombre réel x ?

2. Exprimer le côté du bassin en fonction de x.

3. Montrer que le souhait du paysagiste se traduit par l'inégalité $-x^2+12x\leqslant 20$.

4. Les valeurs de x suivantes répondent-elles au souhait du paysagiste ?

a. $x=5$ **b.** $x=2$ **c.** $x=1$ **d.** $x=2{,}3$ **e.** $x=0{,}8$

Conjecturer les valeurs possibles de x répondant au souhait du paysagiste.

HACHETTE LIVRE

automatismes

Automatismes transversaux

1 Calculer les nombres suivants.

1. $a = 1001^2 - 999^2$ **2.** $b = 98 \times 102$ **3.** $c = 99^2$

2 Calculer A et B et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

$$A = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \text{ et } B = \frac{-2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{-2 + \frac{1}{3}}.$$

3 Donner la nature des nombres suivants.

1. $a = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$ **2.** $b = \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)$

3. $c = \dfrac{\sqrt{27} - \sqrt{12}}{3\sqrt{3}}$ **4.** $d = \dfrac{18 \times 10^7}{0{,}9 \times \left(10^{-8}\right)^2}$

4 ABC est un triangle tel que $AB = 3 + \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$ et $BC = 1 + 3\sqrt{2}$.
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Pour les exercices 5 et 6, développer et réduire chaque expression.

5 **1.** $A(x) = 7(1 - 2x) - (-x + 6)$
2. $B(x) = (-x + 5)(2x + 1) - 3x(x - 3)$

6 **1.** $A(x) = (x - 1)^2$
2. $B(x) = (3x + 2)^2$
3. $C(x) = (1 - 2x)(1 + 2x)$

Pour les exercices 7 et 8, factoriser chaque expression.

7 **1.** $f(x) = -3x^2 + 2x$
2. $g(x) = 27x^2 - 9x$
3. $h(x) = (x + 1)(3x - 4) - (x + 1)(1 - x)$

8 **1.** $f(x) = x^2 + 2x + 1$
2. $g(x) = 9 - 4x^2$
3. $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Pour les exercices 9 et 10, résoudre les équations.

9 **1.** $-4x + 7 = 2x + 3$ **2.** $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} = 1 - x$

3. $2(1 - x) + 1 = 2 - 3(2x + 1)$ **4.** $\dfrac{2x}{3} = 5$

10 **1.** $1 - 2x^2 = x^2 + 2$
2. $(2x - 1)(-4x + 7) = 0$
3. $3x(5x + 1) = 0$

Automatismes préparatoires au chapitre

11 Ranger les nombres suivants par ordre croissant.

$$\frac{13}{4} ; -\frac{13}{5} ; \frac{53}{20} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{4} ; -1 ; \frac{13}{5} ; -\frac{13}{4} ; 0 ; -\frac{7}{5} ; 1.$$

12 Compléter les pointillés par le symbole $<$ ou $>$.

1. $\dfrac{11}{3} \ldots \dfrac{10}{11}$ **2.** $\dfrac{3}{2} \ldots \dfrac{7}{4}$ **3.** $-\dfrac{2}{3} \ldots -\dfrac{4}{5}$

4. $\dfrac{3}{8} \ldots \dfrac{3}{7}$ **5.** $10^{-3} \ldots 10^{-4}$ **6.** $\sqrt{81} \ldots \dfrac{901}{10^2}$

13 Parmi les nombres suivants, lesquels vérifient l'inégalité $-2x + 3 < 1$?

1. -2 **2.** 1 **3.** 3 **4.** $\dfrac{1}{2}$ **5.** $\dfrac{4}{3}$

14 Représenter sur la droite des réels et exprimer sous forme d'appartenance à un intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que :

1. $x \leqslant -1$ **2.** $x > 3$ **3.** $-5 < x \leqslant 0$

4. $x \geqslant 0$ **5.** $-2 \leqslant x \leqslant -1$

15 Réduire les expressions suivantes au même dénominateur.

1. $\dfrac{x - 1}{x + 1} - 3$ **2.** $\dfrac{2a - 3}{a - 2} - \dfrac{1}{a}$

3. $\dfrac{a + 1}{a + 2} - \dfrac{a + 2}{a + 3}$ **4.** $\dfrac{1}{x^2 + 1} - 1$

16 Une salle de sport propose deux formules.
Formule A : 10 € la séance sans abonnement.
Formule B : une carte d'abonnement mensuelle de 60 € puis 4 € la séance.
Pour x séances effectuées, on note $A(x)$ le prix payé avec la formule A et $B(x)$ celui payé avec la formule B.
1. Exprimer $A(x)$ et $B(x)$ en fonction de x.
2. Résoudre l'équation $A(x) = B(x)$. Interpréter.

17 Dans chaque cas, déterminer les valeurs possibles de x sous forme d'intervalle.
1. A et B sont deux points tels que $AB = 7$. M est un point du segment $[AB]$, distinct de A et B, tel que $AM = x$.
2. $ABCD$ est un rectangle de périmètre 10 cm et tel que $AB = x$.

18 Soit x un réel positif. $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = x + 5$ et $AD = x + 3$.
Exprimer en fonction de x sous forme développée et réduite :
1. le périmètre de $ABCD$;
2. l'aire de $ABCD$;
3. la longueur AC.

SPECIMEN

activités

1 Opérations sur les inégalités

Objectif
Découvrir et démontrer l'effet des opérations sur les inégalités.

1 Conjecture sur la droite des réels

On considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$, que l'on a placés sur la droite des réels ci-dessous.



a. Reproduire la figure et, à l'aide du compas, construire en bleu les réels $a+1$ et $b+1$, en noir les réels $a-2$ et $b-2$, en vert les réels $3a$ et $3b$, puis, en rouge les réels $-2a$ et $-2b$.

b. Compléter les pointillés par les symboles $<$ ou $>$.

$a+1 \ldots b+1$; $a-2 \ldots b-2$; $3a \ldots 3b$; $-2a \ldots -2b$.

c. Quelles conjectures peut-on formuler lorsque l'on :

- ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité ?
- multiplie par un même nombre non nul les deux membres d'une inégalité ?

Info
a et b sont des nombres réels quelconques, on peut les placer n'importe où sur la droite des réels pourvu que $a < b$.

2 Démonstration

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et k un nombre réel non nul.

a. Quel est le signe de $a-b$?

b. Recopier et compléter chaque ligne de la démonstration suivante à l'aide des symboles $<$ ou $>$.

- **Si $k > 0$**, alors $k(a-b) \ldots 0$

Donc $k \times a - k \times b \ldots 0$

Ainsi $k \times a \ldots k \times b$

- **Si $k < 0$**, alors $k(a-b) \ldots 0$

Donc $k \times a - k \times b \ldots 0$

Ainsi $k \times a \ldots k \times b$

c. Énoncer la propriété qui vient d'être démontrée.

Info
On utilise la règle de distributivité :
$k(a-b) = k \times a - k \times b$

2 Comparer des nombres

Objectif
Découvrir un critère pour comparer deux nombres.

Un professeur propose à ses élèves de seconde le problème suivant.

Comparer, en argumentant, les deux nombres :
$A = 1{,}000\,000\,002^2$ et $B = 1{,}000\,000\,004$

Info
Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux, ou déterminer lequel est le plus grand des deux.

1 Léo décide d'utiliser sa calculatrice pour calculer le nombre A.

Il constate alors que sa calculatrice affiche le nombre B et il conclut alors que $A = B$.

La démarche de Léo est-elle convaincante ? Justifier.

Aide
Pour comparer deux nombres A et B, on peut étudier le **signe** de leur **différence** $A - B$.
En effet :

- si $A - B < 0$ alors $A < B$.
- si $A - B > 0$ alors $A > B$.
- si $A - B = 0$ alors $A = B$.

2 Marie s'intéresse à la différence $A - B$ afin d'étudier son signe.

Elle commence par transformer les écritures de A et B sous la forme $A = (1+2x)^2$ et $B = 1+4x$.

a. Donner la valeur du nombre x.

b. Montrer que $A - B = 4x^2$.

c. Quel est le signe de la différence $A - B$?

d. En déduire la comparaison des nombres A et B.

3 En suivant la même démarche que Marie, comparer les nombres $A = 0{,}999\,999^2$ et $B = 0{,}999\,998$.

SPECIMEN

Cours

1 Inégalités

Dans tout ce paragraphe, a, b, c, d et k sont des nombres réels.
Toutes les propriétés de ce paragraphe sont encore vraies en remplaçant les inégalités « larges » $\leqslant$ par des inégalités « strictes » $<$.

a Ordre dans $\mathbb{R}$

Propriété Si a, b et c sont tels que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$.

Exemple
Si $x \leqslant 2$ et $2 \leqslant y$, alors $x \leqslant y$.
On dit que la relation $\leqslant$ est « transitive ».

b Somme

Propriété Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une inégalité conserve l'ordre :

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a+k \leqslant b+k \quad \text{et} \quad a \leqslant b \Leftrightarrow a-k \leqslant b-k$$

Exemples
- Si $x+3 \leqslant 5$ alors $x+3-3 \leqslant 5-3$ donc $x \leqslant 2$.
- Si $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $3 \leqslant y \leqslant 4$, alors $1+3 \leqslant x+y \leqslant 2+4$ soit $4 \leqslant x+y \leqslant 6$.

Propriété On peut additionner membre à membre des inégalités **de même sens** : si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a+c \leqslant b+d$.

c Produit

Propriété
- Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre **strictement positif**, conserve l'ordre.

Si $k > 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow k \times a \leqslant k \times b$.

- Multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif**, change l'ordre.

Si $k < 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow k \times a \geqslant k \times b$.

Exemples
- Si $2x > 3$ alors $x > \frac{3}{2}$
- Si $-3x \leqslant 6$ alors $x \geqslant -2$

2 Comparaison de deux quantités

Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux ou sinon déterminer lequel est le plus grand des deux.

Propriété Pour comparer deux nombres a et b, on peut utiliser l'un des critères suivants.

① Critère de la différence : on étudie le signe de la différence $a-b$.
- Si $a-b<0$, alors $a<b$
- Si $a-b>0$, alors $a>b$
- Si $a-b=0$, alors $a=b$

② Critère du quotient : pour b strictement positif
- Si $\frac{a}{b}<1$, alors $a<b$
- Si $\frac{a}{b}>1$, alors $a>b$
- Si $\frac{a}{b}=1$, alors $a=b$

Exemples
- Pour comparer les nombres :
$A = 2\pi$ et $B = 4\sqrt{3}$
On obtient par la calculatrice les valeurs approchées :
$A \simeq 6{,}3$ et $B \simeq 6{,}9$
D'où $A < B$.
- Pour comparer les fractions :
$C = \frac{7}{9}$ et $D = \frac{12}{11}$
on remarque que $C < 1 < D$ ou on réduit au même dénominateur :
$C = \frac{77}{99}$ et $D = \frac{108}{99}$
D'où $C < D$.
- Étant donné un nombre $a < 0$, on souhaite comparer :
$E = (2a+3)^2$ et $F = 4a^2+9$
On étudie pour cela le signe de la différence :
$E - F = (2a+3)^2 - (4a^2+9) = 12a$
Puisque $a < 0$, alors $12a < 0$ d'où $E < F$.
- Soit t un réel vérifiant $0 < t < 1$.
Pour comparer $G = t^2$ et $H = t^3$ qui sont strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{H}{G}$ avec 1.
On a $\frac{H}{G} = \frac{t^3}{t^2} = t$ or $t < 1$ donc $\frac{H}{G} < 1$.
D'où $H < G$ soit $t^3 < t^2$.

Remarque
Il existe de nombreuses méthodes pour comparer deux nombres, et l'étude des variations d'une fonction en est une. Deux autres méthodes sont employées dans l'exemple ci-contre.

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Comparer deux quantités

Énoncé **1.** Dans chaque cas suivant, comparer les nombres A et B donnés en précisant les cas d'égalité.

a. a et b étant deux réels négatifs, $A = ab + 9$ et $B = (a+3)(b+3)$.

b. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, $A = \dfrac{2}{n}$ et $B = \dfrac{4}{n^2}$.

2. a. Comparer, pour tout réel x vérifiant $x > 1$, les nombres $A = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $B = \dfrac{x+2}{x}$.

b. En déduire la comparaison des nombres $\dfrac{100\,001}{99\,999}$ et $\dfrac{100\,002}{100\,000}$.

Solution rédigée

1. a. On étudie le signe de la différence :

$$A - B = (ab+9) - (ab+3a+3b+9) = -3(a+b)$$

a et b étant négatifs, alors $-3(a+b) \geqslant 0$. Ainsi $A - B \geqslant 0$ d'où $A \geqslant B$.

De plus, $A = B$ si et seulement si $a = -b$; vu que a et b sont négatifs, $A = B$ si et seulement si $a = b = 0$.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, A et B sont strictement positifs, on peut alors comparer le quotient $\dfrac{A}{B}$ et 1. On calcule ce quotient :

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{n} \div \frac{4}{n^2} = \frac{2}{n} \times \frac{n^2}{4} = \frac{n}{2}$$

Comme $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{n}{2} \geqslant 1$ c'est-à-dire $\dfrac{A}{B} \geqslant 1$ soit finalement $A \geqslant B$.

Enfin, $A = B$ si et seulement si $n = 2$.

2. a. Pour tout réel $x > 1$, on étudie le signe de la différence :

$$A - B = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x} = \frac{(x+1)\times x}{(x-1)\times x} - \frac{(x+2)\times(x-1)}{x\times(x-1)}$$

$$= \frac{(x^2+x) - (x^2-x+2x-2)}{x(x-1)} = \frac{2}{x(x-1)}$$

On a $2 > 0$ et vu que $x > 1$, alors $x > 0$ et $x - 1 > 0$ donc ce quotient est strictement positif. Finalement, pour tout réel $x > 1$, on a $A > B$.

b. Pour $x = 100\,000$ d'après **2. a.**, on obtient alors $\dfrac{100\,001}{99\,999} > \dfrac{100\,002}{100\,000}$.

Point méthode

1. et **2.** Pour comparer deux nombres qui dépendent d'une (ou plusieurs) variable(s), on peut mettre en œuvre un des critères (critère du signe de la différence ou critère du quotient).

Point méthode

1. b. Pour appliquer le critère du quotient, vérifier au préalable que les nombres à comparer sont **strictement positifs**.
Ce critère est souvent utilisé lorsque les nombres à comparer font apparaître des puissances, des produits ou des quotients.

Point méthode

1. a. et **2. a.** Pour étudier le **signe** d'une quantité, on l'écrit sous forme **factorisée** et/ou d'un **unique quotient**.
2. b. On fait le lien avec la question précédente.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 380 Voir exercices similaires nos 40 à 45

19 Soient a et b deux réels de même signe.
Comparer les nombres :

$$A = (a-b)^2 \text{ et } B = a^2 + b^2$$

20 Soit a un réel quelconque.
Comparer, suivant les valeurs de a, les nombres :

$$A = a^2 + 1 \text{ et } B = (a+1)^2$$

21 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Comparer les nombres :

$$A = (a+b)^2 \text{ et } B = a^2 + 3b^2$$

22 Soient a et b deux réels strictement positifs.

Comparer les nombres $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ et $B = 2$.

On pourra calculer $A - B$ et réduire cette différence au même dénominateur.

23 Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.
1. En utilisant le critère du quotient, comparer les nombres $A = 3a^4$ et $B = 6a^3$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant le critère de la différence.

24 Soient a et b deux réels de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ et :

$$A = \frac{a-1}{b-1} \text{ et } B = \frac{a+1}{b+1}$$

1. Justifier que $A - B = \dfrac{2(a-b)}{(b-1)(b+1)}$.
2. Comparer alors A et B selon les valeurs de a et b.
3. Sans calculatrice, comparer alors les nombres suivants.
a. $\dfrac{123\,456\,788}{987\,654\,321}$ et $\dfrac{123\,456\,790}{987\,654\,323}$

b. $\dfrac{9{,}000\,001}{5{,}000\,002}$ et $\dfrac{11{,}000\,001}{7{,}000\,002}$

SPECIMEN

Cours

3 Résolution d'une inéquation

a Inéquations

Définition Une inéquation à une inconnue est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu désigné par une lettre.

Résoudre une inéquation d'inconnue x, c'est trouver **toutes les valeurs** de x pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Ces valeurs sont les **solutions** de l'inéquation.

Exemple

$6x+5 \geqslant 4x-3$ est une inéquation du premier degré d'inconnue x.

- Si $x=2$, alors $6x+5=17$ et $4x-3=5$.
Or $17>5$ donc 2 est solution de l'inéquation.
- Si $x=-5$, alors $6x+5=-25$ et $4x-3=-23$.
Or $-25<-23$ donc -5 n'est pas solution de l'inéquation.

Info

Pour vérifier qu'un nombre est solution d'une inéquation, on remplace l'inconnue par ce nombre dans chaque membre **séparément** et on compare les deux résultats obtenus.

Remarque

On dit que deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

b Résolution d'une inéquation du premier degré

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on regroupe tous les termes contenant x dans un membre et tous les autres termes dans l'autre membre en utilisant les propriétés des inégalités.

Voir page 86

Exemple

Résoudre l'inéquation $3x-1>12x-7$

On transforme à chaque étape l'inéquation par une inéquation équivalente, en cherchant à « isoler » x dans le membre de gauche.

On ajoute 1 à chaque membre puis on soustrait $12x$ à chaque membre.

$$\begin{array}{rl} & 3x-1>12x-7 \\ +1 & 3x>12x-7+1 \quad +1 \\ -12x & 3x-12x>-7+1 \quad -12x \end{array}$$

On réduit : $-9x>-6$

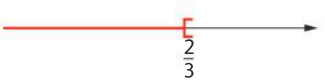
Puis on divise chaque membre par -9 qui est un nombre négatif donc il faut changer le sens de l'inégalité.

$$\begin{array}{rl} & -9x>-6 \\ \div(-9) & x<\dfrac{-6}{-9} \quad \div(-9) \end{array}$$

On simplifie : $x<\dfrac{2}{3}$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres réels strictement inférieurs à $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$.



En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a $\mathcal{S}=\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$.

Exemple

$$6x+5 \geqslant 4x-3$$

On soustrait $4x$ puis 5 à chaque membre on obtient :

$$2x \geqslant -8$$

On divise par 2 chaque membre (2 est positif donc l'ordre est conservé) on obtient :

$$\frac{2x}{2} \geqslant -\frac{8}{2}$$

Soit $x \geqslant -4$

$\mathcal{S}=[-4;+\infty[$

SPECIMEN

méthode

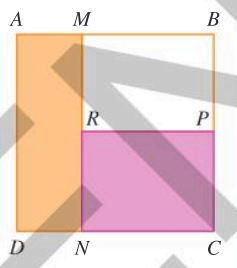
Capacité 2 Résoudre une inéquation du premier degré
Capacité 3 Modéliser une situation par une inéquation

Énoncé

1. Résoudre l'inéquation $-4x+\frac{1}{6}\leqslant\frac{5}{3}$.

2. Une entreprise demande à une agence de publicité de lui concevoir des affiches selon le modèle représenté ci-contre dans lequel :
- $ABCD$ est un carré de côté 5 m ;
- P est le milieu de $[BC]$;
- M est un point du segment $[AB]$.

L'agence doit respecter la contrainte suivante : l'aire du rectangle $AMND$ doit être strictement inférieure aux deux-tiers de l'aire du rectangle $RPCN$.
À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que la contrainte soit satisfaite ?



Solution rédigée

1. Pour résoudre cette inéquation, on soustrait $\frac{1}{6}$ à chaque membre.

$$-4x+\frac{1}{6}\leqslant\frac{5}{3}\Leftrightarrow-4x+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\leqslant\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow-4x\leqslant\frac{9}{6}\Leftrightarrow-4x\leqslant\frac{3}{2}$$

On divise chaque membre par -4, ce qui revient à multiplier par $\frac{-1}{4}$.

$-4x\leqslant\frac{3}{2}\Leftrightarrow-4x\times\frac{-1}{4}\geqslant\frac{3}{2}\times\frac{-1}{4}\Leftrightarrow x\geqslant-\frac{3}{8}$. Donc $S=\left[-\frac{3}{8};+\infty\right[$

Point méthode
1. Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.
L'inverse de $\frac{-4}{1}$ est $\frac{1}{-4}$, soit $\frac{-1}{4}$.

2. On cherche la position du point M sur le segment $[AB]$, on peut donc introduire la variable x telle que $AM=x$.
On commence par chercher l'ensemble des valeurs possibles de x dans le cadre du problème : $M\in[AB]$ donc $x\in[0;5]$.
On exprime ensuite l'aire des deux rectangles en fonction de x.
Aire$(RPCN)=PC\times NC=2{,}5(5-x)=12{,}5-2{,}5x$
Aire$(AMND)=AD\times AM=5x$
La contrainte se traduit par l'inéquation : $5x<\frac{2}{3}(12{,}5-2{,}5x)$.
On résout cette inéquation :

$$5x<\frac{2}{3}(12{,}5-2{,}5x)\Leftrightarrow5x<\frac{25-5x}{3}$$

On multiplie par 3 les deux membres et on obtient une inéquation équivalente : $15x<25-5x$
$\Leftrightarrow 20x<25$ en ajoutant $5x$ aux deux membres
$\Leftrightarrow x<\frac{25}{20}$ en divisant par 20 les deux membres
$\Leftrightarrow x<1{,}25$
Or $x\in[0;5]$ on en déduit que $x\in[0;1{,}25[$.
Conclusion : pour satisfaire la contrainte imposée, le point M doit se trouver à strictement moins de 1,25 m du point A.

Point méthode
2. Pour modéliser ce type de problème :
- on choisit une inconnue en fonction de ce qui est demandé ;
- on traduit chaque donnée de l'énoncé en langage mathématique et on résout l'inéquation obtenue ;
- on conclut.

Point méthode
2. Avant de conclure, il faut tenir compte de l'intervalle contenant les valeurs possibles de l'inconnue.

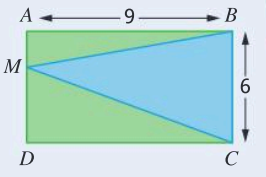
J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 381 Voir exercices similaires nos 50 à 54 et 61

25 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $9x+4\leqslant3x-2$ **2.** $\frac{x+4}{5}\leqslant2x$

26 On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB=9$ cm et $AD=6$ cm. M est un point du segment $[AD]$.
Où faut-il placer le point M pour que l'aire du triangle ABM soit inférieure ou égale au quart de l'aire du triangle DCM ?



SPECIMEN

Je revois mon cours

Inégalités

a, b, c et k sont des nombres réels.

• Ajouter ou soustraire un même nombre à chaque membre d'une inégalité **conserve** l'ordre.

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a+k \leqslant b+k \quad \text{et} \quad a \leqslant b \Leftrightarrow a-k \leqslant b-k$$

• Multiplier (ou diviser) par un même nombre **strictement positif** chaque membre d'une inégalité **conserve** l'ordre : si $k > 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow k \times a \leqslant k \times b$.

• Multiplier (ou diviser) par un même nombre **strictement négatif** chaque membre d'une inégalité **change** l'ordre : Si $k < 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow k \times a \geqslant k \times b$.

Résoudre une inéquation

$$2(3-4x) < 5-(x+6)$$

• Développer et réduire chaque membre de l'inéquation.

$$6-8x < 5-x-6$$
$$6-8x < -1-x$$

• Isoler l'inconnue dans un membre à l'aide des propriétés sur les inégalités pour obtenir une inéquation de la forme $ax < b$.

$$-7x < -7$$

Ici on a ajouté x et soustrait 6 aux deux membres.

• Être attentif au signe de a dans $ax < b$ pour savoir s'il faut changer ou non le sens de l'inégalité.

$$x > 1$$

Ici on a divisé chaque membre par –7 qui est négatif donc on a changé le sens de l'inégalité.

Donc $S =]1;+\infty[$.

Comparer deux nombres réels

Si A et B sont écrits sous forme décimale, on compare ces deux formes.

Si A et B sont écrits sous forme fractionnaire, on peut les réduire au même dénominateur.

Pour comparer deux nombres : A et B

Si $B > 0$

On peut étudier le signe de leur différence $A - B$.

On peut comparer $\frac{A}{B}$ et 1.

On peut comparer A et B à un même nombre C qui s'intercale entre eux : si $A < C$ et $C < B$ alors $A < B$



Je m'exerce à démontrer

Pour tout nombre réel $x \in]0\,;1]$, $x \leqslant \frac{1}{x}$.

DÉMO PAS À PAS hachette-clic.fr/26de2031

SPECIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2032

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Voir corrigés p. 381

	a	b	c
1. Le nombre -2 est solution de l'inéquation :	$x^2+1<4x$	$x^2+1>4x$	$-\frac{1}{2}x+3>1$
2. La résolution de l'inéquation $-8x+5>x+6$ conduit à :	$x<-\frac{1}{9}$	$x>-\frac{1}{9}$	$x>\frac{1}{9}$
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x+3\leqslant\frac{2x}{5}$ est :	$S=[-5;+\infty[$	$S=]-\infty;5]$	$S=]-\infty;-5]$
4. Si $x\geqslant 3$, alors :	$\frac{x}{2}\geqslant 1{,}5$	$-x\geqslant -3$	$x-3$ est positif
5. Si $-2<x<5$, alors :	$-6<x-4<1$	$-2<-x<5$	$-15<-3x<6$
6. Dire que $6x+9$ est strictement positif signifie que :	$x>0$	$x>-\frac{3}{2}$	$x>\frac{3}{2}$
7. Pour tout réel x :	$(3x+2)^2\leqslant 12x+4$	$(3x+2)^2\geqslant 12x+4$	$(3x+2)^2=9x^2+4$
8. Pour tout réel x tel que $0<x<1$:	$x^3<x^2$	$x^3>x^2$	$x^2(x-1)<0$
9. Si A et B sont deux points tels que $AB=4$, et M un point du segment $[AB]$ tel que $AM=x$, alors :	$BM\in[0;4]$	$BM=4-x$	$2AM\in[0;2]$
10. Pour tous réels x et y, si $x>y$ alors :	$x-y>0$	$\frac{x}{y}>1$	$\frac{x}{y}<1$

vrai ou faux ?

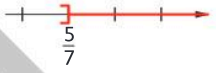
Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. On considère l'inéquation $-7x+5>0$.
L'ensemble des réels x solutions de cette inéquation :

a. vérifie $x>2$;

b. se représente sur la droite graduée par :



c. se note $S=\left]-\infty;\frac{5}{7}\right[$.

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4(x-2)^2-3$$

a. Pour tout réel x, $f(x)\geqslant -3$.

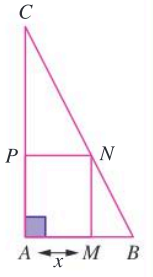
b. 0 est solution de l'inéquation $f(x)<0$.

c. $f\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant\frac{61}{9}$

d. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant 2x(2x-1)$ est $S=\left[\frac{13}{14};+\infty\right[$.

Partie B.

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=4$ et $AC=8$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM=x$. N et P sont les points des segments $[BC]$ et $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.



1. $x\in[0;8]$

2. $x\in[0;4]$

3. $\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AC}$

4. $MN=8-2x$

5. Chercher les valeurs de x telles que le périmètre du rectangle $AMNP$ soit supérieur ou égal à 14 revient à résoudre l'inéquation :

$$16-2x\geqslant 14$$

6. Le périmètre du rectangle $AMNP$ est supérieur ou égal à 14 si $x\in[1;4]$.

SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2033

Acquérir des automatismes

27 Vrai ou faux ?

1. -2 est solution de l'inéquation $3-x^2>0$.

2. 5 est solution de l'inéquation $\frac{2}{5}x<-3$.

3. $\frac{1}{3}$ est solution de l'inéquation $3x+4\geqslant 5$.

Pour les exercices 28 et 29, résoudre les inéquations.

28 **1.** $-3x<-6$ **2.** $x-8>12$

3. $\frac{x}{5}\geqslant 3$ **4.** $-5x+2<-3$

29 **1.** $2x<3x-9$ **2.** $-4x<0$

3. $\frac{-2x}{3}\leqslant 1$ **4.** $\frac{3}{4}x<\frac{3}{4}$

Pour les exercices 30 et 31, comparer les nombres donnés.

30 **1.** $1-\frac{1}{3}$ et $4\times\frac{1}{3}$ **2.** $\frac{5}{7}$ et $\frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ et $\frac{4}{3}\div 5$ **4.** $\sqrt{45}$ et $\sqrt{20}+\sqrt{5}$

31 **1.** 4,024 et 4,24

2. $3{,}1\times10^{-2}$ et 30×10^{-3}

3. $4-2^3$ et 2^{-2}

4. $\frac{3^{15}}{3^{10}}$ et $(3^3)^2$

32 Associer chaque inégalité à son écriture sous forme d'appartenance à un intervalle.

① $x\leqslant 5$	ⓐ $x\in[4;+\infty[$
② $x>4$	ⓑ $x\in[5;+\infty[$
③ $x\geqslant 5$	ⓒ $x\in]4;+\infty[$
④ $x\geqslant 4$	ⓓ $x\in]-\infty;5]$

33 **1.** Donner un encadrement de π à 10^{-2} près.

2. En déduire un encadrement à 10^{-2} près des nombres suivants.

a. 2π **b.** -3π

c. $2\pi-1$ **d.** $-3\pi+5$

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-6x^2-2$$

1. Comparer l'image de $\sqrt{3}$ et l'image de $-\frac{1}{3}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Comparer $f(x)$ et $f(-x)$.

3. Quel est le signe de $f(x)$? Justifier.

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Comparer deux quantités

Voir p. 87

Pour les exercices 35 à 37, a et b sont deux nombres réels tels que $a<b$. Dans chaque cas, comparer les nombres donnés.

35 **1.** $a-5$ et $b-5$ **2.** $3a$ et $3b$

3. $-0{,}2a$ et $-0{,}2b$ **4.** $\frac{a}{6}$ et $\frac{b}{6}$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2034

36 **1.** $a+8$ et $b+8$ **2.** $4a+1$ et $4b+1$

3. $-a$ et $-b$ **4.** $3-2a$ et $3-2b$

37 **1.** $\frac{a-2}{7}$ et $\frac{b-2}{7}$ **2.** $4(a-5)$ et $4(b-5)$

3. $\frac{-3a}{11}$ et $\frac{-3b}{11}$ **4.** $-3(a+1)$ et $-3(b+1)$

38 a et b sont deux nombres réels tels que :

$$5\leqslant a\leqslant 7 \text{ et } -2\leqslant b\leqslant 9$$

Déterminer un encadrement des nombres suivants.

1. $a+b$ **2.** $-b$ **3.** $a-b$

4. $5a$ **5.** $-3b$ **6.** $4a-3b$

39 Dans chaque cas, comparer les nombres.

1. $\frac{8}{7}$ et $\frac{11}{12}$ **2.** $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ et 4

3. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ et $\sqrt{24}$ **4.** 400×10^{-5} et 0,05

40 Soit x un nombre réel. On considère les nombres $A=x^2+5$ et $B=6x-4$.

1. Étudier le signe de $A-B$.

2. En déduire la comparaison de A et B.

41 On considère x et y deux réels quelconques. Comparer, en justifiant, les nombres suivants.

$$A=x^2+y^2 \text{ et } B=2xy$$

42 Soit x un nombre réel.

Comparer les nombres $(x+1)^2$ et $2x+1$.

43 Soit x un nombre réel positif.

Comparer les nombres $\frac{6x+2}{3x+5}$ et 2.

SPÉCIMEN

44 Comparer les nombres suivants.

1. $0{,}8^{10}$ et $0{,}8^{9}$ **2.** 7^{-4} et 7^{-5}

3. 3^{n} et 3^{n+1}, où n est un entier relatif.

4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$, où n est un entier relatif.

45 Soit n un entier naturel. On considère les nombres $A = 8\times 5^{n}$ et $B = 2\times 5^{n+1}$.

1. Calculer $\frac{A}{B}$.

2. En déduire la comparaison de A et B.

46 On considère x un nombre réel strictement supérieur à 1.

1. Comparer, en justifiant, les nombres suivants.

$$A = x^2 + x \text{ et } B = x + 1$$

2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $0 < x < 1$.

47 **1.** Comparer les nombres $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2+3}$.

2. a et b sont deux réels strictement positifs.

a. Montrer que : $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{a+b}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab(a+b)}$.

b. En déduire la comparaison des nombres :

$$A=\frac{1}{a+b} \quad \text{et} \quad B=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

CAPACITÉ 2 Résoudre une inéquation du premier degré

Voir p. 89

48 Recopier et compléter les différentes étapes de la résolution de chaque inéquation.

1. Pour résoudre l'inéquation $x+7<1$, on … 7 à chaque membre, l'inéquation est équivalente à $x \ldots -6$.
L'ensemble des solutions est : $S = \ldots$.

2. Pour résoudre l'inéquation $-9x<3$, on divise chaque membre par …, on obtient $x \ldots -\frac{1}{3}$.
L'ensemble des solutions est : $S = \ldots$.

3. Pour résoudre l'inéquation $\frac{x}{4}<-7$, on … chaque membre par …, on obtient $x < \ldots$.
L'ensemble des solutions est : $S = \ldots$.

4. Pour résoudre l'inéquation $4x<6x+5$, on …. $6x$ à chaque membre, on obtient $\ldots x<5$.
Puis, en divisant chaque membre par …, on a $x \ldots -2{,}5$.
L'ensemble des solutions est : $S = \ldots$

49 Le professeur de mathématiques demande aux élèves de résoudre l'inéquation $3x-1\leqslant 2$.
Mathilde affirme que les solutions sont tous les nombres réels strictement négatifs. Enzo lui indique qu'elle a dû faire une erreur car le nombre 1 est solution de l'inéquation.

1. Que penser de ces affirmations ?

2. Résoudre cette inéquation.

Pour les exercices **50** *à* **53**, *résoudre les inéquations.*

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2035



50 **1.** $12x+8\geqslant 4$

2. $7x-6\leqslant 10x$

3. $5x+1<9x-4$

4. $\frac{7x}{8}>2x$

51 **1.** $3x-\frac{7}{3}<\frac{5}{12}$ **2.** $4-2x>\frac{2}{3}$

3. $7(2x-5)\geqslant 4x-2$ **4.** $\frac{3x}{4}\leqslant 2x-1$

52 **1.** $3(x-1)\leqslant 4-(7-2x)$ **2.** $\frac{11}{2}>4-2{,}5x$

3. $4-2x\geqslant\frac{3}{4}(x+1)$ **4.** $\frac{4x+1}{5}>x-2$

53 **1.** $\frac{x}{3}+2>\frac{7}{3}$ **2.** $-5x-2\leqslant 3(x-1)$

3. $6x-2>\frac{4x-2}{3}$ **4.** $2x-6\geqslant 4-(5-7x)$

54 Associer à chaque inéquation son ensemble de solutions.

① $2x-7<3$ ⓐ $S=]-\infty;5]$

② $-4x+12\leqslant -8$ ⓑ $S=]5;+\infty[$

③ $6-x<1$ ⓒ $S=]-\infty;5[$

④ $\frac{x+22}{3}\leqslant 9$ ⓓ $S=[5;+\infty[$

CAPACITÉ 3 Modéliser une situation par une inéquation

Voir p. 89

55 Une association culturelle organise chaque année des spectacles et propose les deux formules suivantes.
Formule A : une adhésion annuelle de 60 € puis 8 € par spectacle.
Formule B : une adhésion annuelle de 80 € puis 6 € par spectacle.
À partir de combien de spectacles par an la formule B est-elle plus avantageuse que la formule A ?

56 Maeva est une passionnée de lecture et possède beaucoup de livres. Elle souhaite participer au vide grenier de son village pour vendre ses livres.
Le prix de l'emplacement est de 25 €.
Si elle fixe le prix d'un livre à 1,50 €, combien devra-t-elle en vendre pour gagner au moins 100 € ?

57 **1.** ABC est un triangle équilatéral de côté a. Exprimer sa hauteur en fonction de a.

2. Quelle doit être la longueur du côté d'un triangle équilatéral pour que sa hauteur soit inférieure ou égale à $\sqrt{27}$?

SPECIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2033

58 Un cylindre a pour rayon 3 cm.
Quelle doit être sa hauteur pour que son volume soit inférieur ou égal à 126 cm^3 ?

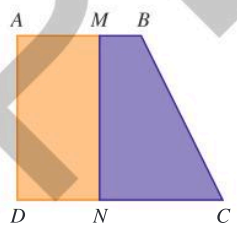
59 PYTHON Sami souhaite se rendre régulièrement à la piscine municipale. Les tarifs sont les suivants.
Tarif A : 4,30 € par entrée.
Tarif B : carte d'abonnement annuel à 30 € puis 2,60 € par entrée.
Pour savoir quelle formule sera la plus avantageuse, il programme la fonction Python ci-dessous.

```
def tarif(x):
    a=...
    b=...
    if a<b:
        print("tarif ... le plus avantageux")
    else:
        print("tarif ... le plus avantageux")
```

1. Recopier et compléter ce programme.
2. Qu'afficherait ce programme lors de la saisie de l'instruction `tarif(20)` ? Justifier.
3. Déterminer le tarif le plus avantageux pour Sami, selon son nombre annuel d'entrées à la piscine.

60 Les longueurs des côtés d'un triangle sont trois entiers consécutifs.
Déterminer les valeurs possibles des côtés de ce triangle afin que son périmètre soit strictement compris entre 18 cm et 30 cm.

61 Caroline veut créer un espace de rangement dans une pièce de son appartement. La pièce, représentée sur la figure ci-dessous, a une forme de trapèze de dimensions $AB = 3$ m, $AD = 5$ m et $DC = 4$ m.



Soit M un point du segment $[AB]$. On pose $AM = x$.
Elle souhaite aménager un dressing dans le rectangle $AMND$ et des étagères pour ses livres dans le trapèze $MBCN$.
1. À quel intervalle doit appartenir x ?
2. Montrer que l'aire du trapèze $MBCN$ est $17{,}5 - 5x$.
3. Où faut-il placer le point M sur $[AB]$ pour que l'aire de son dressing soit strictement supérieure aux deux tiers de l'aire de l'espace livres ?

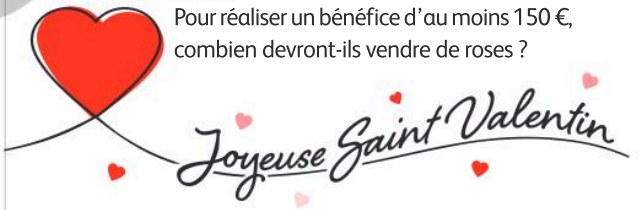
62 Un camion a été rempli de caisses de 75 kg. La pesée de ce camion, avant sa sortie de l'entrepôt, indique une masse totale de 10,6 tonnes. Sur son trajet, il devra passer sur un pont dont la masse maximale autorisée est de 9 tonnes.
Combien de caisses, au minimum, faut-il retirer de ce camion pour que sa masse totale ne dépasse pas 9 tonnes ?

63 On considère le programme de calcul ci-dessous.

- Choisir un nombre.
- Prendre son triple.
- Prendre l'opposé du résultat et lui ajouter 15.

1. Quels nombres faut-il choisir pour que le résultat de ce programme de calcul soit strictement négatif ?
2. Quels nombres faut-il choisir pour que le résultat de ce programme de calcul appartienne à l'intervalle $[-2 ; 3]$?

64 Les élèves de la Maison Des Lycéens veulent organiser une vente de roses à l'occasion de la Saint Valentin. Ils s'interrogent sur le nombre de roses à acheter.
Chaque rose coûte 2 € mais le fleuriste leur consent une réduction de 5 % s'ils achètent plus de 100 roses.
Ils ont fixé le prix de vente d'une rose à 3 €.
Sachant qu'ils ont également acheté de la décoration pour un montant de 45 €, quel sera le bénéfice s'ils vendent 100 roses ?



Pour réaliser un bénéfice d'au moins 150 €, combien devront-ils vendre de roses ?

65 Un théâtre propose trois tarifications possibles pour la saison de spectacles 2025-2026.
Tarif A : 150 € pour une carte permettant d'assister à tous les spectacles de la saison.
Tarif B : 75 € pour un abonnement qui permet d'acheter chaque place à 6 €.
Tarif C : 19 € pour chaque place à « plein tarif ».
On appelle x le nombre de spectacles auxquels Nolwenn veut assister pendant la saison 2025-2026.
1. Exprimer en fonction de x les prix $P_A(x)$, $P_B(x)$ et $P_C(x)$ que devrait payer Nolwenn selon le tarif utilisé.
2. Quel est le tarif le plus intéressant pour 8 spectacles ?
3. En résolvant des inéquations, déterminer le tarif le plus intéressant pour Nolwenn en fonction du nombre de spectacles auxquels elle doit assister.

SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Inégalités

66 x et y sont deux réels tels que $x < y$.
1. Dans chaque cas, donner deux réels x et y vérifiant cette inégalité.
a. $x > 0$ et $y > 0$
b. $x < 0$ et $y > 0$
c. $x < 0$ et $y < 0$
2. Compléter les pointillés avec les symboles $<$ ou $>$.
a. $3x \ldots 3y$ **b.** $-2x \ldots -2y$
c. $x+7 \ldots y+7$ **d.** $x-1 \ldots y-1$
e. $-2x+3 \ldots -2y+3$.

67 Compléter les pointillés par les symboles $<$, $\leqslant$, $>$ ou $\geqslant$.
1. Si $a \leqslant b$, alors $-3a \ldots -3b$.
2. Si $a > b$, alors $0{,}5a \ldots 0{,}5b$.
3. Si $-2x < -4$, alors $x \ldots 2$.
4. Si $4x \geqslant 6$, alors $x \ldots \dfrac{3}{2}$.

68 Soit x un réel tel que $-1 < x \leqslant 2$.
Déterminer un encadrement de chacun des nombres suivants.
1. $2x$ **2.** $-3x$ **3.** $-x$ **4.** $4x-1$

69 x et y sont deux réels tels que $x \in [0;1]$ et $y \in [-1;2]$.
Déterminer un encadrement de chacun des nombres suivants.
1. $5x$ **2.** $-y$ **3.** $x+y$
4. $2x+3y$ **5.** $x-y$ **6.** $-4x+5y$

70 x et y sont deux réels tels que $-5 \leqslant x \leqslant -3$ et $2 \leqslant y \leqslant 3$.
Déterminer un encadrement de chacun des nombres suivants.
1. $3x$ **2.** $-x$ **3.** $x+y-1$
4. $4x+2y$ **5.** $-3x+2y+1$ **6.** $x-y$

71 $ABCD$ est un rectangle tel que :
$4{,}5 < AB < 4{,}6$ et $6{,}1 < AD < 6{,}2$
Déterminer un encadrement du périmètre du rectangle $ABCD$.

72 Dans chaque cas, déterminer un encadrement du nombre x.
1. $-1 < 3x-1 < 1$ **2.** $3 \leqslant 1-2x < 4$

73 Dans chaque cas, déterminer le signe de l'expression. Justifier.
1. $3x^2+5$ **2.** $-9x^2-1$
3. $-7(x+1)^2-5$ **4.** $3(2x^2+1)-(x^2-1)$

74 **1.** Un triangle équilatéral a un périmètre compris strictement entre 2,4 et 2,7.
Déterminer un encadrement de son côté.
2. Le périmètre P d'un cercle vérifie $1 < P < 2$.
Déterminer un encadrement de son rayon.
3. Le prix d'un article est de 124 €. Durant la période des soldes, il subit une baisse comprise entre 25 % et 50 %.
Déterminer un encadrement du prix de l'article pendant les soldes.

75 x et y sont deux nombres réels non nuls. Dans chaque cas, indiquer toutes les possibilités pour les signes de x et y.
1. $xy > 0$ **2.** $xy < 0$
3. $xy > 0$ et $x+y > 0$ **4.** $xy > 0$ et $x+y < 0$

76 **1.** Le diamètre d'un cercle est de 8 cm. Donner un encadrement de son périmètre en cm.
2. Un triangle a deux côtés de longueurs respectives 5 cm et 7 cm. Que peut-on affirmer de la longueur du troisième côté ?
3. Un triangle isocèle et un carré ont un côté commun. Le périmètre du triangle isocèle est supérieur à celui du carré. Que peut-on en déduire sur les longueurs de leurs côtés ?

77 Un rectangle a pour périmètre 20 cm. On note x et y les longueurs, en cm, des côtés de ce rectangle.
1. Exprimer y en fonction de x.
2. Sachant que $1{,}3 < x < 1{,}4$, donner un encadrement de y.

78 L'objectif de cet exercice est de comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est un nombre réel strictement positif.
1. a. Montrer que, si $a > 1$, alors $a^2 > a$ et $a^3 > a^2$.
b. En déduire que $1 < a < a^2 < a^3$.
2. Montrer que, si $0 < a < 1$, alors :
$a^3 < a^2 < a < 1$
3. Soit $x \in]0;1[$.
a. Comparer $1+x$, $(1+x)^2$ et $(1+x)^3$.
b. Comparer $1-x$, $(1-x)^2$ et $(1-x)^3$.

79 **Vrai ou faux ?**
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. Si $x > 5$, alors $x \geqslant 5$.
2. Si $-2x \leqslant -1$, alors $x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Si $a > 1$, alors $a^2 > 1$.
4. Si $a^2 \geqslant 4$, alors $a \geqslant 2$.
5. Si $-3x < 0$, alors $x < 3$.
6. Si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$, alors $x-y \leqslant 0$.
7. Si $-4x+5 < 0$, alors $x > \dfrac{5}{4}$.

SPECIMEN

2 Comparaison de deux quantités

80 Soit R un réel strictement positif.
On considère un cube d'arête R et une boule de rayon R.
Comparer le volume du cube et celui de la boule.

81 **1.** Montrer que $A^2 = B^2$ si, et seulement si $A = B$ ou $A = -B$.
2. Soient $A = 1-\sqrt{3}$ et $B = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.
a. Comparer A^2 et B^2.
b. En déduire une expression simplifiée de B.
3. Montrer que $\sqrt{45-20\sqrt{5}} = 5-2\sqrt{5}$.

82 Soit n un entier naturel non nul. Comparer les nombres suivants.
1. $(n+1)^2$ et n^2+1 **2.** $1-\frac{1}{n}$ et $1+\frac{1}{n}$
3. $\frac{n+1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ **4.** $\frac{n}{n+1}$ et $\frac{n-1}{n}$

83 **1.** a et b sont deux nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$.
a. Donner le signe de $a-b$ et celui de $a+b$.
b. Factoriser a^2-b^2. En déduire que $a^2 \leqslant b^2$.
2. Réciproquement, on suppose que a et b sont deux nombres réels positifs tels que $a^2 \leqslant b^2$.
En exploitant la factorisation précédente, montrer que $a \leqslant b$.
On a ainsi : $0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que : $0 \leqslant a \leqslant b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.
4. On considère un rectangle de largeur ℓ et de longueur L telles que $1{,}2 < \ell < 1{,}3$ et $2{,}5 < L < 2{,}6$.
Déterminer un encadrement de la longueur de la diagonale D de ce rectangle.

Démo
84 Soient a et b deux nombres réels positifs.
On note $A = \sqrt{a+b}$ et $B = \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
1. Dans chaque cas, comparer les nombres A et B.
a. $a = 16$ et $b = 9$
b. $a = 4$ et $b = 5$
2. Montrer que $A^2 - B^2 = -2\sqrt{ab}$.
3. En utilisant le résultat de l'exercice **83** en déduire que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
4. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
5. Applications
a. Pour $x \geqslant 0$, comparer $\sqrt{100+x^2}$ et $10+x$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$\sqrt{4n^2+9} \leqslant 2n+3.$$

Analyse d'un énoncé

85 **Exercice commenté**
1. À l'aide de la calculatrice, comparer si possible les nombres suivants.
a. $\frac{1}{0{,}9}$ et $1{,}1$ **b.** $\frac{1}{0{,}99}$ et $1{,}01$
c. $\frac{1}{0{,}999\,999\,99}$ et $1{,}000\,000\,01$

› Comparer deux nombres, c'est dire si l'un est plus grand que l'autre ou s'ils sont égaux. La calculatrice permet-elle de conclure ici ?

2. Réduire au même dénominateur $\frac{1}{1-x} - (1+x)$.
Quel est le signe de cette différence si x est un réel positif ?

› On pourra pour cela compléter les pointillés dans l'identité suivante, valable pour tout réel $x \neq 1$.
$$\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1+x}{1} = \frac{\ldots}{1-x}$$

3. Expliquer alors comment comparer les nombres de la question **1.**

› Il convient ici de faire le lien entre les quotients de la question **2.** et ceux de la question **1.** Remplacer x par des valeurs bien choisies.

86 **Application immédiate**
Trouver une méthode permettant de comparer les quotients suivants, sachant qu'une calculatrice scientifique usuelle affiche le même résultat lorsqu'on les calcule.
$$\frac{1\,234\,567\,891}{1\,234\,567\,892} \text{ et } \frac{1\,234\,567\,892}{1\,234\,567\,893}$$

87 **1.** a et b sont deux réels tels que $0 < a \leqslant b$.
Montrer que $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.
2. Applications
a. a et b sont deux réels tels que :
$$0 < \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$$
Montrer que $a \geqslant b$.
b. Soit x un nombre réel tel que $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$.
Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$.
c. Un rectangle d'aire 1 cm² a une largeur ℓ telle que $\frac{2}{3} < \ell < \frac{3}{4}$.
Donner un encadrement de sa longueur L.

SPÉCIMEN

88 Soit n un entier naturel. En utilisant le critère du quotient, comparer les nombres suivants.

1. 3×2^n et 2^{n+1}
2. $0{,}5\times 3^{n+1}$ et 2×3^n
3. $\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ et $\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$
4. -3×4^n et $-5\times 2^{2n+1}$

89 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-4x+7$$

1. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x)=(x-2)^2+3$$
2. Calculer $f(2)$.
3. Comparer $f(x)$ et $f(2)$.
4. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

90 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-2x^2-4x+3$$

1. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x)=-2(x+1)^2+5$$
2. Calculer $f(-1)$.
3. Comparer $f(x)$ et $f(-1)$.
4. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

91 Soit a un nombre réel positif ou nul.

On souhaite comparer les nombres $A=\dfrac{a+1}{a+2}$ et $B=\dfrac{a+2}{a+3}$.

1. Comparer A et B pour $a=0$.
2. Montrer que $A-B=\dfrac{-1}{(a+2)(a+3)}$.
3. En déduire la comparaison de A et de B.
4. Comparer les nombres suivants.

a. $\dfrac{12{,}1}{12{,}2}$ et $\dfrac{12{,}2}{12{,}3}$ b. $\dfrac{1\,000\,001}{1\,000\,002}$ et $\dfrac{1\,000\,002}{1\,000\,003}$.

92 On souhaite comparer les nombres :

$$A=\frac{3{,}000\,000\,001}{4{,}000\,000\,001} \text{ et } B=\frac{3{,}000\,000\,002}{4{,}000\,000\,002}$$

1. La calculatrice permet-elle de comparer les nombres A et B ? Justifier.
2. On pose $x=10^{-9}$. Exprimer A et B en fonction de x.
3. Montrer que $A-B=\dfrac{-x}{(4+x)(4+2x)}$.
4. En déduire la comparaison de A et B.

93 Pour n entier naturel, on pose $A=\dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$.

1. a. Montrer que $A-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9n^2}{5(n^2+5)}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2n^2+1}{n^2+5}\geqslant\frac{1}{5}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2n^2+1}{n^2+5}<2$$

94 Parmi les inégalités suivantes, quelles sont celles qui sont vraies pour toutes les valeurs du nombre réel x ? Justifier.

1. $3x<5x$
2. $x^2+1\geqslant 1$
3. $(x+2)^2\geqslant x^2+4$
4. $x^2+2\geqslant 4x-2$
5. $3-x^2<3$
6. $-3x^2-7<0$

95 1. Dans chaque cas, calculer $x+\dfrac{1}{x}$ et comparer le résultat à 2.

a. $x=\dfrac{2}{3}$ b. $x=0{,}25$ c. $x=\sqrt{2}$

2. Montrer que, pour tout nombre réel $x>0$:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}$$

3. En déduire que, pour tout nombre réel $x>0$:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

4. Montrer que, pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$.

96 Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On note respectivement m et h les moyennes arithmétique et harmonique de a et b définies par $m=\dfrac{a+b}{2}$ et $h=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

1. Montrer que $h=\dfrac{2ab}{a+b}$.
2. Montrer que $m-h=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.
3. Comparer les moyennes arithmétique et harmonique m et h.

Info

En imaginant qu'un train effectue un aller-retour à une vitesse moyenne de a km/h à l'aller et de b km/h au retour, la vitesse moyenne du train sur le trajet aller-retour est égale à la *moyenne harmonique* h de a et b.



97 **Exercice guidé**

On considère a, b et c trois réels quelconques.

1. Développer et réduire la somme suivante.
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$$
2. En déduire l'inégalité :
$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$$

Piste de résolution

2. La somme $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$ est positive. Pourquoi ? Exploiter alors la positivité de cette somme écrite sous forme développée pour en déduire l'inégalité souhaitée.

SPECIMEN

3 Résolution d'une inéquation

Pour les exercices 98 à 106, résoudre chaque inéquation dans $\mathbb{R}$.

98 1. $x+5>4$ 2. $4x\leqslant 3$
3. $-5x<10$ 4. $\frac{x}{6}\geqslant -3$

99 1. $2x+7<9$ 2. $-3x+5\geqslant 6$
3. $4x-5>-2x+4$ 4. $-2x+7\leqslant 2x+5$

100 1. $2(1-x)<3(x+1)$ 2. $\frac{4}{3}x\geqslant -\frac{1}{2}$
3. $-3(x+2)-1\leqslant 2(2x+1)+5$

101 1. $4x+\frac{2}{3}<\frac{11}{3}$ 2. $2x-3>-2(1-x)$
3. $\frac{1}{2}x-3\geqslant \frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$

102 1. $3x+11>3(1+x)$ 2. $6>3x+7$
3. $\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\leqslant x+1$

103 1. $x-\frac{3}{4}<\frac{3}{4}x+1$ 2. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\geqslant \frac{1}{3}x+2$
3. $\frac{1-x}{2}-\frac{x}{3}<\frac{1-x}{3}$

104 1. $\frac{1-x}{2}-\frac{2x-5}{6}<1-\frac{x}{3}$
2. $4-(3x-1)\leqslant 5-2x$
3. $\frac{x-2}{4}+\frac{x-3}{5}\geqslant \frac{x-1}{2}$

105 1. $x^2+4x+12>(x+4)(x-6)$
2. $(x-3)(x+8)<(x+8)(x+5)$

106 1. $2x^2-3x+3\geqslant x^2+x-1$
2. $6x+x^2\leqslant -9$

107 Identifier et corriger l'erreur dans chacune des résolutions d'inéquations suivantes.

1. $5x+2>4$
$\Leftrightarrow 5x>2$
$\Leftrightarrow x>2-5$
$\Leftrightarrow x>-3$
$S=]-3\,;+\infty[$

2. $-3x-2\leqslant 1$
$\Leftrightarrow -3x\leqslant 3$
$\Leftrightarrow x\leqslant \frac{3}{-3}$
$\Leftrightarrow x\leqslant -1$
$S=]-\infty\,;-1]$

3. $2x-1\leqslant -x+2\Leftrightarrow 3x<3\Leftrightarrow x<1$
$S=]1\,;+\infty[$

108 Parmi les inéquations suivantes, trouver les paires qui ont le même ensemble de solutions.
1. $4x-8>0$ 2. $-2x+1>7$
3. $-2x>4$ 4. $x<-3$
5. $-x<-2$ 6. $2<-x$

109 PYTHON
On considère le programme ci-contre écrit en Python.

```
def inequation(a,b,x):
    if a*x+b<0:
        solution=True
    else :
        solution=False
    return solution
```

1. Que renvoie le programme dans chacun des cas suivants ?
a. `inequation(1,1,1)`
b. `inequation(-2,3,2)`
2. Quel est le rôle de ce programme ?
3. Dans le cas où a=-2 et b=3, déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles le programme renvoie True.

110 On considère les fonctions f et g définies par :
$$f(x)=\sqrt{2x-3} \text{ et } g(x)=\sqrt{-3x+6}$$
On note D_1 (resp. D_2) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'expression $f(x)$ (resp. $g(x)$) est définie.
1. Déterminer D_1 et D_2.
2. Soit h la fonction définie par :
$$h(x)=\sqrt{2x-3}+\sqrt{-3x+6}$$
On note D l'ensemble des valeurs de x telles que $h(x)$ est défini. Exprimer D en fonction de D_1 et D_2.
En déduire D sous forme d'intervalle.

Info
D_1, D_2 et D sont appelés les ensembles de définition des fonctions f, g et h.

111 1. Résoudre les inéquations suivantes.
a. $3x-5<7$ b. $-2x+4\leqslant 11$
2. Résoudre le système d'inéquations $\begin{cases}3x-5<7\\-2x+4\leqslant 11\end{cases}$ revient à trouver l'ensemble des réels x vérifiant simultanément les deux inéquations.
Résoudre ce système.
3. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants.
a. $\begin{cases}3x-1\leqslant x+3\\-2x+1>-x-9\end{cases}$ b. $\begin{cases}x+3>4\\-2x-4\geqslant 6\end{cases}$

112 Soit x un nombre réel positif. $ABCD$ est un rectangle tel que $AB=6$ cm et $AD=x+5$ cm.
1. Déterminer les valeurs de x telles que le périmètre de $ABCD$ soit inférieur ou égal à 42 cm.
2. Déterminer les valeurs de x telles que l'aire de $ABCD$ soit strictement supérieure à 120 cm^2.

SPECIMEN

113 Un laboratoire de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens.
On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens supplémentaires.
Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

114 Camille se présente à un examen qui comporte trois épreuves : le français (coefficient 3), l'anglais (coefficient 2) et les mathématiques (coefficient 4).
Camille a obtenu 8 en français et 9 en anglais, et pour réussir son examen elle doit obtenir une moyenne supérieure ou égale à 10.
Déterminer la note minimale qu'elle doit obtenir en mathématiques pour être reçue.

115 On modélise l'évolution de la population d'un village par $p(n) = 1\,500 - 50n$, où pour tout entier naturel n, $p(n)$ est le nombre d'habitants en $2020 + n$.
1. Quelle était la population du village en 2020 ?
2. Calculer la population du village en 2025.
3. Déterminer au bout de combien d'année la population sera strictement inférieure à 500.

116 L'organisateur d'un voyage scolaire dispose de deux devis pour les déplacements en bus.
Devis 1 : un forfait de 320 € plus 1,20 € par km.
Devis 2 : un forfait de 260 € plus 1,50 € par km.
1. Dans chaque cas, calculer et comparer les montants des deux devis pour une distance de :
a. 56 km
b. 150 km
2. Pour x km parcourus, exprimer les montants de chaque devis en fonction de x.
3. Déterminer, suivant les valeurs de x, le devis le plus avantageux.

117 La somme de trois entiers consécutifs est strictement comprise entre 6 072 et 6 078.
Déterminer ces trois entiers.

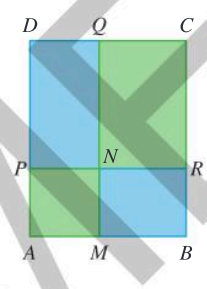
118 PYTHON
On donne la fonction Python ci-dessous.

```
def seuil():
    x=0
    while 30+2*x<40+1.5*x:
        x=x+1
    return x
```

1. Expliquer le rôle de cette fonction.
2. En résolvant une inéquation, déterminer la valeur renvoyée par la fonction `seuil()`.
3. Inventer un énoncé de problème conduisant à l'écriture de la fonction `seuil()`.

119 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 12$ et $AD = 8$.
M est un point du segment $[AB]$ distinct de A et de B. On pose $AM = x$.
1. Déterminer l'intervalle I auquel appartient x.
2. Déterminer les positions possibles du point M pour que l'aire du triangle ADM soit strictement supérieure à la moitié de l'aire du trapèze $DCBM$.

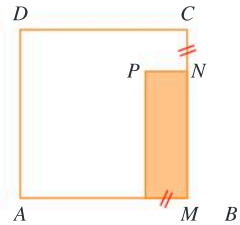
120 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4$ m et $AD = 6$ m.
On partage ce rectangle en quatre zones : un carré $AMNP$ et trois rectangles $MBRN$, $NRCQ$ et $PNQD$.
On pose $AM = x$.



1. À quel intervalle x doit-il appartenir ?
2. Exprimer l'aire du carré $AMNP$ en fonction de x.
3. Montrer que l'aire du rectangle $NRCQ$ est donnée par $x^2 - 10x + 24$.
4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle $NRCQ$ est strictement supérieure à l'aire du carré $AMNP$.

121 $ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $BC = 4$ cm. On note I le milieu du segment $[AD]$ et M un point quelconque du segment $[AB]$.
Déterminer les positions possibles du point M pour lesquelles l'aire du triangle CMI est inférieure ou égale au tiers de l'aire du rectangle $ABCD$.

122 $ABCD$ est un carré de côté 8 cm.
M et N sont des points des segments $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BM = CN = x$.
P est le point tel que $BNPM$ soit un rectangle.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2. Exprimer l'aire du rectangle $BNPM$ en fonction de x.
3. Montrer que l'aire du rectangle $BNPM$ est inférieure ou égale au quart de l'aire du carré $ABCD$.
4. Que peut-on dire du rectangle $BNPM$ lorsque son aire est égale au quart de l'aire de $ABCD$?

SPECIMEN

BILAN

123 15min Manipuler des inégalités

x et y sont deux nombres réels tels que :

$$-1 < x < 2 \text{ et } -2 < y < 1$$

Donner un encadrement des nombres suivants.

1. $x+y$ **2.** $3x-1$ **3.** $4x+3y$

4. $-y$ **5.** $x-y$ **6.** $-2x+4y+1$

124 15min Résolutions d'inéquations (1)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $-2x+5 < 4x-3$

2. $5(1-x)+3x \geqslant 2-2(-2x+1)$

3. $\dfrac{x+2}{3} \leqslant 2x$

125 15min Résolutions d'inéquations (2)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{3}-2x \geqslant x+\dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{x}{3} < 1-\dfrac{x}{6}$

3. $2(x-3)-(x-4) > x-6$

126 15min Résolutions d'inéquations (3)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{3}{4}x+1 > x-\dfrac{3}{2}$

2. $(x+1)(-x+3) \leqslant (1-x)(x+5)$

3. $\dfrac{2x+1}{2}-\dfrac{1-2x}{4} < 1-\dfrac{x}{4}$

127 15min Systèmes d'inéquations

1. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $8-4x \leqslant 6x-7$ **b.** $5(x+2)-x \leqslant 26$

2. En déduire la résolution du système

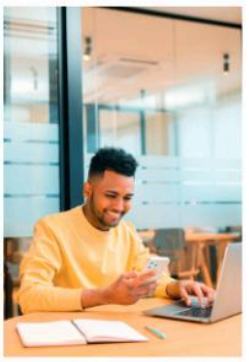
$$\begin{cases} 8-4x \leqslant 6x-7 \\ 5(x+2)-x \leqslant 26 \end{cases}$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels x qui vérifient simultanément les deux inéquations.

128 10min Le salaire

Le salaire mensuel d'un commercial est composé d'une part fixe de 1 500 € et d'une part variable égale à 4 % du montant x (en euro) des ventes réalisées dans le mois.

Déterminer les montants des ventes à réaliser pour que le salaire du commercial soit d'au moins 2 000 €.



129 10min Au concert

Le directeur d'une salle de concert a fixé à 18 € le prix d'entrée pour chaque concert.

Une carte d'adhérent annuelle permet d'obtenir une réduction de 40 % sur le prix d'entrée.

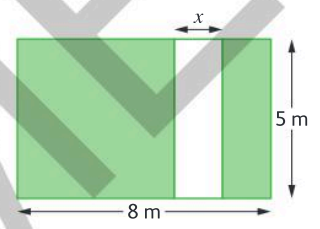
1. Anna, qui possède une carte d'abonnement, a payé 123,20 € pour assister à quatre concerts.

Déterminer le prix de la carte d'adhérent.

2. À partir de combien de concerts vus dans l'année est-il plus avantageux d'acheter une carte d'adhérent ?

130 15min Le jardin

Dans un jardin rectangulaire de dimensions 8 m sur 5 m, semé de pelouse, on souhaite aménager une allée de gravier de largeur x de sorte que l'aire de pelouse restante soit comprise entre 32 m^2 et 33 m^2.



Déterminer les largeurs possibles de l'allée.

131 15min Avec une fonction affine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x+3$$

1. Déterminer un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-1;1]$.

2. Dans chaque cas, déterminer toutes les valeurs de x dont l'image par la fonction f est :

a. strictement positive ;

b. inférieure ou égale à 3 ;

c. comprise strictement entre -2 et 4.

132 10min Comparer des nombres

Dans chaque cas, montrer que les nombres A et B sont égaux ou opposés.

1. $A = 1-2\sqrt{3}$ et $B = \sqrt{13-4\sqrt{3}}$

2. $A = \sqrt{2}+1$ et $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

3. $A = \sqrt{5}+2$ et $B = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

133 10min Comparer des aires

Soit a un réel strictement positif.

On considère un disque de rayon a, un rectangle de dimensions $3a$ et a et un triangle rectangle de base $6a$ dont la hauteur associée est $1{,}5a$.

1. Comparer les périmètres de ces trois figures.

2. Comparer les aires de ces trois figures.

3. Les périmètres et les aires de ces trois figures sont-ils rangés dans le même ordre ?

PREVIEW

134 15min Comparaison de a et $\frac{1}{a}$ pour $a>0$

1. Justifier que, pour tout réel $a>0$, on a :

$$a-\frac{1}{a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a}$$

2. Comparer alors a et $\frac{1}{a}$ lorsque $a>1$ puis lorsque $0<a<1$. Quand a-t-on égalité ?

3. **Applications :** comparer les nombres suivants.

a. $\frac{1}{\pi}$ et π **b.** $\frac{1}{0,7}$ et $0,7$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et $\sqrt{2}+1$ **d.** $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ et $\sqrt{5}-2$

135 35min Comparer des nombres

On souhaite comparer les deux nombres suivants.

$$a=\frac{100\,000\,000\,000}{100\,000\,000\,001} \text{ et } b=\frac{99\,999\,999\,999}{100\,000\,000\,000}$$

1. Pourquoi peut-on affirmer que chacun de ces quotients est strictement inférieur à 1 ? Peut-on comparer ces nombres à l'aide de la calculatrice ?

2. Pour comparer ces nombres, on considère x et y deux réels positifs tels que $x<y$ et les quotients :

$$A=\frac{x}{x+1} \text{ et } B=\frac{y}{y+1}$$

a. Justifier que $A-B=\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}$.

b. Déterminer alors le signe de $A-B$.

c. Comparer alors les quotients A et B.

d. En déduire la comparaison des nombres a et b.

136 5min Sommes de carrés

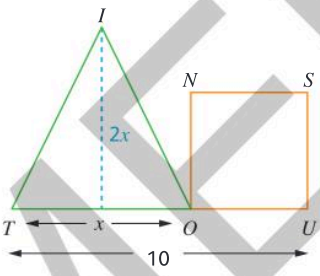
Déterminer dans quels cas le carré de la somme de deux nombres réels est inférieur ou égal à la somme des carrés des deux mêmes nombres.

Préciser les cas d'égalité.

137 10min TOI et NOUS

Le point O est un point quelconque de $[TU]$, TOI est un triangle isocèle de base $[TO]$ et $NOUS$ est un carré.

Les dimensions sont indiquées sur la figure qui ne respecte pas les proportions.



1. Déterminer l'intervalle dans lequel varie x, sachant que $TO=x$.

2. Exprimer $\mathscr{A}_T$ l'aire de TOI et $\mathscr{A}_C$ celle de $NOUS$ en fonction de x.

3. Déterminer les valeurs de x telles que l'aire de $NOUS$ soit supérieure ou égale à celle de TOI. ①

4. Déterminer les valeurs de x telles que le périmètre de TOI soit supérieur ou égal à celui de $NOUS$. ②

5. Est-il possible que les conditions ① et ② soient réalisées simultanément ? Si oui, pour quelles valeurs de x ?

APPROFONDISSEMENT

138 Des produits d'inégalités

a, b, c et d sont des nombres réels tels que :

$$0<a\leqslant b \text{ et } 0<c\leqslant d$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer par deux méthodes que $0<ac\leqslant bd$.

1. Première méthode

a. Montrer que $ac\leqslant bc$ et que $bc\leqslant bd$.

b. Conclure.

2. Deuxième méthode

a. Montrer que $ac-bd=c(a-b)+b(c-d)$.

b. Conclure.

3. On considère un rectangle de dimensions ℓ et L telles que $1,2<\ell<1,3$ et $2,5<L<2,6$.

Déterminer un encadrement de son aire.

139 Encore des produits d'inégalités

a, b, c et d sont des nombres réels tels que :

$$a\leqslant b \text{ et } c\leqslant d$$

Montrer que $ac+bd\geqslant ad+bc$.

140 Des inéquations avec des racines carrées

1. On considère l'inéquation $(E):\sqrt{2x-3}<1$.

a. Pour quelles valeurs de x l'expression $\sqrt{2x-3}$ est-elle définie ?

b. Résoudre l'inéquation (E).

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x+2}\geqslant 2$ **b.** $\sqrt{-4x+1}>2$

c. $\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$ **d.** $\sqrt{x+1}<-3$

141 Des inéquations avec des valeurs absolues

1. Exprimer, suivant les valeurs du réel x, $|-2x+3|$ sans utiliser le symbole valeur absolue.

2. Résoudre l'inéquation $|-2x+3|\leqslant 1$.

142 Un produit et une somme

Soient x et y deux nombres réels.

Montrer que $(1+x)(1+y)>1+x+y$ si, et seulement si, x et y ont le même signe.

SPECIMEN

143 Valeur maximale d'un produit

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$$

2. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité $x(1-x) = \frac{1}{4}$?

3. Déterminer la valeur maximale du produit de deux nombres réels dont la somme est égale à 1.

144 Une inégalité

Soit a un nombre réel strictement positif. On pose $A = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$.

1. Montrer que $A - \sqrt{2} = \frac{\left(a-\sqrt{2}\right)^2}{2a}$.

2. En déduire que, pour tout nombre réel a strictement positif on a :

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geqslant \sqrt{2}$$

3. Pour quelle valeur de a a-t-on l'égalité suivante ?

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) = \sqrt{2}$$

145 Une autre inégalité

1. Soit x un réel positif. Développer $\left(\sqrt{x} - 1\right)^2$.

2. En déduire que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$:

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$$

3. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

146 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour tous nombres réels a, b, c et d, on a $(ab+cd)^2 \leqslant \left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right)$.

147 Comparaison des racines carrées

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$.

1. Montrer que $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

2. En déduire que $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

3. Applications

a. Un terrain carré a une aire $\mathcal{A}$ telle que

$$399 < \mathcal{A} < 401.$$

Donner un encadrement de son côté.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{4n^2-1} < 2n.$$

148 Encore une inégalité !

1. On considère deux nombres réels x et y quelconques. Montrer que : $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

2. On désigne par a, b et c trois nombres réels quelconques. Montrer que : $ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Que peut-on dire de l'inégalité précédente lorsque $a = b = c$?

149 Comparaison de nombres

On souhaite comparer les nombres :

$$A = \sqrt{0{,}9\,999\,998} \text{ et } B = 0{,}9\,999\,999$$

1. La calculatrice permet-elle de comparer A et B ? Justifier.

2. Soit $x \in]0\,;0{,}5[$.

a. Donner un encadrement de $1-2x$.

b. Comparer $1-2x$ et $(1-x)^2$.

c. En utilisant le résultat de l'exercice 147, en déduire la comparaison de $\sqrt{1-2x}$ et de $1-x$.

d. Comparer les nombres A et B.

150 L'inégalité triangulaire

1. Dans chaque cas, comparer $|x+y|$ et $|x|+|y|$.

a. $x = 2$ et $y = -5$

b. $x = -4$ et $y = -6$

c. $x = 1$ et $y = -\sqrt{3}$

2. Montrer que, pour tous réels x et y, on a :

a. $|x \times y| = |x| \times |y|$ **b.** $x \times y \leqslant |x| \times |y|$

3. Pour x et y réels, développer $\left(|x+y|\right)^2$ et $\left(|x|+|y|\right)^2$.

4. Déduire des questions précédentes que, pour tous réels x et y, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

5. Dans quel cas a-t-on $|x+y| = |x|+|y|$?

151 Des quotients

a, b, c et d sont des réels strictement positifs tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

1. Montrer que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

2. Ranger par ordre croissant les nombres $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{2a+c}{2b+d}$, $\frac{a+2c}{b+2d}$, $\frac{3a+2c}{3b+2d}$ et $\frac{2a+3c}{2b+3d}$.

152 Une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

1. a. Montrer que, pour tous réels a et b :

$$f(a) - f(b) = (a-b)(a+b-4)$$

b. Comparer $f(a)$ et $f(b)$ dans chacun des cas suivants : $2 \leqslant a \leqslant b$ et $a \leqslant b \leqslant 2$.

c. Interpréter les résultats obtenus.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x - 8$$

a. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant respectivement les fonctions f et g ?

153 Des quotients

x, y et z sont trois réels positifs tels que $x \leqslant y + z$.

Montrer que : $\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$.

SPECIMEN

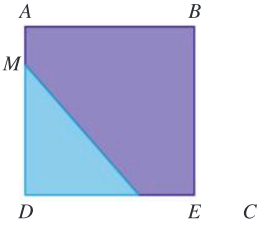
exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

154 Soit n un entier naturel non nul.
On considère le triangle ABC tel que $AB = n$, $AC = 2n$ et $BC = 2n + 1$.
Les mesures sont en centimètres.
Déterminer pour quelles valeurs de n le périmètre du triangle ABC est au moins de 60.

155 **Compréhension d'énoncé**

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. Le point M appartient au segment $[AD]$ et E est le point du segment $[CD]$ tel que $DE = 4$ cm.



Où faut-il placer le point M pour que l'aire du triangle DME ne dépasse pas un quart de l'aire du pentagone $ABCEM$?

Pour résoudre ce problème, répondre aux questions suivantes.
1. On note $AM = x$. Donner l'intervalle auquel appartient x.
2. Exprimer l'aire du triangle DME et du pentagone $ABCEM$ en fonction de x, puis montrer que la question peut être traduite par l'inéquation $12 - 2x \leqslant 6 + 0{,}5x$.
3. Résoudre cette inéquation.
4. Conclure sur la position du point M.

156 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-5}{x-3}$.
Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]3 ; +\infty[$, on a $f(x) < 1$.

157 Voici un extrait de la copie de Yuna. Corriger ses erreurs en tenant compte des remarques du professeur.

$2x + 3 \leqslant 3x - 4$

Repère l'opération effectuée

$-x \leqslant -7$

$x \leqslant 7$

$S =]-\infty ; 7]$

Observe le symbole

$\dfrac{x+4}{3} \leqslant 5x - 1$

Parenthèses

$x + 4 \geqslant 3 \times 5x - 1$

$-16x \leqslant -5$

On divise par –16

$x \geqslant -\dfrac{5}{16}$

Aller plus loin



158 Christian veut créer un potager rectangulaire dans son jardin. Son emplacement le contraint à envisager que la largeur ℓ soit comprise entre 6 m et 8 m. Il souhaite entourer son potager par une clôture grillagée. Il possède un rouleau de grillage lui permettant de poser une clôture dont la longueur serait comprise entre 30 m et 36 m.
Déterminer les valeurs possibles de la longueur de ce potager.

159 Un rectangle a pour longueur le double de sa largeur. Si on augmente de 1 cm la largeur alors son aire augmente au moins de 10 cm^2.
Déterminer les dimensions possibles de ce rectangle.

160 Résoudre le système d'inéquations suivant, c'est-à-dire déterminer toutes les valeurs de x vérifiant simultanément les deux inéquations.

$$\begin{cases} -2(3x+1) < 1 - (9x+4) \\ x - 2 < \dfrac{5x-3}{3} \end{cases}$$

On représentera l'ensemble des solutions de ce système sur une droite graduée.

161 Une voiture de police poursuit une voiture sur une autoroute.
La voiture se trouve à 80 km de la sortie et roule à 140 km/h.
La police se trouve à une certaine distance derrière la voiture et roule à 150 km/h avec sa sirène et son gyrophare.
La voiture de police peut-elle rattraper la voiture avant la sortie ?

162 PRISE D'INITIATIVES
Déterminer le nombre d'entiers solution de :

$$\left|\sqrt{n} - \sqrt{100}\right| < 1$$

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2036

163 PRISE D'INITIATIVES
Résoudre l'inéquation :

$$\big||x-4| - 5\big| \leqslant 2$$

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2037

SPECIMEN

TP Pratiquer l'algorithmique et programmer

PYTHON

Au club d'aviron

Objectif
Utiliser une structure conditionnelle et une boucle Tant que.

Le club d'aviron d'une ville propose deux formules pour ses futurs adhérents.
Formule A : un abonnement annuel de 80 euros et la séance coûte alors 10,50 euros.
Formule B : 17 euros la séance sans abonnement.

Partie A Formule au choix

On donne l'algorithme ci-contre et sa traduction en Python sous forme de fonction.

$A \leftarrow 80+10{,}5\times n$
$B \leftarrow 17\times n$
Si $A < B$
  Alors afficher « A »
  Sinon afficher « B »
Fin Si

```
def tarif(n):
    A=80+10.5*n
    B=17*n
    if A<B :
        print("A=",A)
    else :
        print("B=",B)
```

1. Quelles sont les variables utilisées dans cet algorithme ? Identifier celles qui sont saisies et celles qui sont calculées.
2. Expliquer ce que représente chaque variable dans le contexte de ce TP.
3. Quel est le rôle de ce programme ?
Exécuter ce programme pour n=5, n=10, n=13 et n=20.
Interpréter les résultats obtenus.

Partie B Formule la plus avantageuse

On donne la fonction Python ci-contre.

```
def seuil():
    n=0
    A=80
    B=0
    while A>B:
        n=n+1
        A=80+10.5*n
        B=17*n
    return n
```

1. En exécutant ce programme, donner la valeur retournée par la fonction seuil. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
2. Retrouver cette valeur en résolvant une inéquation.

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

Un rectangle dans un carré

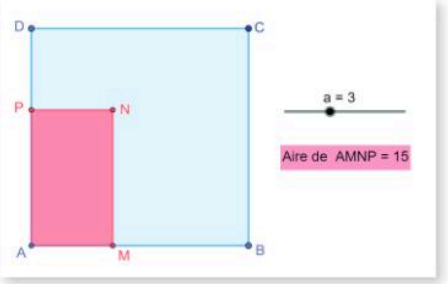
Objectif
Déterminer une aire maximale.

$ABCD$ est un carré de côté 8 cm. M et P sont des points variables des segments $[AB]$ et $[AD]$ tels que $AM = DP$. Le point N est tel que $AMNP$ soit un rectangle.
On s'intéresse à l'aire du rectangle $AMNP$.

Partie A Expérimentation et conjecture

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- Construire le carré $ABCD$ en plaçant A à l'origine du repère, B sur l'axe des abscisses et D sur l'axe des ordonnées.
- Créer un curseur, nommé **a**, variant de 0 à 8 avec un incrément de 0,01.
- Dans la barre de saisie, créer les points M=(a,0), P=(0,8-a) et N=(a,8-a).
- Construire le rectangle $AMNP$ et faire afficher son aire.

En faisant varier le curseur, quelle semble être l'aire maximale du rectangle $AMNP$?



Partie B Démonstration

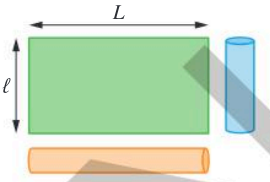
On pose $AM = x$.
1. À quel intervalle x doit-il appartenir ?
2. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.
Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
3. Montrer que $\mathcal{A}(x) - 16 = -(x-4)^2$.
4. En déduire l'aire maximale du rectangle $AMNP$.
Quelle est alors la nature de $AMNP$?

SPECIMEN

TP Mener une recherche

TP1 Une feuille et des cylindres

À partir d'une feuille de papier rectangulaire de longueur L et de largeur ℓ, on peut former deux cylindres : un de hauteur L et un autre de hauteur ℓ.



On note respectivement V_L et V_ℓ les volumes des cylindres de hauteur L et ℓ.

1. Calcul du volume V_L.

a. Exprimer le rayon du cylindre de hauteur L en fonction de ℓ.

b. En déduire que $V_L = \dfrac{\ell^2 L}{4\pi}$.

2. Exprimer de même le volume V_ℓ en fonction de ℓ et de L.

3. Comparer les volumes des deux cylindres en utilisant :

a. la méthode de la différence ;

b. la méthode du quotient.

TP2 L'inégalité arithmético-géométrique

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On note $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $g = \sqrt{ab}$.

m est la moyenne arithmétique des réels a et b, et g leur moyenne géométrique.

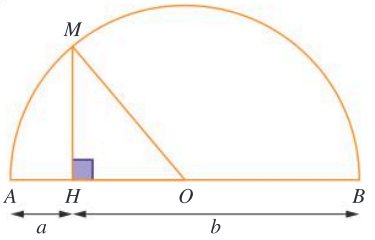
On se propose de comparer m et g.

1. Calculer et comparer m et g dans chacun des cas suivants.

a. $a = 1{,}2$ et $b = 4{,}8$ **b.** $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{2}$ **c.** $a = 5{,}5$ et $b = 59{,}5$.

2. Une comparaison géométrique

La figure ci-contre représente un demi-cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. H est un point du segment $[OA]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par H coupe le demi-cercle en M. On note $AH = a$ et $BH = b$.



a. Montrer que OM est la moyenne arithmétique de a et b.

b. Exprimer OH en fonction de a et b.

c. Montrer que MH est la moyenne géométrique de a et b.

d. En déduire que $g \leqslant m$.

3. Une comparaison algébrique

a. Développer $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$.

b. En déduire que $g \leqslant m$.

4. Une application

Montrer que, pour tous réels positifs a, b et c, on a : $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

5. Faire des recherches sur la moyenne arithmétique et géométrique, puis présenter des exemples concrets où elles interviennent.

TP3 On reste dans l'intervalle !

On considère deux nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Justifier que le quotient $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est bien défini.

2. Quel est le signe de $\dfrac{a+b}{1+ab}$?

3. Montrer que $a+b-1-ab = (a-1)(1-b)$.

4. En déduire que $\dfrac{a+b}{1+ab} \in [0\,;1]$.

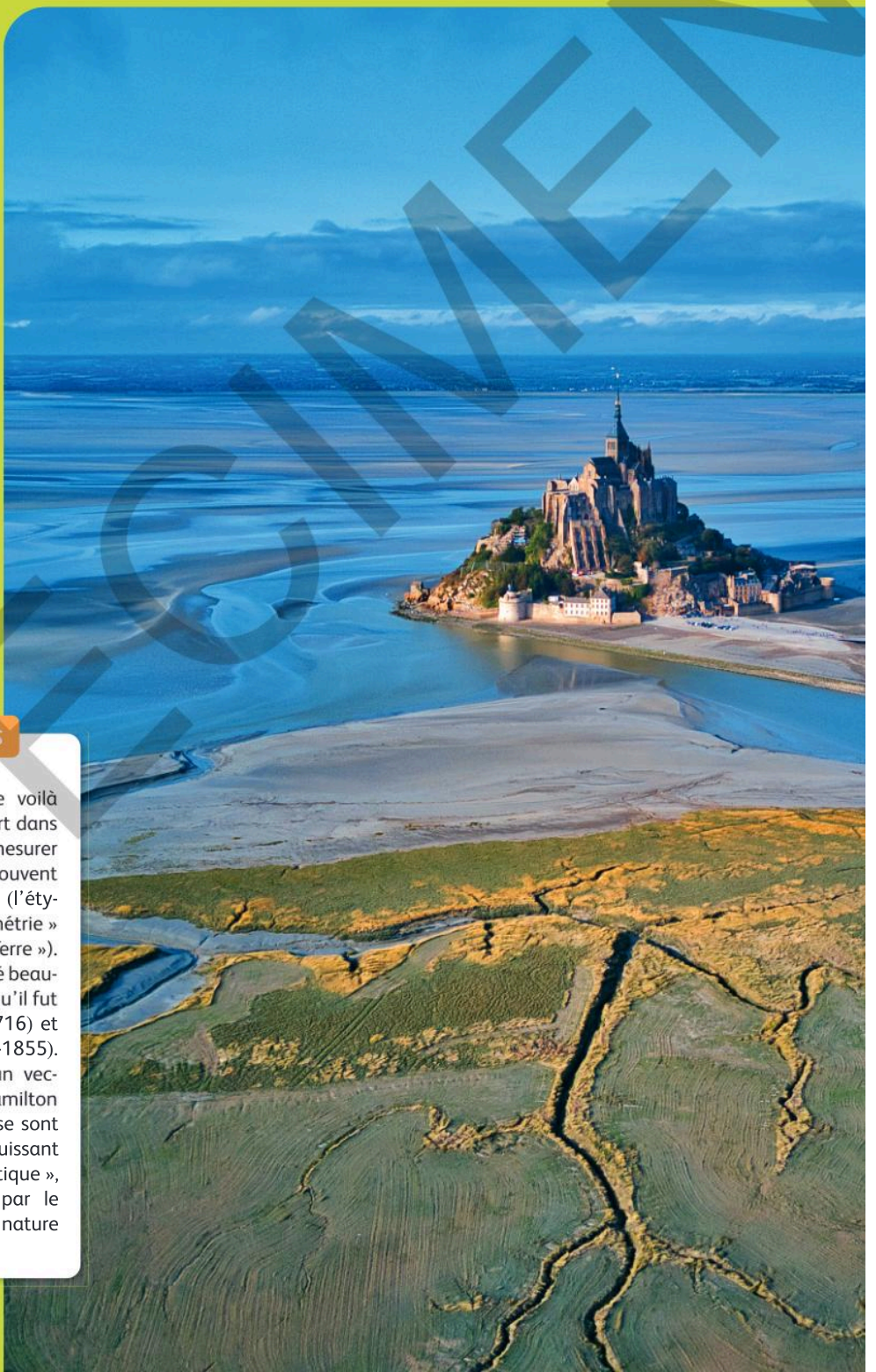
SPÉCIMEN

CHAPITRE

5 Géométrie plane Vecteurs

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes
- CAPACITÉ 2 Représenter géométriquement des vecteurs
- CAPACITÉ 3 Représenter la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel
- CAPACITÉ 4 Montrer l'alignement ou le parallélisme par la colinéarité de vecteurs
- CAPACITÉ 5 Résoudre des problèmes de géométrie avec des méthodes diverses



Au fil du temps

La géométrie est apparue voilà environ 5 000 ans, au départ dans un souci très concret de mesurer des longueurs et des aires, souvent pour les surfaces agricoles (l'étymologie du mot « géométrie » signifiant « mesure de la Terre »). L'outil des vecteurs est arrivé beaucoup plus récemment, puisqu'il fut conçu par Leibniz (1646-1716) et amélioré par Gauss (1777-1855). La définition moderne d'un vecteur sera formalisée par Hamilton (1805-1865). Les vecteurs se sont imposés comme un outil puissant de la « géométrie analytique », qui permet de résoudre par le calcul des problèmes de nature géométrique.

APERÇU

Des maths partout !

En physique classique, les « forces » sont représentées par un vecteur. Le calcul sur les forces est au centre de la modélisation par la physique d'un très grand nombre de situations. La marée, par exemple, s'explique par un système de forces gravitationnelles (de la Lune et du Soleil) et d'inertie (de la Terre).



Baie du Mont-Saint-Michel à marée basse

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2038

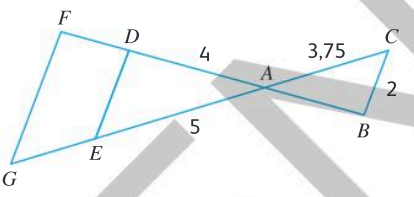
Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Théorème de Thalès et sa réciproque

On donne la figure ci-contre, avec : $AC = 3{,}75$; $BC = 2$; $AD = 4$; $AE = 5$ et $(DE) // (BC)$.



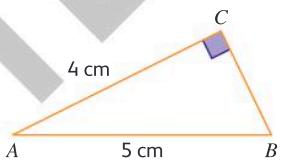
1. Calculer AB et DE.

2. On donne $AF = 6$ et $AG = 7{,}5$.

Les droites (FG) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier.

C Calculer dans un triangle rectangle

On considère le triangle ABC rectangle en C ci-contre.



1. Calculer la longueur BC.

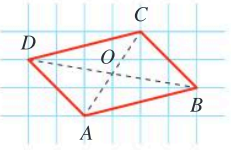
2. a. Exprimer le cosinus de l'angle $\widehat{B}$ en fonction des longueurs BC et AB.

b. En déduire une mesure approchée de l'angle $\widehat{B}$.

c. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{A}$ sans utiliser la trigonométrie.

D Vecteurs et parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.



1. Préciser l'image du point D par :

a. la translation qui transforme A en B.

b. la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

2. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes ?

a. $DC = BA$ **b.** $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$ **c.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$

d. $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$ **e.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ **f.** $OA = CO$

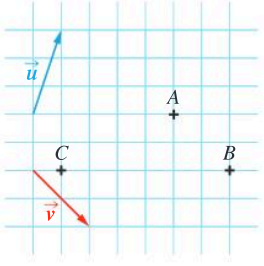
3. Compléter les égalités vectorielles suivantes :

a. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B\ldots}$ **b.** $\overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{OD}$ **c.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\ldots D}$

d. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A\ldots}$ **e.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{\ldots B} = \overrightarrow{AB}$ **f.** $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{C\ldots} = \vec{0}$

E Quelques constructions

Reproduire la figure ci-contre et placer les points D à I tels que :



1. D est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$

2. $\overrightarrow{BE} = \vec{v}$ **3.** $\overrightarrow{FC} = \vec{u}$

4. $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v}$ **5.** $\overrightarrow{CH} = \vec{v} - \vec{u}$

6. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ECOMETY

automatismes

Automatismes transversaux

1 Calculer.

1. $A = -4 \times 3 + (-2) \times (-5)$
2. $B = 3 + 2 \times (-1) + 15 \div 3$
3. $C = \left(1 + 2 \times (5-7)^2 - 3\right) \times 2$
4. $D = (3-7) \times (2-3^2)$

Pour les exercices **2** *et* **3**, *écrire chaque nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible.*

2 1. $\frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{3}{8}$ 2. $\frac{1}{2} - \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{8}\right)$ 3. $2 - \frac{3}{5}$
4. $\frac{3}{2} \times \frac{8}{15}$ 5. $7 \times \frac{4}{56}$ 6. $\frac{4}{15} \div \frac{2}{9}$

3 1. $\frac{2}{3} - \frac{12}{15} \times \frac{9}{8}$ 2. $\left(\frac{2}{3} - \frac{12}{15}\right) \times \frac{9}{8}$
3. $\frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ 4. $\frac{1 + \frac{2}{3}}{2 - \frac{6}{6}}$

4 Écrire chaque nombre sous la forme d'une unique puissance.

1. $4^3 \times 4^{-5}$ 2. $\frac{7^3}{7^5}$ 3. $(5^2)^{-2}$
4. $\frac{2^4 \times 2^{-6}}{(2^3)^4}$ 5. $9^5 \times \frac{3^7}{27^2}$ 6. $2^{10} \times 7^{10}$
7. $\frac{15^6}{3^6} \times 5^{10}$ 8. $0{,}01^2 \times 10^3$ 9. $\frac{1\,000}{0{,}001} \times 10^{-6}$

Pour les exercices **5** *et* **6**, *développer et réduire chaque expression proposée.*

5 1. $A(x) = 4 - (2x+3)$
2. $B(x) = 4(2x+3)$
3. $C(x) = 2x(1+3x) - (8x^2 - 2x + 3)$
4. $D(x) = (2x-1)(3x+1)$

6 1. $A(x) = (x-4)^2$
2. $B(x) = (5x-1)(5x+1) - 5x(x-1)$
3. $C(x) = (7x+2)^2 + 2(x-8)^2$

7 Factoriser les expressions suivantes.

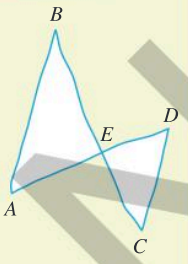
1. $A(x) = 121x^2 - 25$
2. $B(x) = 3x(2x+5) - (5-x)(2x+5)$
3. $C(x) = 49x^2 - 28x + 4$
4. $D(x) = (2x+1)^2 - (x+3)^2$

8 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.

1. Calculer les images par f de 0, de -3 et de 2.
2. Déterminer les antécédents par f de -2 ; 7 et de -3.
3. Le point de coordonnées $(-1 ; -1)$ appartient-il à la courbe représentative de f ? Justifier.

Automatismes préparatoires au chapitre

Pour les exercices **9** *à* **11**, *on considère la figure ci-contre réalisée à main levée. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et les droites (AD) et (BC) sont sécantes en E. On donne $ED = 3{,}6$; $CD = 6$, $EB = 7{,}2$ et $AB = 9$.*

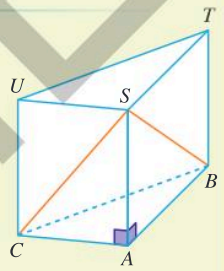


9 Justifier que $EC = 4{,}8$.

10 Montrer que le triangle ECD est rectangle.

11 Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ECD}$.

Pour les exercices **12** *à* **14**, *on considère le prisme droit $STUABC$. $SABC$ est une pyramide à base triangulaire. ABC est un triangle rectangle avec $AC = 4{,}5$ cm et $AB = 6$ cm. On sait de plus que $SB = 7$ cm.*

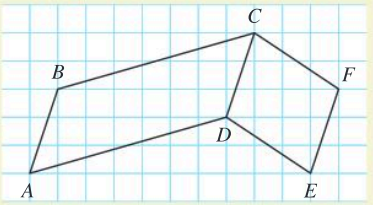


12 Calculer la hauteur SA de la pyramide $SABC$.

13 Calculer l'aire de la base ABC puis le volume V de la pyramide $SABC$. On rappelle que $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$ où h est la hauteur associée à la base.

14 Calculer le volume du prisme $STUABC$.

Pour les exercices **15** *à* **17**, *$ABCD$ et $CDEF$ sont des parallélogrammes.*



15 1. a. Donner tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABFE$? Justifier.
2. Donner un vecteur opposé à $\overrightarrow{CF}$.

16 Compléter les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\ldots}$ 2. $\overrightarrow{BA} = \ldots\overrightarrow{D}$ 3. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{B\ldots}$
4. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{A\ldots}$ 5. $\overrightarrow{FC} + \ldots\overrightarrow{D} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$

17 1. Placer le point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{ED}$ et H le symétrique de D par rapport à E.
2. Que représente le point C pour le segment $[GF]$? Justifier.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $CGEH$? Justifier.

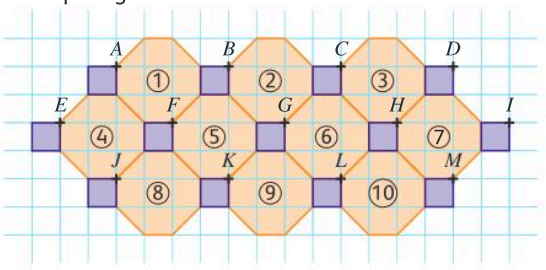
SPECIMEN

activités

1 Pavage, translations et vecteurs

Objectif
Définir un vecteur comme étant un outil pour décrire une translation. Définir la somme de deux vecteurs.

On considère le pavage ci-dessous.



1 Par la translation qui transforme le point A en F, quelle est l'image du point B ? du point H ? du polygone ⑥ ?
Tracer la flèche d'origine A et d'extrémité F.

2 Cette translation transforme également le point B en G. Tracer la flèche d'origine B et d'extrémité G. Quelle est la nature du quadrilatère $AFGB$?
Les translations de vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont alors identiques.

3 On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$. Quelle est l'image :
a. du point C ? **b.** du point F ? **c.** du polygone ① ? **d.** du polygone ④ ?

4 Compléter les égalités suivantes : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{F\ldots} = \ldots\overrightarrow{M} = \ldots\overrightarrow{K}$.

5 Indiquer si les vecteurs suivants sont égaux ou non.
a. $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{BG}$ **b.** $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{KE}$ **c.** $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{DI}$

6 On effectue désormais une première translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
a. Quelle est l'image du polygone ⑧ à l'issue de ces deux translations ?
b. Cet enchaînement de deux translations peut se résumer en une seule et unique translation. Donner et tracer un vecteur de cette unique translation.
c. Compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{J\ldots}$.

Info
1 La translation qui transforme le point A en F est aussi appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AF}$.

Info
2 On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont **égaux**.
On note $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG}$.

Info
6 L'enchaînement de deux translations successives de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{w}$. On dit alors que $\vec{w}$ est la **somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

2 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Objectif
Construire des points définis *via* des sommes de vecteurs et introduire le produit d'un vecteur par un réel.

1 Reproduire la figure ci-contre sur papier quadrillé.

2 **a.** Construire alors les points M, N et P définis par les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} \ ; \ \overrightarrow{ON} = \vec{u} + \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OP} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

b. Comparer les direction, sens et norme des vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OP}$ avec les direction, sens et norme du vecteur $\vec{u}$.

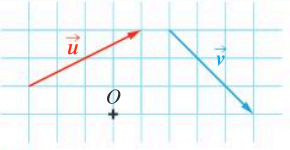
c. De même, tracer un représentant du vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$, puis de $\frac{3}{2}\vec{u}$.

3 On note $-\vec{v}$ le vecteur ayant même direction et même norme que le vecteur $\vec{v}$ mais de sens contraire à celui de $\vec{v}$.

a. Tracer un représentant du vecteur $-\vec{v}$, de la somme $\left(-\vec{v}\right)+\left(-\vec{v}\right)$, notée $-2\vec{v}$, et de la somme $\left(-\vec{v}\right)+\left(-\vec{v}\right)+\left(-\vec{v}\right)$, notée $-3\vec{v}$.

b. Comparer les direction, sens et norme des vecteurs $-2\vec{v}$ et $-3\vec{v}$ avec les direction, sens et norme du vecteur $\vec{v}$.

c. Plus généralement, tracer un représentant du vecteur $-\frac{7}{3}\vec{v}$.



Info
2 **a.** On note $2\vec{u}$ la somme $\vec{u}+\vec{u}$ et $3\vec{u}$ la somme $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$.

Info
3 On dit que les vecteurs $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ sont **opposés**. Ils ont même direction et même norme mais des sens contraires.
Le signe « – » traduit les sens contraires.

SPECIMEN

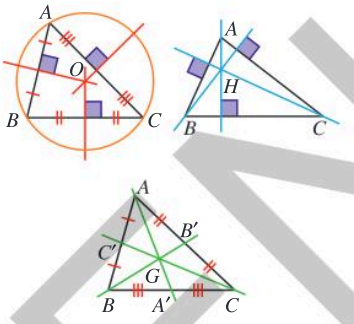
Cours

1 Configurations dans le plan

a Droites remarquables dans le triangle

Propriété-Définition Dans un triangle ABC, les **médiatrices** sont concourantes. Le point de concours O est le **centre du cercle circonscrit** au triangle. Les **hauteurs** sont concourantes en un point H appelé **orthocentre**. Les **médianes** sont concourantes en un point G appelé **centre de gravité** du triangle. G est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet :

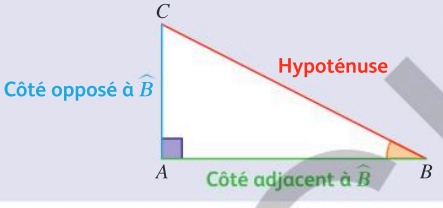
$$AG = \frac{2}{3}AA' \ ; \ BG = \frac{2}{3}BB' \ ; \ CG = \frac{2}{3}CC'.$$



b Trigonométrie dans le triangle rectangle

Propriété Dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés et les angles sont liés par des ***relations trigonométriques*** :

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} \ ; \sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} \ ; \tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

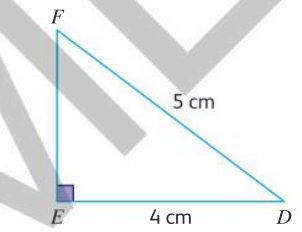


Remarques

La trigonométrie permet de calculer des longueurs ou des angles.

Propriété Pour tout angle aigu α d'un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Exemple



Dans le triangle DEF rectangle en E, on a :

$$\cos\widehat{D} = \frac{ED}{FD} = \frac{4}{5}$$

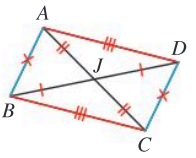
$$\widehat{D} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36{,}9°$$

Notation

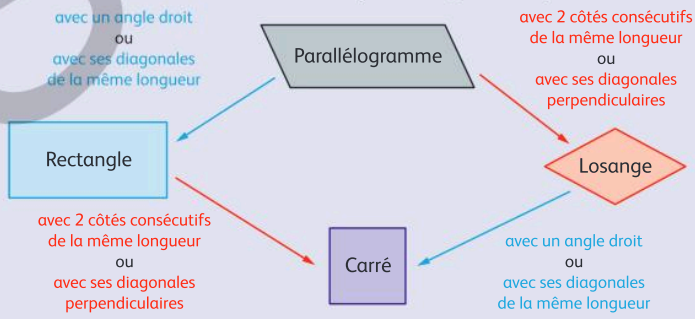
$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$ et $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$.

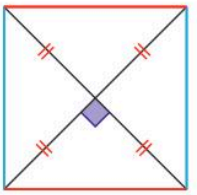
c Parallélogrammes particuliers

Propriété-Définition Un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux est un parallélogramme. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Les cotés opposés d'un parallélogramme sont de mêmes longueurs.
Si un quadrilatère admet un centre de symétrie, c'est un parallélogramme.
Si un quadrilatère non croisé a des côtés deux à deux de mêmes longueurs, c'est un parallélogramme.



Propriété **Savoir reconnaître un parallélogramme particulier**





Le carré est un parallélogramme, un losange et un rectangle.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes

Énoncé On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ de longueur 8 cm, de largeur 3 cm et de hauteur 4 cm.

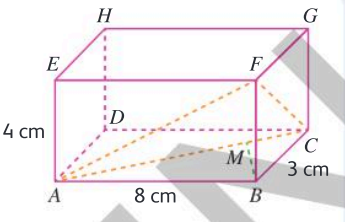
1. Dans le rectangle $ABCD$, déterminer la longueur AC.

2. Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. Dans le triangle ABC, on note M le pied de la hauteur issue de B. Déterminer une valeur approchée de la longueur BM.

4. Déterminer l'aire du triangle ABC.

5. En déduire le volume du tétraèdre $ABCF$.



Solution rédigée

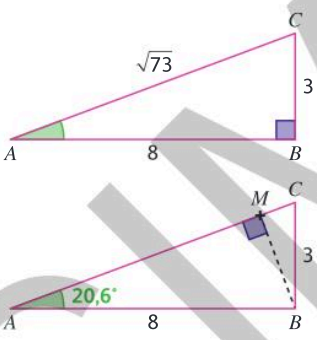
1. Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 3^2 = 73$.
Donc, $AC = \sqrt{73}$ cm, soit environ 8,5 cm.

2. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a : $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{8}$.
Donc $\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{8}\right) \approx 20{,}6°$.

3. Dans le triangle ABM rectangle en M, on a donc : $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{BM}{BA}$.
Donc $BM = BA \times \sin\left(\widehat{BAC}\right)$
$\approx 8 \times \sin(20{,}6) \approx 2{,}8$ cm

4. $A_{ABC} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{8 \times 3}{2} = 12$ cm^2.

5. $V_{ABCF} = \dfrac{1}{3} \times B \times h = \dfrac{1}{3} \times A_{ABC} \times BF = \dfrac{1}{3} \times 12 \times 4 = 16$ cm^3



Point méthode

Sur un schéma, on repère les côtés dont on connaît les mesures. On peut utiliser le moyen mnémotechnique dit « SOHCAHTOA ».

$\sin = \dfrac{Opp}{Hyp}$

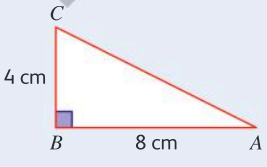
$\cos = \dfrac{Adj}{Hyp}$

$\tan = \dfrac{Opp}{Adj}$

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 382 Voir exercices similaires nos 42 à 50

18 On considère le triangle ABC rectangle en B ci-contre.



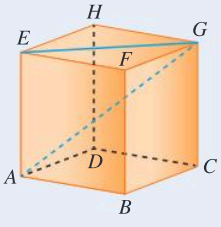
1. Calculer la longueur AC.

2. Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{C}$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{A}$.

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

19 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 8 cm ainsi que la diagonale $[AG]$.

1. Dans le carré $EFGH$, déterminer la longueur EG.



2. On admet que $ACGE$ est un rectangle. Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{AGE}$.

3. Vrai ou Faux ?
Le volume du cube $ABCDEFGH$ est six fois plus grand que celui du tétraèdre $ABCG$.

20 On considère un segment $[AB]$ de longueur 7 cm et le point H appartenant à $[AB]$ tel que $AH = 5$ cm. On construit la perpendiculaire à (AB) passant par H et on y place C tel que $HC = 3$ cm.

1. Tracer une figure à main levée.

2. Calculer la longueur AC.

3. Quel est l'angle le plus grand entre $\widehat{BCH}$ et $\widehat{HAC}$? Justifier.

4. Calculer l'aire du triangle ABC.

SPECIMEN

Cours

2 Notion de vecteur

a Translations et vecteurs

Définition Soient M et M' deux points distincts du plan.

La **translation** qui transforme M en M' associe à tout point N du plan, l'unique point N' tel que $MM'N'N$ est un **parallélogramme**.

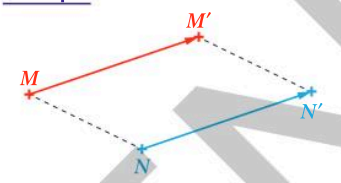
Elle est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.

La translation qui transforme M en M' est un **déplacement** caractérisé par une **direction**, celle de la droite (MM') ; un **sens,** celui de M vers M' ; une **longueur,** la longueur MM'.

Remarques

- Lorsque $M \neq M'$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est représenté par une **flèche** allant **de** M **vers** M'. Il est défini par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** (aussi appelée sa **norme**).
- Le point M est **l'origine** du vecteur $\overrightarrow{MM'}$; le point M' est **l'extrémité**.
- Par convention, on appelle **vecteur nul,** noté $\vec{0}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues, par exemple $\overrightarrow{MM}$.
- La translation de vecteur nul transforme tout point en lui-même.

Exemple



La translation qui transforme M en M' transforme aussi N en N'.
Le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme.

Exemple



Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a les caractéristiques suivantes :
- pour direction, la droite (MM') ;
- pour sens, celui de M vers M' (sens de la flèche) ;
- pour norme, la longueur MM'.

b Égalité de deux vecteurs

Définition Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

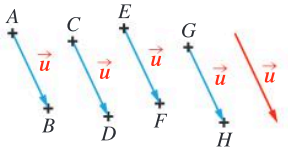
Remarque

L'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même norme**.

Remarques

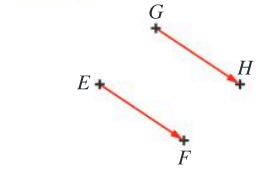
- On considère un vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$, par exemple $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, etc.
Tous ces vecteurs sont donc égaux. On peut alors utiliser une unique lettre pour caractériser ce vecteur : $\vec{u}$ par exemple.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \vec{u}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$ sont parfois appelés des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

- **Notation :** la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

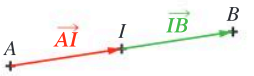
Exemple



- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ équivaut à $EFHG$ est un parallélogramme.
- Lorsque $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$, on a également l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{HF}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ne sont pas égaux car, bien qu'ils aient même direction et même norme, ils ont des sens contraires.

Propriété (caractérisation du milieu d'un segment)

I est le milieu d'un segment $[AB]$ **si et seulement si** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Représenter géométriquement des vecteurs

Énoncé

1. Reproduire la figure ci-contre sur papier quadrillé.

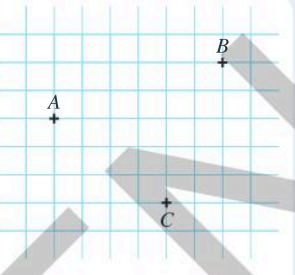
2. a. Construire l'image D du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Quelle est alors la nature du quadrilatère $ABDC$?
Quelles égalités de vecteurs peut-on alors en déduire ?

b. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.
Quelle autre égalité de vecteurs peut-on écrire ?

3. Quelle conjecture peut-on faire concernant les points E, C et D ?
En utilisant des égalités de vecteurs, démontrer cette conjecture.

4. Soit O le milieu du segment $[AC]$. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

a. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB}$ **c.** $EO = OB$ **d.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CO}$ **e.** $AO = CO$



Solution rédigée

2. a. D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. On a alors les égalités suivantes : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (on a aussi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$).

b. E est défini par l'égalité $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ ainsi le quadrilatère $AECB$ est un parallélogramme. On peut dès lors construire le point E.
On déduit alors l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ (et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}$).

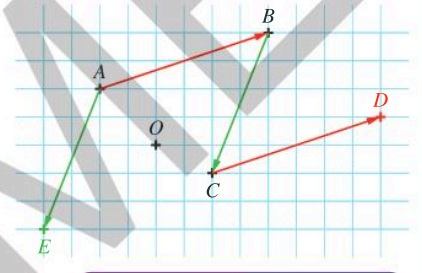
3. Le point C semble être le milieu du segment $[ED]$. Pour le démontrer, on a vu que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ donc on déduit $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$ ce qui traduit le fait que C est le milieu du segment $[ED]$.

4. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction et même sens mais **n'ont pas la même norme** ($AC = 2AO$) donc ils ne sont pas égaux.

b. O est le milieu de la diagonale $[AC]$ du parallélogramme $ABCE$, O est donc aussi le milieu de la diagonale $[EB]$ donc $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB}$.

c. Puisque O est le milieu de $[EB]$, les longueurs EO et OB sont égales.

d. et **e.** Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CO}$ ont même direction et même norme mais ont des **sens contraires**. Par conséquent, ils ne sont pas égaux.
En revanche, on a bien l'égalité de longueurs $AO = CO$.



Point méthode
2. b. On traduit l'égalité de vecteurs par la présence d'un parallélogramme et vice-versa.

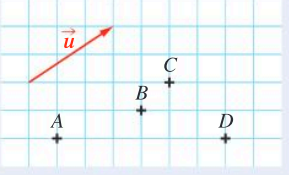
Point méthode
3. Pour prouver qu'un point I est le milieu d'un segment $[AB]$, il suffit de prouver l'égalité de **vecteurs** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Point méthode
4. Deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 382 Voir exercices similaires nos 51, 52 et 57

21 On considère la figure ci-contre où chaque carreau du quadrillage a pour côté 1.



1. Reproduire la figure.

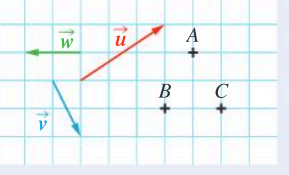
2. Construire le vecteur $\vec{v}$ d'origine A, ayant pour direction la droite (AD), pour sens de A vers D et une norme égale à 4.

3. Construire le vecteur $\vec{w}$ d'origine D, ayant pour direction la droite (BC), pour sens de B vers C et une norme égale à 2.

4. Construire le vecteur $\vec{z}$ d'origine C, égal à $\vec{u}$.

5. Construire le vecteur $\vec{t}$ d'extrémité A, égal à $\vec{u}$.

22 À partir de la figure ci-contre :



1. construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$;

2. construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \vec{v}$;

3. construire le point F tel que $\overrightarrow{FC} = \vec{w}$.

23 $ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes.

1. À l'aide d'une figure, conjecturer la nature du quadrilatère $CDFE$.

2. En utilisant des égalités de vecteurs, prouver cette conjecture.

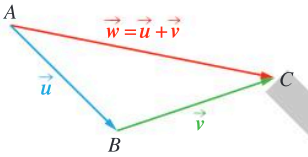
SPÉCIMEN

Cours

3 Somme de vecteurs

a Définition et relation de Chasles

Définition La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On écrit $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Propriété On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. On a alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Cette égalité s'appelle la relation de **Chasles**.

Propriété Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Exemple

Soient M, N et P trois points quelconques.

- $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

Exemple

Soient A, B et C trois points.
On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont **opposés**.
On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Remarque

La différence $\vec{u} - \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est définie par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

b Opposé d'un vecteur

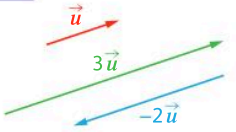
Définition L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ du plan est le vecteur, noté $-\vec{u}$, tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Un vecteur non nul et son opposé ont la même direction, la même norme, mais ont des **sens contraires**.

4 Produit d'un vecteur par un réel

a Définition et propriété

Définition Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et k un nombre réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction que $\vec{u}$ et qui a pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$. Son sens est le même que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$. De plus, si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

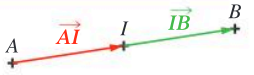
Exemple



Propriété Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Caractérisations du milieu

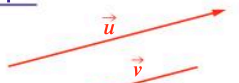


I est le milieu du segment $[AB]$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b Vecteurs colinéaires et application

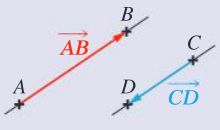
Définition Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie donc qu'ils ont la **même direction**.

Exemple

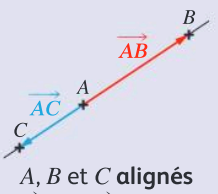


Vecteurs **colinéaires** (**même direction**)

Propriétés Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.



(AB) et (CD) **parallèles**
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **colinéaires**



A, B et C **alignés**
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **colinéaires**

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Représenter la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel

Énoncé

1. Reproduire la figure ci-contre sur papier quadrillé.

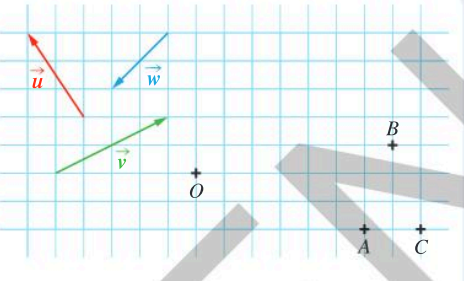
2. Construire un représentant d'origine O des vecteurs suivants.

a. $\vec{z_1} = \vec{u} + \vec{v}$ **b.** $\vec{z_2} = \vec{w} - \vec{u}$ **c.** $\vec{z_3} = -3\vec{w}$ **d.** $\vec{z_4} = \frac{3}{2}\vec{v}$

3. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4. Construire le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.

5. Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO}$.



Solution rédigée

2. a. Pour construire $\vec{z_1}$: on dispose « bout à bout », à partir du point O, le vecteur $\vec{u}$ suivi du vecteur $\vec{v}$ (ou encore le vecteur $\vec{v}$ suivi de $\vec{u}$). L'origine du vecteur $\vec{z_1}$ est O et son extrémité est celle du représentant de $\vec{v}$ précédemment construit (voir figure ci-contre).

b. Pour construire $\vec{z_2} = \vec{w} + (-\vec{u})$, on dispose « bout à bout », à partir du point O, le vecteur $\vec{w}$ suivi de l'**opposé** du vecteur $\vec{u}$.

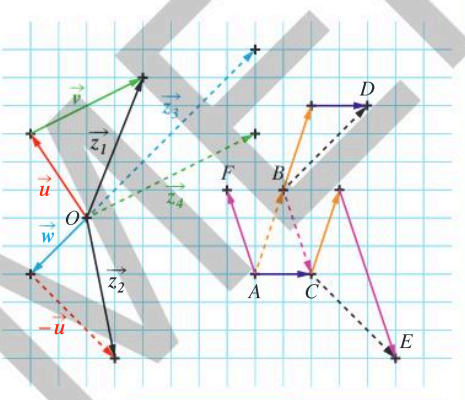
c. Le vecteur $\vec{z_3}$ a la même direction que $\vec{w}$, sa norme vaut 3 fois celle de $\vec{w}$ et son sens est contraire à celui de $\vec{w}$.

d. Le vecteur $\vec{z_4}$ a la même direction et le même sens que $\vec{v}$, sa norme vaut 1,5 fois celle de $\vec{v}$.

3. Pour construire le point D : on dispose « bout à bout », à partir du point B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivi du vecteur $\overrightarrow{AC}$. L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le point D cherché. Voir la figure ci-dessus.

4. Pour construire le point E : on dispose « bout à bout », à partir du point C, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivi du vecteur $\overrightarrow{BC}$ disposé **deux fois** « bout à bout ». L'extrémité obtenue est le point E cherché.

5. On remarque que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles. Donc pour construire le point F, il suffit de reporter le vecteur $\overrightarrow{CB}$ à partir du point A.



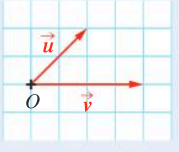
Point méthode

2. à **4.** : Pour construire une somme vectorielle, on dispose « bout à bout » tous les vecteurs de la somme à partir d'une origine. On obtient alors l'extrémité du vecteur somme recherché.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 382 Voir exercices similaires nos 61, 64, 67 et 68

24 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'origine O.

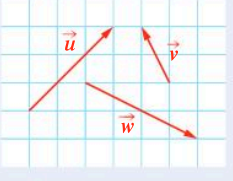


1. Construire les vecteurs $-\vec{u}$ et $-\vec{v}$ d'origine O.

2. Construire un représentant, d'origine O, des vecteurs suivants.

a. $\vec{z_1} = \vec{u} + \vec{v}$ **b.** $\vec{z_2} = \vec{u} - \vec{v}$ **c.** $\vec{z_3} = -2\vec{u}$ **d.** $\vec{z_4} = 3\vec{u} - \frac{7}{4}\vec{v}$

25 Reproduire la figure ci-contre et construire les sommes suivantes.

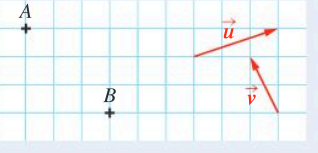


1. $\vec{u} + \vec{v}$ **2.** $\vec{v} - \vec{w}$

3. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ **4.** $\frac{2}{3}\vec{u} - 2\vec{v}$

5. $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ **6.** $\frac{5}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$ **7.** $-\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w}$

26 Reproduire la figure ci-contre.



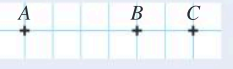
1. Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + 2\vec{v}$.

2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = -\vec{u} + 2\vec{v}$.

3. a. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$?

b. En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$.

27 **1.** Reproduire la figure ci-contre.



2. Placer les points D, E et F tels que :

a. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{DB}$ **c.** $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$

3. Compléter les égalités suivantes par un réel.

a. $\overrightarrow{EB} = \ldots\overrightarrow{AF}$ **b.** $\overrightarrow{AD} = \ldots\overrightarrow{ED}$ **c.** $\overrightarrow{DC} = \ldots\overrightarrow{DE}$

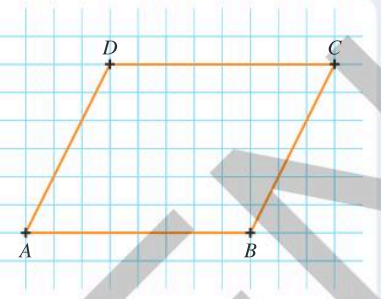
SPÉCIMEN

Méthode

Capacité 4 Montrer l'alignement ou le parallélisme par la colinéarité de vecteurs

Énoncé

1. Sur papier quadrillé, reproduire le parallélogramme $ABCD$ ci-contre et placer les points P et Q définis par $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



2. Émettre une conjecture quant aux points P, Q et C.

3. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{P\ldots}+\overrightarrow{A\ldots}$.

b. À l'aide de la relation de Chasles et en utilisant le fait que $ABCD$ est un parallélogramme, montrer que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

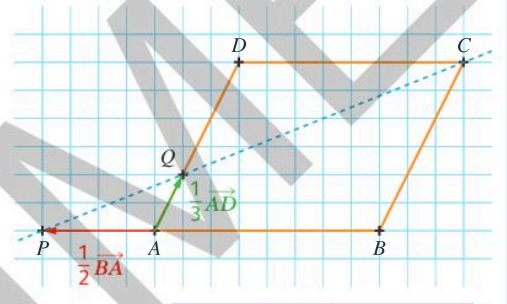
c. Déduire des questions **2. a.** et **2. b.** que $\overrightarrow{PC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

4. En utilisant la relation de Chasles montrer que $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

5. Que peut-on en déduire quant aux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PQ}$? Conclure.

Solution rédigée

2. On a construit les points P et Q sur la figure ci-contre. On peut conjecturer que les points P, Q et C sont alignés.



3. a. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}$.

b. Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Or $ABCD$ étant un parallélogramme, on a l'égalité $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ d'où $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

c. Des questions **a.** et **b.** précédentes, on déduit que $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et donc, $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

4. Avec la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

5. On remarque que $3\overrightarrow{PQ}=3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PC}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont colinéaires et les points P, Q et C alignés.

Point méthode

4. Ici, la relation de Chasles permet d'introduire le point A et les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sur lesquels l'énoncé donne des informations.

Point méthode

5. Les **décompositions** des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ permettent de prouver la colinéarité de ces vecteurs.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 383 Voir exercices similaires nos 72, 74, 78 et 81

28 Soit ABC un triangle non aplati.

1. À l'aide de la relation de Chasles, compléter :

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B\ldots}+\overrightarrow{A\ldots}$$

2. Décomposer en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

- $\vec{u}=-2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$
- $\vec{v}=2\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}$

3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

29 Soit un triangle ABC non aplati. Dans chaque cas, justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

2. $\vec{u}=4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$

3. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}$

30 Soient un triangle ABC non aplati et les points E et F définis par $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. Tracer une figure. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux droites (BE) et (CF) ?

2. Pour montrer cette conjecture, que suffit-il de montrer quant aux vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BE}$?

3. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter :

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{B\ldots}+\overrightarrow{C\ldots} \text{ et } \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{\ldots C}$$

b. En déduire que $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

4. De façon analogue, en utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5. Conclure.

SPECIMEN

CAPACITÉ 5 Résoudre des problèmes de géométrie avec des méthodes diverses

Énoncé On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AC]$. On place un point B sur le cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et C. On souhaite démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

1. a. Tracer une figure.

b. Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Que peut-on déduire du quadrilatère $ABCD$?

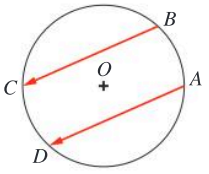
c. En déduire que le point D est sur le cercle $\mathscr{C}$ puis placer le point D sur la figure.

2. Justifier que $AC = BD$, puis en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

3. Conclure.

Solution rédigée

1. a. et **c.**



b. Avec $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, on déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

c. On sait que le rayon du cercle est égal à OA (ou encore OC ou OB). D appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $OD = OA$.
Comme $ABCD$ est un parallélogramme, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. O est le milieu de $[AC]$, donc O est également le milieu de $[BD]$. Ainsi, $OD = OB = OA$.
Donc D est sur le cercle $\mathscr{C}$.

2. O étant le milieu de $[AC]$ et $[BD]$, on a :

$$AC = OA + OC = OB + OD = BD$$

$ABCD$ est donc un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur, c'est donc un rectangle.

3. $ABCD$ étant un rectangle, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

Info
On vient de démontrer un résultat bien connu au collège : « si ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire les points A, B et C sont sur le cercle) dont $[AC]$ est un diamètre, alors ABC est un triangle rectangle en B ».

Point méthode
1. a. Lorsqu'aucune information n'est donnée, on construit une figure quelconque, sans particularité.
Ici, par exemple, $[AC]$ et $[BO]$ ne sont pas perpendiculaires.

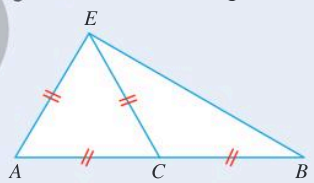
Point méthode
1. c. Pour montrer que le point D appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O, il suffit de montrer que OD est égal au rayon. Ici, on peut prendre OA comme rayon.

Point méthode
2. En géométrie, il est fréquent que plusieurs démarches conduisent à une même conclusion. On peut justifier que $AC = BD$ en remarquant que $[BD]$ est également un diamètre.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 383 Voir exercices similaires nos 86, 87 et 91

31 Le triangle ABE est -il rectangle ? Justifier.



32 $ABCD$ est un parallélogramme de centre O et I est le milieu du côté $[BC]$. On note P le point d'intersection de la droite (AI) avec la diagonale $[DB]$. Justifier que la droite (CP) coupe le segment $[AB]$ en son milieu.

33 Soit ABC un triangle isocèle en C.
On construit le point A' symétrique du point A par rapport à C et le point B' tel quel $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'B'}$.

1. Faire une figure.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'B'$?

34 On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AD]$ et $[BC]$. On place E sur le segment $[AD]$ et F sur le segment $[BC]$ tels que $AE = CF$.

1. Faire une figure à main levée.

2. Démontrer que $AFCE$ est un parallélogramme.

SPECIMEN

Je fais le point

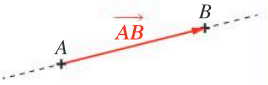
Je revois mon cours

Translation et vecteur

La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point A en B.

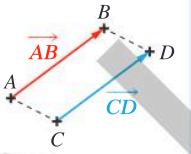
Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ a :

- une **direction,** celle de la droite (AB) ;
- un **sens,** de A vers B ;
- une **norme,** notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, égale à la longueur AB.



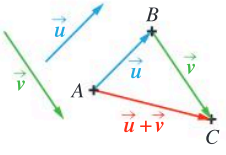
Vecteurs égaux

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à : $ABDC$ est un parallélogramme.



Somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On dispose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « bout à bout » pour obtenir le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$.



Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Produit d'un vecteur par un réel

Pour $\vec{u}$ vecteur non nul et k un nombre réel non nul :

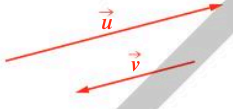
- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction ;
- si $k<0$ alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de **sens contraires** ;
- si $k>0$ alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de **même sens** ;



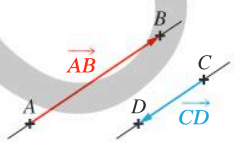
- la norme de $k\vec{u}$ est égale à $|k|\times\left\|\vec{u}\right\|$.

Vecteurs colinéaires

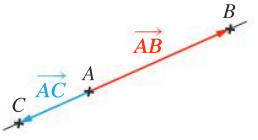
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.



Vecteurs **colinéaires** non nuls (**même direction**)



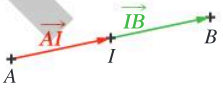
(AB) et (CD) **parallèles** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **colinéaires**



A, B et C **alignés** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **colinéaires**

Milieu d'un segment et vecteurs

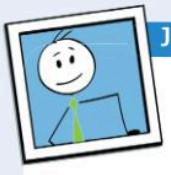
Soient A et B deux points distincts du plan.



I est le milieu du segment $[AB]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Je m'exerce à démontrer

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2039

On rappelle que M est le milieu d'un segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Montrer alors que : M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

SPÉCIMEN

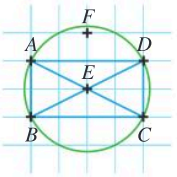
J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2040

Voir corrigés p. 383

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).



On considère les six points A, B, C, D, E et F comme indiqué sur la figure ci-contre.
Le point E est le centre du cercle passant par les points A, B, C et D.

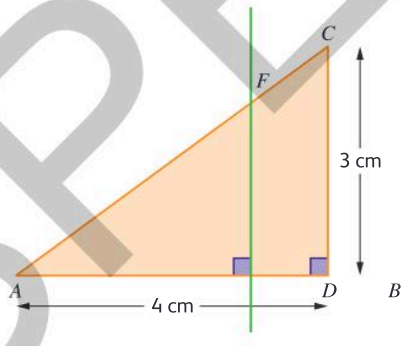
	a	b	c
1. Le quadrilatère $ABCD$ est :	un parallélogramme	un rectangle	un losange
2. Le triangle ABE est :	rectangle en E	isocèle en E	équilatéral
3. La mesure de l'angle $\widehat{ADB}$, arrondie à l'unité, est :	27°	45°	30°
4. Le quadrilatère $AFDE$ est :	un parallélogramme	un rectangle	un losange
5. L'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FA}$ est :	B	D	A
6. Les vecteurs égaux sont :	$\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BA}$
7. Un vecteur opposé à $\overrightarrow{DC}$ est :	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{CD}$
8. On a les égalités :	$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{DF}=-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AF}$
9. D'après la relation de Chasles, on a :	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}$
10. Les couples de vecteurs colinéaires sont :	$\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BA}$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

On considère la figure ci-dessous où $AD = 3$ cm.



1. $AC = 5$ cm

2. La mesure arrondie au dixième de l'angle $\widehat{A}$ est 40°.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

4. $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{DB}$

5. L'aire du triangle ADF est égale à 3,375 cm^2.

6. La hauteur issue de B du triangle ABC a pour longueur 2,4 cm.

Partie B.

Dans chacune des questions suivantes, on considère les points deux à deux distincts A, B, C, D, E et F.

1. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, alors $AB=CD$.

2. Si $AB=CD$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ou opposés.

3. Si deux vecteurs ont même direction et même norme, alors ils sont égaux ou opposés.

4. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

5. Si $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, alors C est le milieu de $[AB]$.

6. Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

7. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, alors les points A, C, E et F sont alignés.

8. Si $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ alors (EF) // (AB).

9. Si (EF) // (AB), alors $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$.

10. Si B est le milieu de $[AC]$ alors $AB=BC$.

11. La réciproque de l'affirmation précédente est vraie.

12. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ alors B est le milieu de $[AC]$.

SPECIMEN

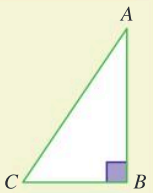
Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2041

Acquérir des automatismes

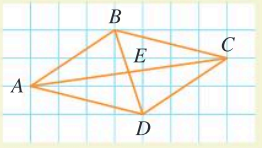
35 **Vrai ou faux ?**

ABC est un triangle rectangle en B. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



1. $AB^2 = AC^2 - BC^2$
2. $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{BC}{AC}$
3. L'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{AB \times AC}{2}$.

36 On considère la figure suivante.



1. Donner l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
2. Donner l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$.
3. Compléter les pointillés :

a. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\ldots}$ b. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{\ldots D}$ c. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\ldots}$

4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

37 **Vrai ou faux ?** Compétence Raisonner

Préciser si les affirmations sont vraies ou fausses.

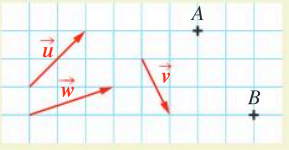
1. Si deux vecteurs sont égaux, alors ils ont la même direction.
2. Si deux vecteurs ont la même norme, alors ils sont égaux.
3. Si deux vecteurs sont opposés alors ils ont la même direction.

38 Pour chaque affirmation de l'exercice **37**, énoncer la réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

39 Compléter à l'aide de la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{\ldots T} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{R\ldots}$
3. $\overrightarrow{\ldots P} + \overrightarrow{P\ldots} = \overrightarrow{CF}$
4. $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{K\ldots} = \overrightarrow{\ldots G}$

40 Reproduire la figure ci-contre et placer les points C, D, E et F tels que :



1. $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$
2. $\overrightarrow{BD} = -\vec{w}$
3. $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$
4. $\overrightarrow{BF} = \vec{w} - \vec{v}$

41 On considère la figure suivante :



1. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ? de même sens ? de même norme ?
2. Reproduire la figure puis placer les points D et E tels que :

a. $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{BC}$

Travailler les capacités du chapitre

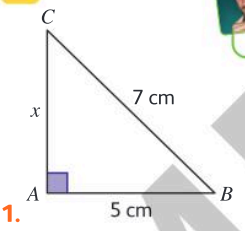
Capacité 1 **Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes** Voir p. 111

Pour les exercices **42** *à* **44**, *déterminer la longueur* x.

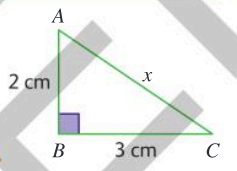


CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2042

42

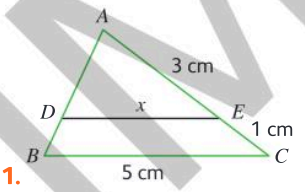


1.

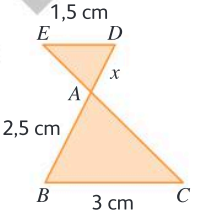


2.

43 $(DE)//(BC)$

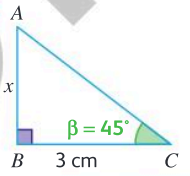


1.

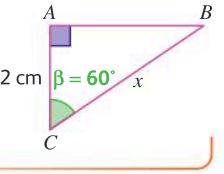


2.

44



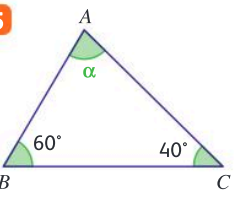
1.



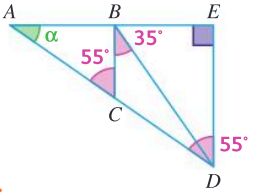
2.

Pour les exercices **45** *et* **46**, *déterminer une mesure en degré de l'angle* α.

45

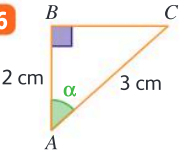


1.

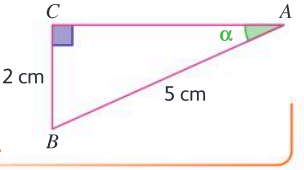


2.

46



1.



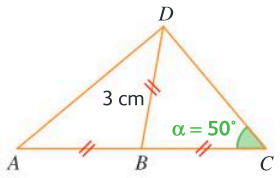
2.

47 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $\widehat{C} = 30°$.

1. Calculer les longueurs AC et BC.
2. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{B}$.

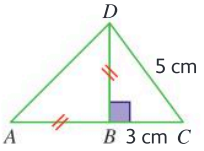
SPÉCIMEN

48 Sur la figure ci-dessous, $BA = BD = BC = 3$ cm et $\widehat{ACD} = 50°$.



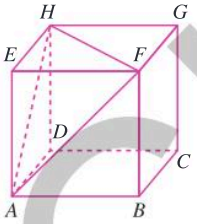
1. Déterminer les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{ABD}$.
2. Montrer que le triangle ADC est rectangle en D.
3. Déterminer les longueurs AC, AD et DC.
4. Calculer l'aire du triangle ADC.

49 Sur la figure ci-contre, les triangles ABD et BDC sont rectangles en B, $AB = BD$, $BC = 3$ cm et $DC = 5$ cm.



1. Calculer la longueur AD.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{A}$.
3. Calculer l'aire du triangle ADC.

50 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 cm.



1. Calculer le volume du cube.
2. Calculer le volume du tétraèdre $EFHA$.
3. Calculer la longueur AF.
4. Justifier que le triangle AHF est équilatéral.
5. On note I le milieu de $[HF]$.

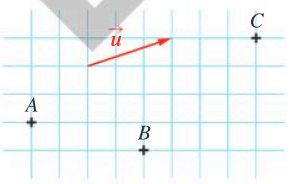
a. Calculer la longueur IA.

b. Calculer l'aire du triangle AHF.

CAPACITÉ 2 Représenter géométriquement des vecteurs

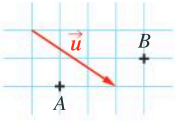
Voir p. 113

51 Reproduire la figure donnée en respectant le quadrillage.



1. Construire le point D image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Construire le point E tel que $ABED$ soit un parallélogramme.
3. Construire le point F tel que $\overrightarrow{FC} = \vec{u}$.
4. Citer tous les vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$.

52 Reproduire la figure ci-contre en respectant le quadrillage.

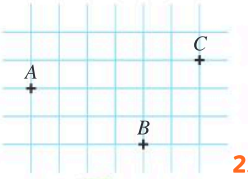


1. Construire un vecteur $\vec{v}$ d'origine A tel que $\vec{u} = \vec{v}$.
2. Construire un vecteur $\vec{w}$ d'extrémité B tel que : $\vec{u} = \vec{w}$

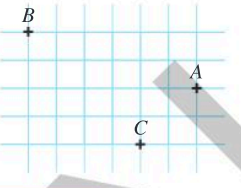
Pour les exercices 53 à 55, reproduire la figure puis construire les points D et E tels que :

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}$

53



1.

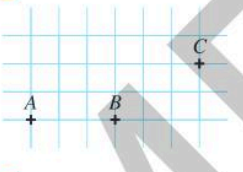


2.

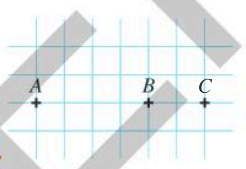


CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2043

54

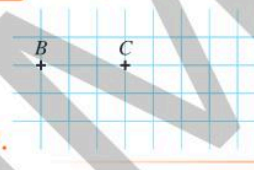


1.

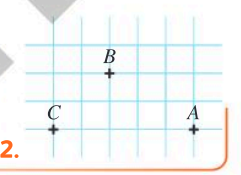


2.

55

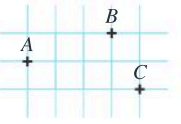


1.



2.

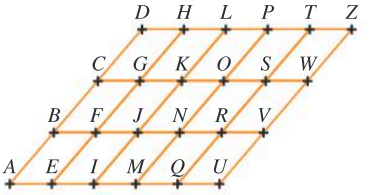
56 Soient trois points A, B et C.



À l'aide du quadrillage, construire les vecteurs suivants.

1. Un vecteur $\vec{u}$, d'origine A, ayant la même direction et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et une norme égale à deux fois celle de $\overrightarrow{AB}$.
2. Un vecteur $\vec{v}$ d'origine C, ayant la même direction que $\overrightarrow{AB}$, un sens contraire à celui de $\overrightarrow{AB}$ et une norme trois fois plus grande que celle de $\overrightarrow{AB}$.

Pour les exercices 57 et 58, on considère le pavage suivant constitué de parallélogrammes.



57 Parmi les égalités suivantes, indiquer celles qui sont vraies.

1. $AB = KJ$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KJ}$
3. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IQ}$
4. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ZK}$
5. $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{ZK}$
6. $AN = ZK$

58 Compléter les égalités vectorielles suivantes par les points qui conviennent.

1. $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{P\ldots} = \ldots\overrightarrow{U}$
2. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{B\ldots} = \ldots\overrightarrow{W}$
3. $\overrightarrow{NU} = \overrightarrow{D\ldots} = \ldots\overrightarrow{V}$
4. $\overrightarrow{ZJ} = \overrightarrow{O\ldots} = \ldots\overrightarrow{E}$

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2041

59 ABC est un triangle. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$.

1. Tracer une figure et placer les points E et F.
2. Citer tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AE}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AEBF$? Justifier.

60 $ABCD$ est un parallélogramme. I est le symétrique de B par rapport à A et J est le symétrique de D par rapport à C.

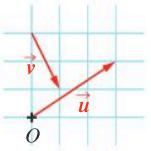
1. Tracer une figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $AICJ$? Justifier en utilisant les vecteurs.

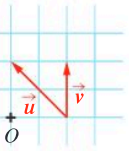
CAPACITÉ 3 Représenter la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel

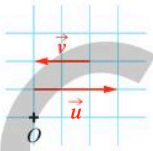
Voir p. 115

Pour les exercices **61** *à* **63**, *reproduire la figure et construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$.*

61

1. 

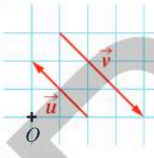
2. 

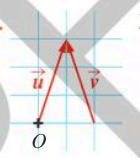
3. 

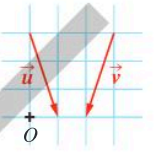


CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2044

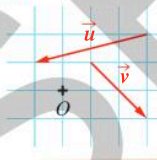
62

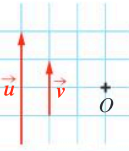
1. 

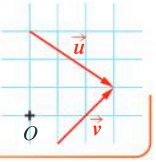
2. 

3. 

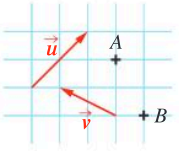
63

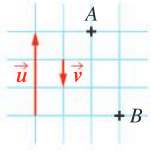
1. 

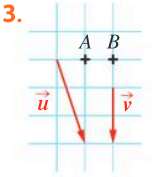
2. 

3. 

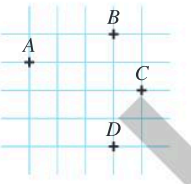
64 Reproduire la figure en respectant le quadrillage et construire le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ d'origine A, puis le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ d'origine B.

1. 

2. 

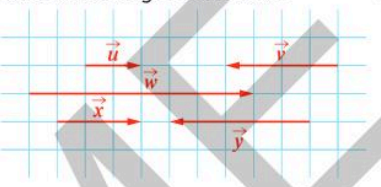
3. 

65 Ci-contre, on donne quatre points A, B, C et D.
Compléter les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles puis représenter chaque égalité sur la figure.



1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{\ldots C}$
2. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots B} = \overrightarrow{D\ldots}$
4. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} = \vec{0}$

66 On considère la figure suivante.



Compléter les égalités suivantes par un réel.

1. $\vec{v} = \ldots \vec{u}$
2. $\vec{w} = \ldots \vec{v}$
3. $\vec{w} = \ldots \vec{u}$
4. $\vec{x} = \ldots \vec{u}$
5. $\vec{y} = \ldots \vec{u}$
6. $\vec{x} = \ldots \vec{v}$

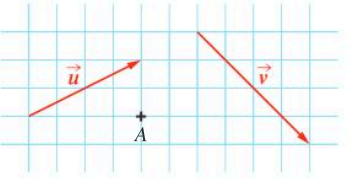
67 On considère la configuration ci-dessous.



Compléter les égalités suivantes par un réel.

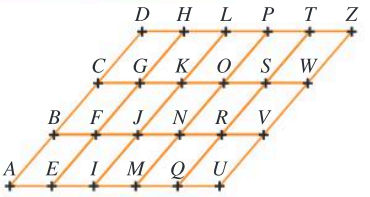
1. $\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{DE}$
2. $\overrightarrow{DA} = \ldots \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{DE} = \ldots \overrightarrow{BA}$
4. $\overrightarrow{BD} = \ldots \overrightarrow{AD}$
5. $\overrightarrow{CA} = \ldots \overrightarrow{DE}$
6. $\overrightarrow{DC} = \ldots \overrightarrow{CE}$

68 On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que le point A. Construire les points B, C et D tels que :



$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{u} \ ; \ \overrightarrow{AC} = \frac{7}{4}\vec{v} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$$

Pour les exercices **69** *et* **70**, *on considère le pavage ci-contre constitué de parallélogrammes.*



69 Compléter les égalités suivantes par la lettre qui convient :

1. $\overrightarrow{FS} - \overrightarrow{NU} = \overrightarrow{R\ldots}$
2. $\overrightarrow{P\ldots} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IL}$
3. $\overrightarrow{A\ldots} = 3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AB}$
4. $\overrightarrow{T\ldots} = -2\overrightarrow{AI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

70 Compléter les égalités suivantes par un réel :

1. $\overrightarrow{PM} = \ldots \overrightarrow{PO}$
2. $\overrightarrow{KI} = \ldots \overrightarrow{ZU}$
3. $\overrightarrow{UA} = \ldots \overrightarrow{GS}$
4. $\overrightarrow{AW} = \ldots \overrightarrow{AE} + \ldots \overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{QD} = \ldots \overrightarrow{AE} + \ldots \overrightarrow{AB}$

SPECIMEN

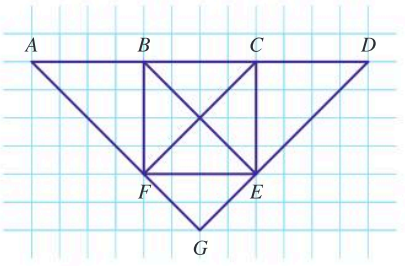
Méthode 4 Montrer l'alignement ou le parallélisme par la colinéarité de vecteurs

Voir p. 116

71 QCM **Compétence** Communiquer

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On considère la figure ci-dessous.



1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont :

a. égaux **b.** opposés **c.** colinéaires

2. Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont :

a. égaux **b.** opposés **c.** colinéaires

3. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal à :

a. $\frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$ **b.** $3\overrightarrow{FE}$ **c.** $-3\overrightarrow{DC}$

4. Le vecteur $\overrightarrow{EB}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{FC}$ **b.** $\frac{2}{3}\overrightarrow{GA}$ **c.** $\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$

72 QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la (ou les) réponse(s) correcte(s).

1. Si deux vecteurs non nuls sont opposés, alors ils sont nécessairement :

a. colinéaires **b.** de même sens

c. de même norme **d.** de même direction

2. Si deux vecteurs non nuls sont égaux, alors ils sont nécessairement :

a. colinéaires **b.** de même sens

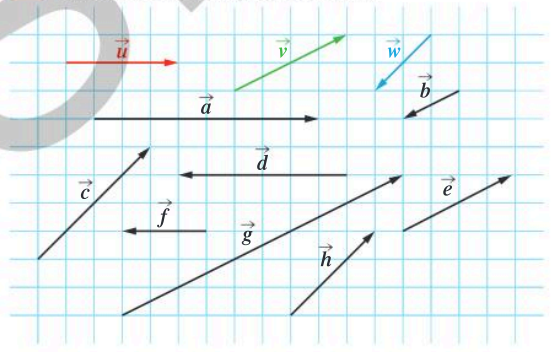
c. de même norme **d.** de même direction

3. Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires, alors ils sont nécessairement :

a. égaux **b.** de même sens

c. de même norme **d.** de même direction

73 On considère la figure suivante.



1. Citer tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ puis les exprimer en fonction de $\vec{u}$.

2. Reprendre la question précédente pour le vecteur $\vec{v}$, puis le vecteur $\vec{w}$.

Pour les exercices **74** *à* **76**, *on considère un triangle ABC non aplati. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On pourra, si besoin, utiliser la relation de Chasles.*

74 $\vec{u} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) - 3\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v} = 5\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{CA}$

75 $\vec{u} = -5\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA}$

76 $\vec{u} = 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}$ et $\vec{v} = 3\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\right) - 3\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$

Pour les exercices **77** *à* **80**, *on considère un triangle ABC non aplati. Indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non, en justifiant la réponse. Dans l'affirmative, déterminer un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.*

77 $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = 6\overrightarrow{BA}$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2045

78 $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$

79 $\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 8\overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{AC}$

80 $\vec{u} = 6\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

81 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6.

Soient I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure.

2. a. Compléter les pointillés à l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{IJ} = \ldots\overrightarrow{A} + \ldots\overrightarrow{J}$.

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

c. Que peut-on dire des droites (IJ) et (BC) ? Pourquoi ?

82 ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $BC = 5$ et $AC = 3$. On considère les points M, N et P définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux points M, N et P ?

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \ldots\overrightarrow{B} + \ldots\overrightarrow{N}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \ldots + \overrightarrow{CP}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{NP} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4. Que peut-on en déduire concernant les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MN}$? Conclure.

SPECIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2041

Résoudre des problèmes de géométrie avec des méthodes diverses

Voir p. 117

83 PYTHON Écrire en langage Python une fonction ayant pour paramètres les trois côtés entiers AB, AC et BC d'un triangle ABC et renvoyant la nature, rectangle ou non, du triangle ABC.

Démo

84 **Théorème des milieux**

« Dans un triangle, la droite qui joint le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté. »

1. Construire un triangle quelconque ABC et placer I (resp. J) le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$).

2. Exprimer AI en fonction de AB.

3. En déduire la valeur du rapport $\frac{AI}{AB}$.

4. Démontrer le théorème des milieux en comparant les rapports $\frac{AI}{AB}$ et $\frac{AJ}{AC}$.

85 **Parallélogramme de Varignon**

Soient un quadrilatère quelconque $ABCD$ et les milieux I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faire deux figures différentes et émettre une conjecture quant à la nature du quadrilatère $IJKL$.

2. Démontrer, à l'aide du théorème des milieux, que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).

3. Démontrer la conjecture formulée.

86 Soit ABC un triangle. On note D l'image de A par la symétrie de centre B et E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Démontrer que $ACDE$ est un parallélogramme.

87 Soit ABC un triangle rectangle en A. On construit les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

1. Construire une figure et conjecturer la nature du quadrilatère $BCDE$.

2. En utilisant les vecteurs, montrer que $BCDE$ est un parallélogramme.

3. Quel argument supplémentaire permet de justifier la conjecture émise précédemment ?

88 **1.** Construire un parallélogramme $ABCD$ et les points I, J et K tels que :

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité : $\overrightarrow{IJ} = \ldots\overrightarrow{A} + \ldots\overrightarrow{B} + \ldots\overrightarrow{J}$.

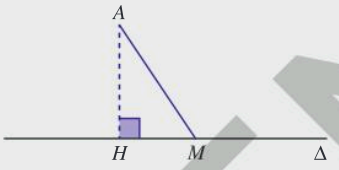
b. En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

3. Démontrer que $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

4. Que représente le point J pour le segment $[IK]$?

Info

Étant donné une droite Δ et un point A du plan, on appelle **projeté orthogonal du point A sur la droite Δ** le point d'intersection H de la droite Δ avec la perpendiculaire à Δ passant par A.



La plus petite distance possible entre le point A et tout point M de la droite Δ est la distance AH. On dit que c'est la **distance du point A à la droite Δ**.

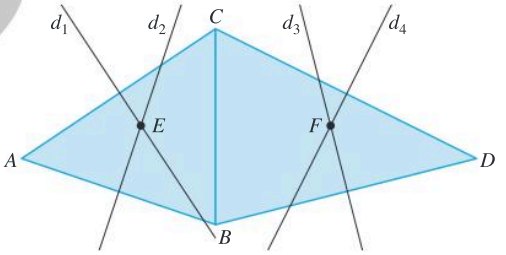
89 On considère un triangle ABC isocèle en A et M un point du segment $[BC]$. Soient H et K les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$ et $[AC]$.

1. Sur un logiciel de géométrie dynamique, construire une figure et émettre une conjecture sur la somme $MH + MK$.

2. En considérant les aires des triangles ABM et ACM, démontrer la conjecture émise à la question **1.**

90 On considère deux triangles quelconques ABC et BCD. On trace les médiatrices d_1, d_2, d_3 et d_4 des segments $[AC]$, $[AB]$, $[BD]$ et $[CD]$.

On note E le point d'intersection de d_1 et d_2 et F le point d'intersection de d_3 et d_4.



Que représente la droite (EF) pour le segment $[BC]$? Justifier.

91 On considère un triangle ABC isocèle en A et les carrés $ABDE$ et $ACGF$ extérieurs au triangle.

1. Construire une figure.

2. En considérant une droite remarquable du triangle AEF, démontrer que (FE) et (BC) sont parallèles.

92 Soit ABC un triangle. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC). Soit D le point tel que $ABDH$ est un parallélogramme et E le point tel que $ACEH$ est un parallélogramme.

1. Construire une figure et conjecturer la nature du quadrilatère $BCED$.

2. Démontrer cette conjecture.

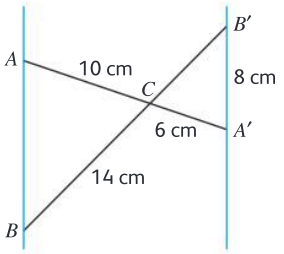
SPÉCIMEN

Exercices Entraînement

1 Configurations dans le plan

93 QCM

Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s) :



1. La longueur AB en centimètre est égale, au millimètre près, à :

a. 13,3 **b.** $\frac{40}{3}$ **c.** 4,8

2. La longueur BB' en centimètre est égale à :

a. 8,4 **b.** 22,4 **c.** 23,3

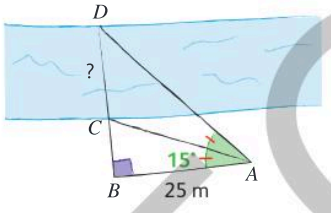
3. Les triangles CAB et $CA'B'$ sont :

a. symétriques par rapport à C.

b. semblables.

c. égaux.

94 Anaïs a retrouvé dans le grenier de son grand-père un petit carnet dans lequel il prenait des notes. Elle s'arrête sur le croquis ci-dessous.



Aider Anaïs à retrouver la largeur CD de la rivière.

95 On considère ABC un triangle équilatéral, H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et J le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC).

1. Réaliser une figure et conjecturer une relation entre les longueurs CH et HJ.

2. En exprimant $\sin\widehat{B}$ de deux manières différentes, justifier que $\frac{HJ}{HB}=\frac{CH}{CB}$. Conclure.

96 On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AC=4{,}8$ et $BC=8$. On note K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

On souhaite déterminer la distance AK.

1. **1re méthode : en utilisant les aires**

En calculant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la distance AK.

2. **2e méthode : en utilisant la trigonométrie**

a. Justifier que les angles $\widehat{ABK}$ et $\widehat{CAK}$ sont de même mesure.

b. En se plaçant dans plusieurs triangles rectangles différents, en déduire que $\frac{AK}{AC}=\frac{AB}{BC}$.

c. En déduire les longueurs AK et BK.

97 Soit ABC un triangle en B tel que $AB=7$, $AC=12$ et $\widehat{BAC}=40°$.

On appelle B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

1. Déterminer les mesures des angles du triangle ABB'.

2. Déterminer la distance du point B à la droite (AC). Calculer alors l'aire du triangle ABC.

3. En déduire la distance du point C à la droite (AB).

98 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\sin\widehat{C}=0{,}6$ et $AB=8$.

1. Quelle relation peut-on écrire entre $\cos\widehat{C}$ et $\sin\widehat{C}$? En déduire la valeur exacte de $\cos\widehat{C}$.

2. Déterminer la valeur exacte des longueurs BC et AC.

99 **Cosinus et sinus de 30° et 60°**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. H est le pied de la hauteur issue de A.

1. Faire une figure. Justifier que H est le milieu de $[BC]$ puis donner la valeur de l'angle $\widehat{A}$.

2. **a.** En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En se plaçant dans le triangle ABH, déterminer la valeur exacte de $\cos 60°$.

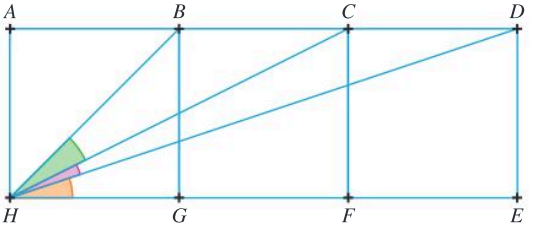
c. En utilisant la relation $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$, en déduire la valeur exacte de $\sin 60°$.

3. De manière analogue, en considérant cette fois l'angle $\widehat{BAH}$, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de 30°.

100 Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $AB=AC=1$. Déterminer les valeurs exactes de $\cos 45°$ et $\sin 45°$.

101 **Exercice guidé**

On considère la figure suivante constituée de trois carrés $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ de côté 2.



1. Calculer les longueurs HB, HC et HD.

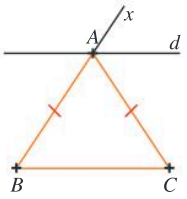
2. Déterminer une mesure arrondie à 0,1° près des angles $\widehat{DHE}$, $\widehat{CHD}$ et $\widehat{BHC}$.

Pistes de résolution

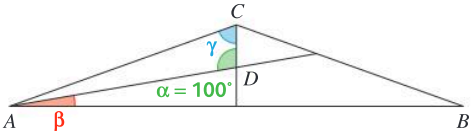
2. Commencer par utiliser la trigonométrie dans les triangles rectangles CHF et DHE pour déterminer la mesure des angles $\widehat{CHF}$ et $\widehat{DHE}$.

SPÉCIMEN

102 ABC est un triangle isocèle en A. Soit d la parallèle à (BC) passant par A et $[Ax)$ la demi-droite d'origine A et de support (AB) ne contenant pas B.
Démontrer que d est la bissectrice de $\widehat{CAx}$



103 Soit ABC un triangle isocèle en C tel que la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$ se coupent en D suivant un angle de 100°.



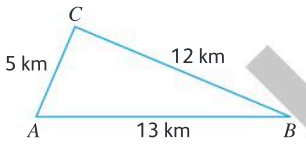
On note β l'angle $\widehat{BAD}$ et γ l'angle $\widehat{ACD}$.
1. a. Quelles relations relient β et γ ?
Indice : observer les triangles ABC et ADC.
b. En déduire les valeurs des angles du triangle ABC.
2. Construire le triangle ABC et vérifier que les bissectrices forment un angle de 100°.

104 $ABCD$ est un carré. Pour tout point M du segment $[AB]$, on note N le point de $[BC]$ tel que $BN = AM$, et P le point de $[AD]$ tel que $AP = BM$.
1. Faire une figure et conjecturer les positions relatives des droites (MN) et (MP).
2. Comparer les angles $\widehat{AMP}$ et $\widehat{MNB}$ puis les angles $\widehat{MPA}$ et $\widehat{NMB}$.
3. Calculer une mesure de $\widehat{NMP}$ et conclure.

105 Médiatrices d'un triangle
On considère un triangle ABC ainsi que les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$. On note O leur point d'intersection.
1. Justifier que $OA = OB = OC$. En déduire que la médiatrice de $[BC]$ passe par O.
2. En déduire que O est le centre d'un cercle passant par les sommets du triangle.

106 On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
On nomme E le milieu de $[CD]$. La droite (AE) coupe $[BD]$ en F et (BC) en G.
1. Construire une figure.
2. Que représente le point F dans le triangle ACD ?
3. En déduire que $EF = \frac{1}{2}FA$.
4. Montrer que E est le milieu de $[AG]$.
5. En déduire que $FG = 4EF$.
6. Démontrer l'égalité $FA^2 = EF \times FG$.

107 Lors d'un jeu de *geocaching*, trois amies s'envoient leurs coordonnées GPS à l'aide de leur téléphone. Voici les distances les séparant :

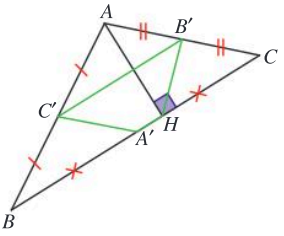


1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.
2. Les trois amies souhaitent se rejoindre. Aucun obstacle ne se présentant entre elles, en quel point doivent-elles se retrouver pour qu'elles parcourent toutes les trois la même distance ?



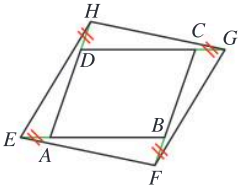
108 LOGICIEL GÉOMÉTRIE **Le retour de Varignon**
Dans un quadrilatère quelconque $ABCD$, soient I, J, K et L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On s'intéresse au quadrilatère $IJKL$.
1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire un quadrilatère $ABCD$, ses diagonales puis le quadrilatère $IJKL$.
b. Conjectures
En déformant le quadrilatère $ABCD$, compléter la conjecture suivante : « Pour que $IJKL$ soit un rectangle, il faut et il suffit que les … de $ABCD$ soient …. »
c. Mêmes questions en remplaçant « rectangle » par « carré » puis « losange ».
2. En utilisant le théorème de la droite des milieux, démontrer ces conjectures.

109 A', B' et C' sont les milieux des côtés d'un triangle ABC et H est le pied de la hauteur issue de A.



1. Que peut-on dire du quadrilatère $BA'B'C'$? Justifier.
2. Montrer que $HA'C'B'$ est un trapèze isocèle.

110 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme et les points E, F, G et H appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC), (CD) et (AD) tels que :
$AE = BF = CG = DH$.



Le problème est de démontrer que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.
1. En considérant les triangles EBF et DGH, montrer que $GH = EF$.
2. Montrer que $EH = FG$ puis conclure.

SPECIMEN

111 On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$. M et N sont les milieux des côtés $[AD]$ et $[BC]$ et I est le point d'intersection de la diagonale (AC) avec la droite (MN).

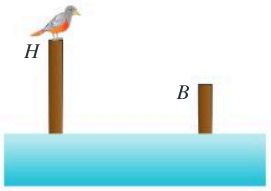
1. Montrer que (MN) est parallèle aux deux bases (AB) et (CD).

2. Démontrer que I est le milieu de $[AC]$.

3. Montrer que $MN = \frac{1}{2}(CD + AB)$.

112 **Exercice guidé**

Heckel est perché sur un poteau (point H). Il souhaite se désaltérer dans la rivière puis rejoindre l'autre poteau (point B). On suppose son vol rectiligne.
Où doit-il plonger pour que son vol soit le plus court possible ?



Pistes de résolution On pourra considérer le symétrique B' de B par rapport à la surface de la rivière et utiliser le fait que la plus courte distance qui sépare deux points du plan est ...

113 **Exercice guidé**

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 3$. M est un point mobile du segment $[BC]$. Soient I et J les projetés orthogonaux du point M sur les droites (AB) et (AC) respectivement.

1. Construire une figure.

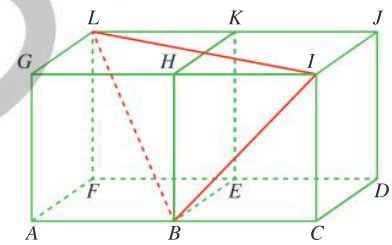
2. Pour quelle position du point M la distance IJ est-elle minimale ? Justifier.

3. Calculer cette distance minimale.

Piste de résolution

1. On pourra examiner la nature du quadrilatère $AIMJ$ et les propriétés de ses diagonales.

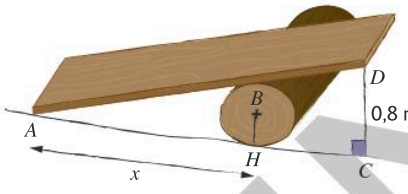
114 La figure ci-dessous est constituée de deux cubes de côté 3 cm.



1. Le triangle BIL est-il rectangle ? Justifier.

2. Calculer le volume du tétraèdre $LGIA$.

115 On dispose d'un rondin de bois cylindrique de 40 cm de diamètre et d'une planche de 2 m.
On souhaite déterminer la distance AH pour que, posée sur le rondin, l'extrémité de la planche soit élevée de 80 cm par rapport au sol.



1. Construire une vue de côté de la situation.

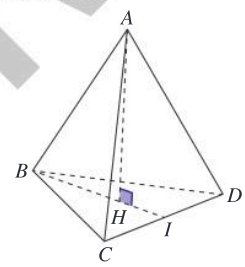
2. Que représentent les droites (AD) et (AC) pour le cercle de centre B et de rayon BH ?

3. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$ à 0,1° près.

4. Montrer que (AB) est la bissectrice de $\widehat{CAD}$.
En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{HAB}$.

5. Déterminer la distance AH recherchée.

116 $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté 6 cm (c'est-à-dire que toutes ses arêtes mesurent 6 cm).
On note I le milieu du segment $[CD]$ et H le *centre de gravité* du triangle BCD.



On rappelle que le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.
On admet que les droites (AH) et (BI) sont perpendiculaires en H.

1. a. Calculer la longueur BI.

b. Calculer la longueur AH.

2. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

117 PRISE D'INITIATIVES **Publicité mensongère ?**

Une piscine a la forme d'un prisme. Elle admet une hauteur d'eau de 1,20 m et sa base est un octogone régulier inscrit dans un cercle de diamètre 4,60 m.

On peut lire sur le carton d'emballage :
« 18 000 L de fraîcheur ! »
La capacité mentionnée est-elle correcte ?



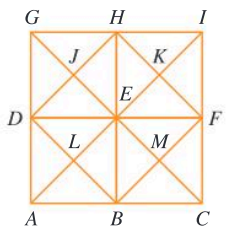
Info

Un polygone est régulier si tous ses côtés sont de la même longueur et si tous les angles formés par deux côtés consécutifs ont la même mesure.

SPECIMEN

2 Notion de vecteur

Pour les exercices 118 à 121, on considère la figure ci-contre constituée de quatre carrés de même taille juxtaposés.



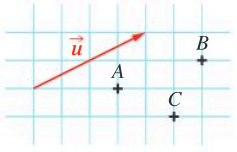
118 Donner l'image de :
1. B par la translation qui à H associe I ;
2. C par la translation qui à F associe H ;
3. A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CI}$;
4. H par la translation de vecteur $\overrightarrow{IM}$.

119 Dans chaque cas, préciser si les deux vecteurs ont la même direction, le même sens ou la même norme.
1. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ 2. $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DA}$ 3. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GI}$
4. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DB}$ 5. $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{IE}$ 6. $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{BF}$

120 Citer :
1. deux vecteurs qui ont la même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais pas le même sens ;
2. deux vecteurs qui ont la même direction et le même sens que $\overrightarrow{EC}$ mais pas la même norme ;
3. deux vecteurs qui ont la même norme que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ mais pas la même direction.

121 Citer :
1. trois paires de vecteurs égaux ;
2. trois vecteurs ayant la même direction ;
3. quatre vecteurs ayant la même norme ;
4. deux vecteurs ayant la même direction, des sens contraires et des normes différentes ;
5. quatre vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{EF}$.

122 1. Reproduire la figure ci-contre en respectant le quadrillage.



2. Construire A_1, B_1 et C_1, images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Construire A_2, B_2 et C_2, images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
4. Citer tous les vecteurs égaux.

123 Soient M, N et P trois points. On note R l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.
1. Faire une figure.
2. Démontrer que N est l'image de R par la translation de vecteur $\overrightarrow{PM}$.

124 Vrai ou faux ?
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Si A est le symétrique de B par rapport à C, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
2. Si C est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
3. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Si D est l'image de A par la translation de $\overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.
5. Si les segments $[EF]$ et $[GH]$ ont le même milieu, alors $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GF}$.

125 Soient A et B deux points distincts du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On note C et D les images respectives de A et B par la translation de vecteur $\vec{u}$.
1. Faire une figure.
2. Justifier que $ABDC$ est un parallélogramme.
3. On construit les points E et F, images respectives de C et D par la translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que $BCED$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes.

126 Soit RST un triangle équilatéral. On note R' et T' les images respectives des points R et T par la symétrie de centre S.
1. Faire une figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $RTR'T'$?
3. Soit S' l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}$. Démonter que le quadrilatère $STS'R'$ est un parallélogramme.

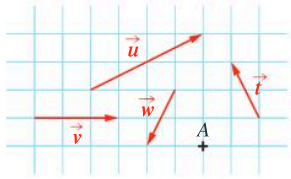
127 Soient $ABCD$ un parallélogramme de centre O et M un point quelconque du plan. Soient N et P les points tels que les quadrilatères $AMDN$ et $AMPB$ soient des parallélogrammes.
1. Faire une figure.
2. Quelle conjecture peut-on faire concernant les points N, O et P ?
3. a. Quelle est la nature du quadrilatère $DNBP$? Justifier en utilisant les vecteurs.
b. En déduire une preuve de la conjecture précédente.

128 Soit $ABCD$ un parallélogramme.
On note T l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, R l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et S l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{DB}$.
3. Montrer que le quadrilatère $DRCB$ est un parallélogramme.
4. Montrer que C est le milieu de $[RT]$.
5. En déduire que $ATSR$ est un parallélogramme.

SPECIMEN

3 Somme de vecteurs

129 On donne la figure suivante.

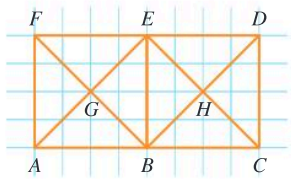


Construire un représentant, d'origine A, des vecteurs suivants.

1. $\vec{z_1} = \vec{u} + \vec{v}$ **2.** $\vec{z_2} = -\vec{u} - \vec{v}$

3. $\vec{z_3} = \vec{w} - \vec{t} + \vec{v}$ **4.** $\vec{z_4} = \vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$

130 On donne la figure suivante.



1. Déterminer les sommes vectorielles suivantes en complétant les pointillés.

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{\ldots B} = \overrightarrow{\ldots}$

b. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{D\ldots} = \overrightarrow{\ldots}$

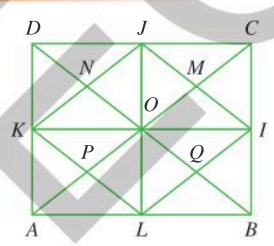
c. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{\ldots}$

2. Déterminer les sommes vectorielles suivantes.

a. $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{GE}$ **b.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB}$

c. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB}$ **d.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE}$

Pour les exercices **131** *à* **133**, *on considère la figure ci-contre constituée de quatre rectangles contigus DJOK, JCIO, KOLA et OIBL de centres N, M, P et Q respectivement.*



131 Écrire les sommes vectorielles suivantes à l'aide d'un unique vecteur.

1. $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{OB}$ **2.** $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{OD}$

3. $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}$ **4.** $\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{DK}$

5. $\overrightarrow{KO} - \overrightarrow{JI}$ **6.** $\overrightarrow{QO} - \overrightarrow{PK}$

132 Même consigne que l'exercice précédent.

1. $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{LA}$ **2.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{DC}$

3. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OM}$

133 Compléter les égalités vectorielles suivantes.

1. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{P\ldots}$ **2.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\ldots K} = \overrightarrow{JC}$

3. $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{B\ldots}$ **4.** $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AK}$

134 Simplifier à l'aide de la relation de Chasles et écrire comme un unique vecteur.

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ **2.** $\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RV}$ **3.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

4. $\overrightarrow{VU} - \left(\overrightarrow{VP} - \overrightarrow{KP}\right)$ **5.** $\overrightarrow{JO} - \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{KJ}$

135 Même consigne que l'exercice précédent.

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ **2.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}$

3. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$ **4.** $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$

136 Compléter à l'aide de la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{C\ldots}$ **2.** $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{\ldots P} + \overrightarrow{\ldots\ldots}$

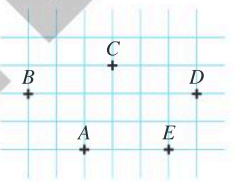
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{R\ldots}$

4. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$

137 Étant donnés quatre points A, B, C et D du plan, démontrer les égalités suivantes.

1. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ **2.** $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$

138 Reproduire la figure ci-contre.



1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définis par :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$

Construire un représentant d'origine A de chacun des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Que semble-t-on constater ?

2. Démontrer cette conjecture à l'aide de la relation de Chasles.

139 Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

1. Simplifier : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

2. Montrer les égalités vectorielles suivantes.

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ **d.** $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

140 Soit ABC un triangle.

1. Construire l'image M du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, puis l'image N du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$$

b. En déduire la nature du quadrilatère $ABMN$.

141 Soit un triangle ABC. On considère les points E et D tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Tracer une figure.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $AECB$? Quelle autre égalité de vecteurs peut-on en déduire ?

3. a. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. En déduire la nature du quadrilatère $ACDB$.

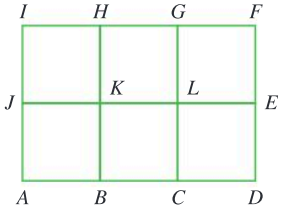
b. Quelle autre égalité vectorielle peut-on en déduire ?

4. Montrer que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EC}$. Que peut-on en déduire concernant le point C ?

SPECIMEN

4 Produit d'un vecteur par un réel

Pour les exercices 142 et 143, on considère la figure ci-dessous formée de six carrés.



142 Compléter les pointillés avec des nombres réels.

1. $\overrightarrow{IF} = \ldots\overrightarrow{AB}$ **2.** $\overrightarrow{KL} = \ldots\overrightarrow{DB}$ **3.** $\overrightarrow{FD} = \ldots\overrightarrow{AJ}$

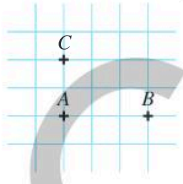
4. $\overrightarrow{GF} = \ldots\overrightarrow{BA}$ **5.** $\overrightarrow{DA} = \ldots\overrightarrow{KE}$ **6.** $\overrightarrow{JE} = \ldots\overrightarrow{IG}$

143 Compléter les pointillés avec des nombres réels.

1. $\overrightarrow{KF} = \ldots\overrightarrow{AB} + \ldots\overrightarrow{AJ}$ **2.** $\overrightarrow{ID} = \ldots\overrightarrow{GL} + \ldots\overrightarrow{GH}$

3. $\overrightarrow{CJ} = \ldots\overrightarrow{LC} + \ldots\overrightarrow{EL}$ **4.** $\overrightarrow{JF} = \ldots\overrightarrow{HK} + \ldots\overrightarrow{CD}$

144 **1.** Reproduire la figure ci-contre en respectant le quadrillage.

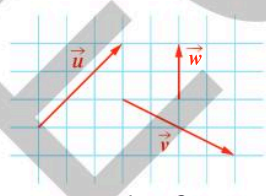


2. Construire les points D, E, F et G tels que :

a. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

c. $\overrightarrow{CF} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$ **d.** $\overrightarrow{GB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

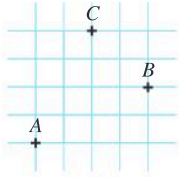
145 **1.** Reproduire la figure ci-contre en respectant le quadrillage.



2. Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants.

a. $2\vec{u} + 3\vec{v}$ **b.** $\frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{w}$ **c.** $-\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 4\vec{w}$

146 **1.** Reproduire la figure ci-contre en respectant le quadrillage.



2. Construire les points M, N, P et Q tels que :

a. $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

c. $\overrightarrow{CP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ **d.** $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PB}$

147 Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{B} + \ldots\overrightarrow{C}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Pour les exercices 148 à 150, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

148 **1.** $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$ **2.** $3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$

149 **1.** $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AC}$ **2.** $3\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$

150 **1.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC}$ **2.** $-5\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{BA}$

151 Soient A et B deux points. On considère le point C tel que $4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

À l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$$

152 Soient A et B deux points tels que $AB = 8$ cm.

1. Construire les points C, D, E et F tels que :

a. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

c. $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AD}$ **d.** $\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

2. Soit G le point tel que $3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

a. Montrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

b. Construire le point G.

Pour les exercices 153 et 154, on considère la figure de l'exercice 142. Indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Dans l'affirmative déterminer un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

153 **1.** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{HF}$ **2.** $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CG}$

154 **1.** $\vec{u} = \overrightarrow{BJ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BL}$ **2.** $\vec{u} = \overrightarrow{CE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{GA}$

155 Soient ABC un triangle non aplati et les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

2. Que peut-on en déduire sur les points A, I et J ?

156 Soient ABC un triangle non aplati et les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Les points A, I et J sont-ils alignés ?

157 Soient ABC un triangle non aplati et les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

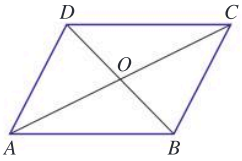
Les droites (AI) et (BJ) sont-elles parallèles ?

158 Reprendre l'exercice précédent avec :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BJ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

SPECIMEN

159 Ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.



1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

3. Montrer que $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

160 **Exercice guidé**

Soit MNP un triangle. On note R le symétrique de M par rapport à N et S le symétrique de M par rapport à P.

1. Faire une figure.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{RM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

3. a. En utilisant judicieusement la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{NP}$.

b. Que peut-on dire des droites (RS) et (NP) ?

Pistes de résolution

2. Il faut déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{RM} = k\overrightarrow{MN}$.

3. a. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R\ldots} + \overrightarrow{\ldots S}$. Utiliser **2.** pour savoir quel point utiliser.

161 Dans un triangle EFG, on considère les points H et K définis par $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{EG}$.

1. Faire une figure.

2. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{FE}$. De même, montrer que $\overrightarrow{FK} = 2\overrightarrow{FG}$.

3. Que peut-on dire des points F, G et K ?

162 Dans un triangle ABC, soient les points D et E tels que : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure. Que peut-on conjecturer quant aux points A, C, D et E ?

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{B\ldots}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{DE} = -5\overrightarrow{AC}$.

c. Que peut-on conclure quant aux droites (DE) et (AC) ?

3. a. Montrer que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$. Que peut-on conclure quant aux points A, D et C ?

b. Prouver la conjecture.

163 Dans un triangle ABC, soient les points D et E définis par $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

1. Faire une figure. Que peut-on conjecturer quant aux droites (DE) et (AC) ?

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{C\ldots}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Conclure.

Analyse d'un énoncé

164 **Exercice commenté**

Soit ABC un triangle. On note M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure.

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, montrer qu'on a $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

› À partir d'une des égalités vectorielles données, on décompose judicieusement $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{\ldots M}$.

b. Exprimer de la même manière le vecteur $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

› Comme dans la question **2. a.**, on utilise la relation de Chasles afin de décomposer judicieusement le vecteur $\overrightarrow{BN}$ pour faire apparaître $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Montrer que les droites (CM) et (BN) sont parallèles.

› Il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{CM}$

165 **Application immédiate**

Soit ABC un triangle. D et E sont deux points tels que D est le symétrique de C par rapport à B et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.

2. a. À l'aide de la relation de Chasles, compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{C\ldots}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{AE} = -4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

3. Montrer que les points A, D et E sont alignés.

166 Soient $ABCD$ un parallélogramme et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

1. Construire une figure.

2. Exprimer $\overrightarrow{EB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4. Montrer que les points E, F et B sont alignés.

167 **Étude d'un parallélisme**

On considère un rectangle $ABCD$.

On note I et J les points définis respectivement par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.

2. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

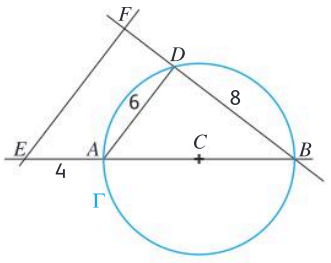
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

SPECIMEN

BILAN

168 20min Triangles, cercle et calculs

Sur la figure ci-contre, Γ est un cercle de diamètre $[AB]$ et D un point de ce cercle. La droite (AD) est parallèle à (EF).
De plus $AD = 6$; $DB = 8$ et $AE = 4$.



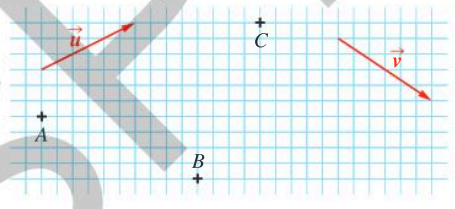
1. a. Quelle est la nature du triangle ABD ?
b. Calculer son aire.
2. Calculer le rayon du cercle Γ.
3. Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAD}$ au dixième de degré près.
4. Calculer la longueur FD.
5. Calculer la hauteur issue de F du triangle EBF.
6. Vrai ou Faux ? Justifier.
a. $EF = 1{,}4 \times AD$ **b.** $\mathscr{A}_{BEF} = 1{,}4 \times \mathscr{A}_{ABD}$

169 20min Étude d'une configuration

On considère le rectangle $DEFG$ de centre O et F' le symétrique de F par rapport à E. Les droites (DE) et (OF') sont sécantes en A.
1. Que représente (OF') pour le triangle DFF' ?
2. Montrer que (FA) coupe $[DF']$ en son milieu.
3. Justifier que le triangle DFF' et le rectangle $DEFG$ ont la même aire. Comparer leur périmètre.

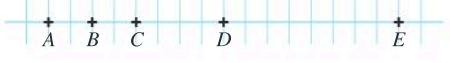
170 15min Construction de points

Reproduire la figure suivante et construire les points D, E, F, G et H définis par les relations vectorielles suivantes : • $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ • $\overrightarrow{BE} = \vec{u} - \vec{v}$ • $\overrightarrow{CF} = -2\vec{u}$ • $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\vec{u}$ • $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$



171 15min Vecteurs en questions

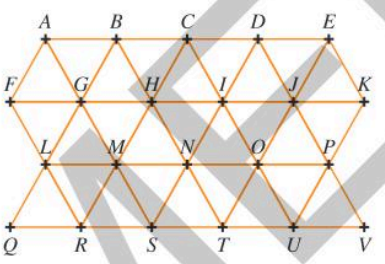
On considère les points A, B, C, D et E sur le quadrillage suivant.



1. Quelles sont les égalités vraies ?
a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ **b.** $AB = CB$ **c.** $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AD}$
d. $\overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{AB}$ **e.** $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ED}$ **f.** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$
2. Compléter les égalités suivantes par le nombre réel qui convient.
a. $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{EA} = \ldots\overrightarrow{AB}$
c. $\overrightarrow{DC} = \ldots\overrightarrow{AD}$ **d.** $\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{AE}$

172 20min Dans un pavage…

On considère le pavage suivant constitué de triangles équilatéraux.



1. a. Citer trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{LH}$.
b. Citer trois vecteurs opposés à $\overrightarrow{MC}$.
c. Citer trois vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{CJ}$.
2. Compléter les égalités vectorielles suivantes.
a. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{O\ldots}$ **b.** $\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{\ldots D}$ **c.** $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{J\ldots} = \vec{0}$
d. $\overrightarrow{IT} = -\overrightarrow{O\ldots}$ **e.** $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{S\ldots}$ **f.** $\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{U\ldots}$
3. Écrire sous la forme d'un unique vecteur les sommes vectorielles suivantes.
a. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BN}$ **b.** $\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{IO}$ **c.** $\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{DV}$
d. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AF}$ **e.** $-2\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{RM}$ **f.** $\frac{2}{3}\overrightarrow{LO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ND}$
4. Compléter les égalités vectorielles suivantes par les nombres réels qui conviennent.
a. $\overrightarrow{MP} = \ldots\overrightarrow{IH}$ **b.** $\overrightarrow{MC} = \ldots\overrightarrow{TE}$ **c.** $\overrightarrow{HK} = \ldots\overrightarrow{IG}$
d. $\overrightarrow{MJ} = \ldots\overrightarrow{FG} + \ldots\overrightarrow{FA}$ **e.** $\overrightarrow{DQ} = \ldots\overrightarrow{FG} + \ldots\overrightarrow{FA}$

173 30min Alignés ?

On considère un triangle ABC tel que :
$$AB = 6,\ BC = 3 \text{ et } AC = 5$$
Soient les points D, E et F définis par :
$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$$
1. Construire une figure. Que peut-on conjecturer quant aux points D, E et F ?
2. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que :
$$\overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$
3. a. Compléter à l'aide de la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \ldots\overrightarrow{B} + \ldots$$
b. En déduire que $\overrightarrow{ED} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
4. Justifier que $\overrightarrow{FE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$.
5. Conclure.

SPECIMEN

174 20min **Dans un parallélogramme…**

On considère un parallélogramme $ABCD$. I est le milieu du segment $[AB]$ et les points J et K sont définis par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

1. Construire une figure et conjecturer la nature du quadrilatère $IJKB$.

2. On souhaite décomposer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Compléter :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{\ldots} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\ldots} + \ldots\overrightarrow{AD}$$

3. a. Compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{\ldots}$.

b. Sachant que $ABCD$ est un parallélogramme, en déduire que $\overrightarrow{BK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

4. Conclure.

APPROFONDISSEMENT

175 Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle. On note G le point vérifiant :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

1. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

2. Soit I le milieu de $[BC]$.

a. Montrer, à l'aide de la relation de Chasles, que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

c. Justifier alors que G appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

3. a. Montrer que

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

b. Soit J le milieu de $[AC]$. Montrer que

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}.$$

c. Que peut-on en déduire ?

Info

On peut démontrer de la même façon que G appartient à la médiane issue du sommet C. On aura ainsi démontré que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G et que ce point se situe aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet. G s'appelle le **centre de gravité** du triangle ABC.

Démo

176 Hauteurs concourantes

On veut montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Soient un triangle ABC et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et de C.

1. Faire une figure.

2. a. Construire les parallèles à (AB), (BC) et (AC) passant respectivement par C, A et B. Nommer EFG le triangle obtenu par intersection de ces droites.

b. Montrer que les points A, B et C sont les milieux des côtés $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$.

3. Démontrer que la droite (BH) est la 3e hauteur du triangle ABC en montrant que ses hauteurs sont des droites remarquables du triangle EFG.

177 PYTHON **Quadrilatères et Python**

1. Dans un parallélogramme $ABCD$, que vaut $\widehat{A} + \widehat{B}$?

2. On souhaite réaliser une figure à l'aide du logiciel Python et de son module Tortue. On propose le programme ci-dessous.

```
1from turtle import*
2def parallélogramme(x,y,a):
3    for i in range(2):
4        forward(x)
5        left(a)
6        forward(y)
7        left(180-a)
8reset()
9goto(0,0)
10parallélogramme(200,300,45)
```

Info

- `forward(200)` signifie « avance de 200 ».
- `left(45)` signifie « tourne à gauche de 45° ».

a. À quoi sert la fonction `parallélogramme`, définie entre les lignes 3 et 7 du programme ?

b. Tracer la figure obtenue lors de l'appel :

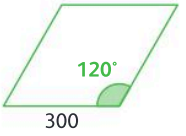
`parallélogramme(200,300,45)`

c. Plus généralement, réaliser un schéma à main levée de la figure obtenue lors de l'appel `parallélogramme(x,y,a)` sur laquelle on fera apparaître `x`, `y` et `a`.

3. Recopier le programme en modifiant la dernière ligne afin de réaliser :

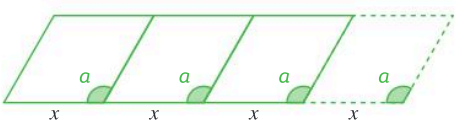
a. un rectangle tel que $L = 300$ et $l = 200$;

b. le losange ci-dessous.



4. Pour aller plus loin

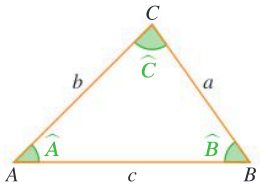
Écrire une fonction `frise(n,x,a)` permettant de construire une frise constituée de `n` losanges identiques de côté `x` pixels avec un angle de `a` degrés.



SPÉCIMEN

178 Aire d'un triangle et loi des sinus

On considère un triangle ABC dont les angles aux sommets sont aigus.



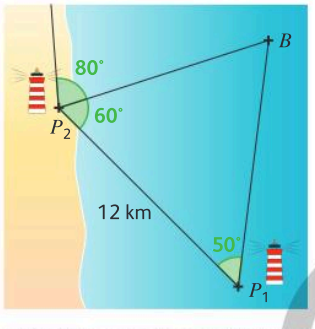
1. Montrer que son aire S est égale à $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.

2. En déduire la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=\frac{abc}{2S}$$

179 Loi des sinus et triangulation

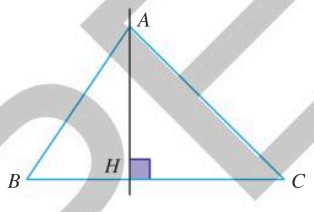
Un bateau se trouve près de la côte. Deux guetteurs situés dans les phares P_1 et P_2 distants de 12 km mesurent les angles indiqués sur la figure ci-dessous.



Le bateau est-il situé à moins de 9 km de la côte ?

180 Formule d'Al-Kashi et application

1. On considère un triangle quelconque ABC et H le pied de la hauteur issue de A.



a. Montrer que $AC^2=AB^2+HC^2-BH^2$.

b. Exprimer HC en fonction de BC et de BH.

c. Donner l'expression de $\cos\widehat{B}$ dans le triangle ABH.

d. En déduire la formule d'Al-Kashi (appelée aussi « théorème de Pythagore généralisé ») :

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\widehat{B}$$

2. Application.

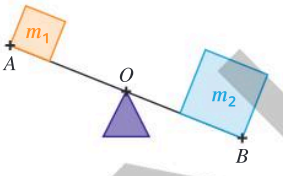
Dans un triangle ABC tel que $\widehat{B}=30°$, $AB=5$ cm et $BC=4$ cm, calculer la longueur AC (arrondir au mm près).

Info

Né à Kashan (Iran) en 1380, Jamshid Al-Kashi est un mathématicien et astronome Perse. Il est l'auteur, entre autres, de la loi des cosinus, d'une approximation de π d'une précision de 16 décimales…

181 Point d'équilibre et barycentre

Dans son traité *De l'équilibre des figures planes*, Archimède, au III^e siècle avant J.-C., énonce le principe des moments et des leviers : si on place une planche d'extrémités A et B, posée sur un support triangulaire en O, et sur laquelle on dépose deux objets de masses m_1 et m_2 alors la planche est en équilibre en O lorsque :



$$m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$$

1. On souhaite construire le point d'équilibre O pour une planche mesurant 1 mètre sur laquelle on dépose en A un objet de masse $m_1=2$ kg et en B un objet de masse $m_2=3$ kg.

a. En utilisant le principe des leviers, montrer que ce point O vérifie :

$$\overrightarrow{AO}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

b. Construire alors ce point d'équilibre (on prendra 10 cm pour 1 m)

2. a. Plus généralement, montrer que, lorsque $m_1+m_2\neq 0$, on a :

$$\overrightarrow{AO}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{AB}.$$

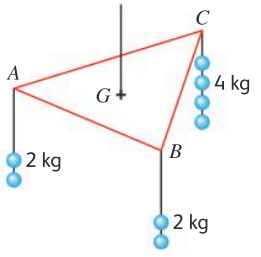
b. En déduire que si $m_1=m_2$ non nuls, alors le point d'équilibre O est le milieu de $[AB]$.

Info

Le point d'équilibre O est appelé ***barycentre*** (*barus* : poids) des ***points pondérés*** (A, m_1) et (B, m_2), m_1 et m_2 étant deux réels de somme non nulle.

182 Équilibre d'un mobile et barycentre

Un mobile est constitué d'un triangle ABC de masse négligeable et de poids fixés à chaque sommet. Pour que ce mobile soit en équilibre, le point G doit être le barycentre des trois points pondérés $(A\,;2)$, $(B\,;2)$ et $(C\,;4)$ c'est-à-dire que G vérifie l'égalité :



$$2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

1. Soit I le milieu de $[AB]$, justifier que :

$$2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}.$$

2. Montrer alors que G est le milieu de $[IC]$.

3. Conclure quant à une méthode de construction du point G.

SPÉCIMEN

Exercices — Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

183 Configurations et traductions vectorielles

Associer chaque situation à sa caractérisation vectorielle et l'illustrer à l'aide d'une figure.

Situation géométrique	Traduction vectorielle
1. C est le milieu du segment $[AB]$.	**a.** Il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.
2. $ABCD$ est un parallélogramme.	**b.** $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$
3. C est le point du segment $[AB]$ tel que $AC = \frac{1}{3}AB$.	**c.** Il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.
4. (AB) // (CD)	**d.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
5. A, B et C sont alignés.	**e.** $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$

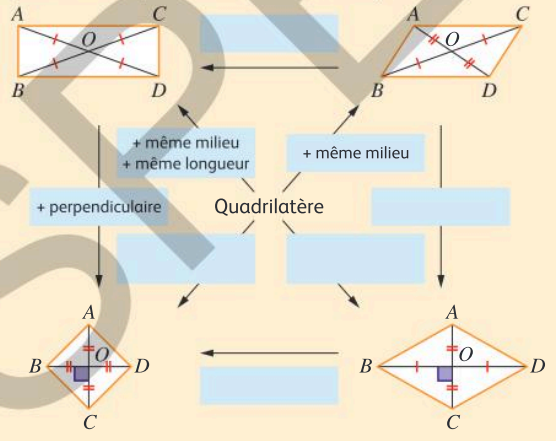
184 Choisir le bon connecteur logique

Compléter les phrases suivantes avec le connecteur approprié parmi : « donc », « car », « si et seulement si ».

1. M est le milieu de $[AB]$ … $MA = MB$.
2. M est sur la médiatrice de $[AB]$ … $MA = MB$.
3. $AB = CD$ … $ABCD$ est un parallélogramme
4. Le triangle ABC est rectangle en A … $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
5. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ … M est le milieu de $[AB]$.
6. $ABCD$ est un losange … $(AC) \perp (BD)$.

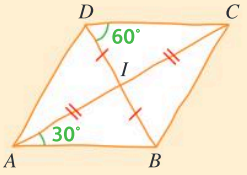
185 Raisonner à l'aide de configurations

1. Reproduire la carte mentale des propriétés des diagonales des quadrilatères et la compléter.



2. Application

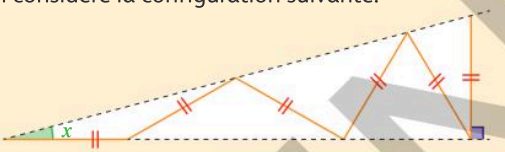
On considère la configuration ci-contre. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.



Aller plus loin

186 PRISE D'INITIATIVES

On considère la configuration suivante.



Quelle est la mesure x de l'angle coloré ?

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2046

187 Compétence Chercher

On considère $ABCD$ un parallélogramme. On place les points I, J, K et L sur les segments respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AI = BJ = CK = DL$.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est un quadrilatère particulier.

188 PRISE D'INITIATIVES

On considère un triangle ABC non aplati et les points D, E et F tels que :

① $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

② E soit le milieu de $[AC]$

③ F vérifie $3\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$

1. Construire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux droites (AF) et (ED) ?

2. a. Montrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

b. De même, exprimer le vecteur $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Démontrer alors la conjecture émise précédemment.

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2047

189 Plusieurs méthodes de résolution

Soient $ABCD$ un rectangle, I le milieu du segment $[AB]$ et K le point défini par $\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

1. Construire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux points A, K et C ?
2. Démontrer cette conjecture de deux manières :
a. en utilisant l'outil vectoriel ;
b. en utilisant les configurations.

190 Problème de construction

Étant donné un quadrilatère $ABCD$, construire le point G tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

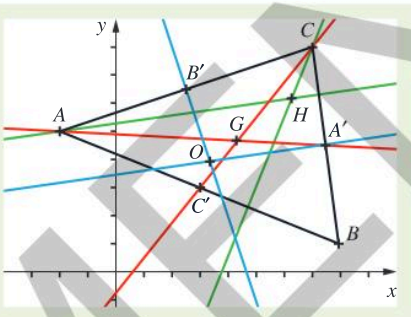
LOGICIEL GÉOMÉTRIE

La droite d'Euler

On considère un triangle ABC. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
On appelle O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre du triangle ABC.
On souhaite démontrer que O, G et H sont alignés.
La droite passant par ces points est appelée « droite d'Euler » du triangle ABC.

Construction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

- Placer trois points quelconques A, B et C non alignés.
- Construire les milieux A', B' et C'.
- Construire en bleu les médiatrices de $[AC]$ et $[BC]$.
- Placer le centre du cercle circonscrit O, intersection des deux médiatrices.
- Construire en rouge les médianes issues de A et de C.
- Placer le centre de gravité G, intersection des deux médianes.
- Construire en vert les hauteurs issues de A et de C.
- Placer l'orthocentre H, intersection des deux hauteurs.



Partie A Observations et conjecture

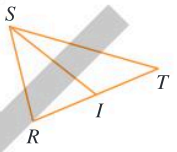
1. Vérifier que les points O, G et H sont alignés.
2. a. Tracer les segments $[OG]$ et $[OH]$.
b. Dans la fenêtre *Algèbre*, noter les noms donnés aux étiquettes associées à ces deux segments (j et k par exemple ci-contre).
c. Dans la barre de saisie, inscrire le quotient des deux étiquettes $r = k/j$.



3. a. À l'aide de la souris, déplacer les points A, B et C.
b. Que constate-t-on pour la position des points O, G et H ?
c. Que constate-t-on pour le rapport k ?
d. Quelle égalité peut-on conjecturer concernant les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$?

Partie B Démonstration d'une propriété

Soit I le milieu d'un segment quelconque $[RT]$.
Soit S un point quelconque.



En appliquant judicieusement la relation de Chasles, montrer qu'on a l'égalité :

$$\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{SI}$$

Partie C Démonstration de la conjecture de la partie A

1. Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
a. À l'aide de la relation de Chasles et du résultat de la partie B, montrer que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{\ldots M} = 2\overrightarrow{OA'}$$

b. Que peut-on dire des droites (AM) et (OA') ?
c. En déduire que la droite (AM) est la hauteur issue de A du triangle ABC.
d. Démontrer de même que (BM) est la hauteur issue de B du triangle ABC.
e. Justifier que M et H sont confondus et qu'on a l'égalité : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
a. À l'aide de la relation de Chasles et du résultat de la partie B, montrer que :

$$3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$$

b. En déduire que $N \in (AA')$.
c. Montrer de même que $N \in (BB')$.
d. Justifier que N et G sont confondus et qu'on a l'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3. À partir des égalités obtenues aux questions **1. e.** et **2. d.** et la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Conclure.

SPECIMEN

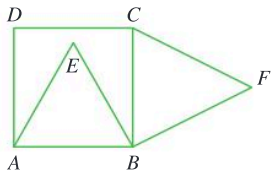
TP Mener une recherche

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

TP1 Un problème, plusieurs méthodes

TRAVAIL DE GROUPE

$ABCD$ est un carré de côté 1 et les triangles AEB et BCF sont équilatéraux.



1. Que peut-on conjecturer concernant les points D, E et F ?

Dans la suite, on s'intéresse à deux démonstrations possibles de cette conjecture.

2. Utilisation du calcul vectoriel

a. On note H le pied de la hauteur issue de E dans le triangle AEB. Montrer que $EH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Quelle est la distance entre F et la droite (BC) ?

b. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Décomposer alors les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

d. Conclure.

3. Utilisation de configurations et d'angles

Démontrer la conjecture en prouvant que l'angle $\widehat{DEF}$ est un angle plat.

Aide

Déterminer au préalable les angles au sommet de certains triangles isocèles.

TP2 Centre d'inertie d'une plaque homogène et barycentre

Propriétés – On admet les propriétés suivantes relatives au centre d'inertie d'une plaque homogène :

① si la plaque admet un centre de symétrie, c'est aussi le centre d'inertie de cette plaque

② si la plaque admet un axe de symétrie, le centre d'inertie appartient à cet axe

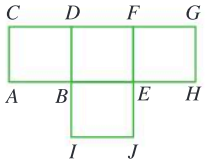
③ une plaque triangulaire admet pour centre d'inertie son centre de gravité

④ (**Juxtaposition**) si une plaque est constituée de deux parties disjointes de centres d'inertie respectifs G_1 et G_2 et de masses respectives m_1 et m, alors son centre d'inertie est le barycentre des points pondérés $(G_1 ; m)$ et $(G_2 ; m_2)$.

1. Quel est le centre d'inertie d'une plaque homogène dont la forme est :

a. un carré **b.** un rectangle **c.** un disque

2. On considère la plaque homogène ci-contre composée de quatre parties carrées identiques.



1re méthode : par décomposition sans calculs

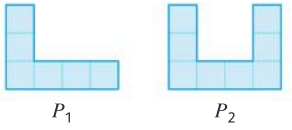
Sans faire aucun calcul, mais en utilisant deux « décompositions » différentes de cette plaque, construire son centre d'inertie O.

Indication : 1re décomposition : construire le centre d'inertie L du rectangle $AHGC$ puis le centre d'inertie K du carré $IBJE$. Pourquoi O appartient-il à la droite (LK) ?

2e décomposition : on pourra construire le centre d'inertie I du rectangle $AEFC$ puis…

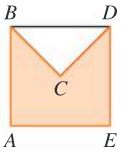
2e méthode : avec les barycentres. Justifier, à l'aide du principe de juxtaposition que O est le barycentre de $(L ; 3)$ et $(K ; 1)$. Construire O.

3. Construire le centre d'inertie des plaques homogènes suivantes (les carrés sont identiques) :



4. Plaques « évidées »

1. $ABDE$ représente une plaque homogène carrée de centre C. On retire la partie triangulaire BCD pour obtenir la plaque pentagonale $ABCDE$. On appelle G le centre d'inertie de la plaque BCD et O celui de $ABCDE$. On cherche à construire O.

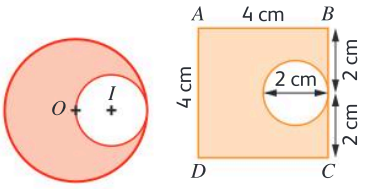


a. Justifier que C est le barycentre de $(G ; 1)$ et $(O ; 3)$.

b. En déduire que O est le barycentre de $(C ; 4)$ et $(G ; -1)$. Construire le point O.

2. Selon le même principe, on peut déterminer le centre d'inertie d'une plaque évidée, à l'aide du centre d'inertie de la plaque « avant évidement », et du centre d'inertie de la « partie évidée ».

Déterminer le centre d'inertie de chacune des plaques évidées ci-dessous :



SPÉCIMEN

CHAPITRE

6 Géométrie plane dans un repère

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Mettre en relation représentation et coordonnées d'un vecteur
- CAPACITÉ 2 Calculer les coordonnées du milieu d'un segment, la distance entre deux points
- CAPACITÉ 3 Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, du produit par un réel
- CAPACITÉ 4 Caractériser l'alignement par la colinéarité de vecteurs
- CAPACITÉ 5 Résoudre un problème d'alignement ou de parallélisme



Au fil du temps

La géométrie *cartésienne*, du nom de René Descartes (1596-1650), permet de résoudre des problèmes de géométrie par des méthodes calculatoires grâce à l'utilisation d'un repère et de coordonnées. Elle fait écho aux propos de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) : « Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés ; mais lorsque ces deux sciences furent réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection… »

SPECIMEN

Des maths partout !

Les coordonnées géographiques sont une déclinaison du système repéré introduit par Descartes. Elles permettent de localiser, de façon très précise aujourd'hui grâce aux satellites, tout point à la surface de la Terre.



La plus petite île habitée du monde : *Just Room Enough Island*, État de New York, États-Unis (44° 20′ 33″ N, 75° 55′ 29″ O).

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2048

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Tableaux de proportionnalité

1. Indiquer si les tableaux ci-dessous sont des tableaux de proportionnalité.

a.

x	2	3
y	6	9

b.

x	9	11
y	10	12

c.

x	−3	−9
y	2	6

2. Compléter les tableaux ci-dessous afin qu'ils soient des tableaux de proportionnalité.

a.

x	2	5
y	−4	…

b.

x	3	…
y	4	8

c.

x	…	5
y	3	7,5

3. Chacun des tableaux ci-dessous est un tableau de proportionnalité. Calculer le coefficient de proportionnalité noté k.

a.

x	2	3
y	7	10,5

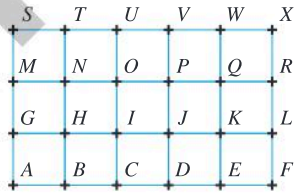
b.

x	−3	10
y	2,4	−8

c.

x	0,3	1,5
y	4,2	21

C Revoir les vecteurs



1. Recopier et compléter chacune des égalités suivantes avec la lettre qui convient.

a. $\overrightarrow{LW} = \overrightarrow{C\ldots}$ **b.** $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{UN} = \overrightarrow{R\ldots}$ **c.** $\overrightarrow{P\ldots} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IL}$

d. $\overrightarrow{A\ldots} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}$ **e.** $\overrightarrow{Q\ldots} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AG}$ **f.** $\overrightarrow{H\ldots} = \frac{1}{2}\overrightarrow{UK}$

2. Vrai ou faux ? Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

a. Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{VA}$ sont colinéaires.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{TC}$ sont colinéaires.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{UG}$ et $\overrightarrow{CX}$ sont colinéaires.

D Vrai ou faux ? Revoir des égalités de vecteurs

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$, alors O est le milieu du segment $[AB]$.

2. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors quel que soit le point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AI}$.

SCIMEN

automatismes

Automatismes transversaux

Pour les exercices 1 à 3, effectuer mentalement les calculs demandés.

1 En utilisant tout, ou une partie, des quatre nombres ci-dessous, donner un calcul valant :

75	2	3	5

1. 300
2. 753
3. 146

2 Effectuer les calculs suivants.

1. $4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)$ 2. $21\times\frac{2}{3}$ 3. $\frac{5}{4}\div 2$

3 Une salle carrée a une longueur de 3,5 m. Quel est son périmètre ? Quelle est son aire ?

4 On doit déplacer 76 tonnes de terre à l'aide d'un camion pouvant transporter 8 tonnes au maximum. Combien de voyages, au minimum, sont-ils nécessaires ?

5 On considère l'expression :

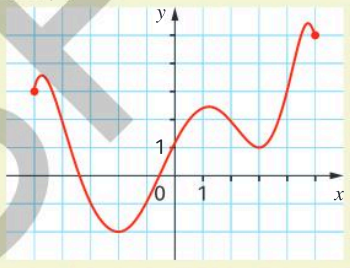
$$A(x)=2(5x-1)-(5x-1)^2$$

1. Développer $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

6 Donner le résultat sous la forme irréductible.

1. $\frac{2}{5}\times\frac{10}{8}-\frac{5}{4}$ 2. $\dfrac{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}-1}$

7 On considère ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



Par lecture graphique, déterminer :

1. l'ensemble de définition de la fonction f ;
2. $f(-2)$, puis $f(2)$;
3. les solutions de l'équation $f(x)=3$ sur $[0;5]$;
4. les solutions de l'équation $f(x)\leqslant -1$ sur $[-5;5]$.

Automatismes préparatoires au chapitre

Pour les exercices 8 à 12, effectuer mentalement les calculs demandés.

8 1. $-5-(-3)$ 2. $5-8$ 3. $2-(-3)$

9 1. $-2-(-7)$ 2. $-4+18$ 3. $12-(-13)$

10 Déterminer pour chaque tableau ci-dessous le coefficient de proportionnalité, s'il existe.

1.

5	7
15	21

2.

6	10
9	15

3.

4	9
−12	−26

11 Simplifier les nombres suivants.

1. $\sqrt{20}$ 2. $\sqrt{500}$ 3. $-2\sqrt{48}$

12 Simplifier les nombres suivants.

1. $\sqrt{3^2+4^2}$ 2. $\sqrt{4^2+(-2)^2}$

Pour les exercices 13 et 14, effectuer les calculs sans calculatrice.

13 1. $\frac{5+7}{2}$ 2. $\frac{-2-(-6)}{2}$ 3. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{2}$

14 1. $\frac{-2+6}{2}$ 2. $\frac{7-(-3)}{2}$ 3. $\dfrac{4-\frac{-1}{3}}{2}$

15 Simplifier les calculs suivants.

1. $2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$
2. $7\sqrt{3}-3\sqrt{48}+5\sqrt{12}$

16 Simplifier les calculs suivants.

1. $\sqrt{96}-\sqrt{6}-5\sqrt{24}$
2. $2\sqrt{32}-3\sqrt{50}+7\sqrt{8}$

17 Développer les expressions suivantes.

1. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ 2. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

18 Déterminer la 4e proportionnelle.

1.

2	6
5	…

2.

12	90
…	15

3.

42	…
6	7

19 Déterminer la 4e proportionnelle.

1.

−5	4
8	…

2.

9	…
4	8

3.

	−5
6	4

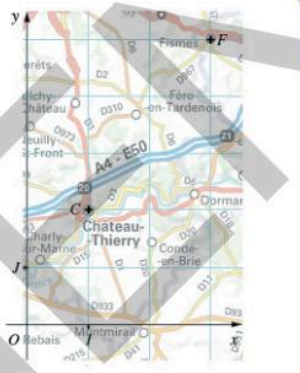
SPECIMEN

activités

1 Calculer une distance dans un repère orthonormé

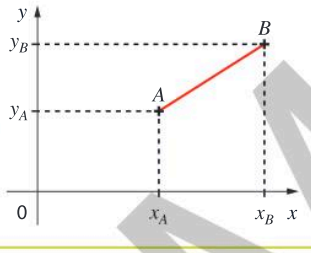
Objectif
Trouver et utiliser la formule d'une distance dans un repère orthonormé.

La carte ci-contre est munie d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité graphique correspond à 10 km sur le terrain. On souhaite calculer la distance à vol d'oiseau séparant la ville de Château-Thierry (point C) et le village de Fismes (point F).



1 **a.** Donner les coordonnées des points C et F dans ce repère.
b. En utilisant le quadrillage généré par le repère, trouver les coordonnées d'un point R pour que le triangle CRF soit rectangle en R.
c. Calculer la distance CF sur le graphique, puis la distance à vol d'oiseau entre Château-Thierry et Fismes.

2 On considère un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
En utilisant la méthode vue à la question **1**, trouver la formule permettant de calculer la longueur AB en fonction de x_A, y_A, x_B et y_B.



2 Déterminant de deux vecteurs

Objectif
Découvrir la notion de déterminant de deux vecteurs et son utilisation pour caractériser la colinéarité de deux vecteurs.

1 Parmi les tableaux suivants, lesquels sont de proportionnalité ?

①

3	−150
−4	200

②

12	216
15	270

③

−27	72
3	−9

④

$\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}+1$	1

⑤

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
30	20

⑥

$-\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$
60	−70

2 Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
a. Que signifie « les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » ?
b. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas.

① $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{18}{7}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ ② $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

c. Proposer un critère sur les nombres x, y, x' et y' permettant d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3 Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est le nombre :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=x\times y'-y\times x'$$

a. Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas de la question **2** **b.**
b. Proposer un critère sur la valeur de $\det(\vec{u},\vec{v})$ permettant d'affirmer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Info
La notion de déterminant a été initialement introduite pour la résolution de systèmes linéaires à deux inconnues par Cardan au XVI^{e} siècle. Elle a été généralisée par Maclaurin, Cramer, Laplace et Lagrange au XVIII^{e} siècle. Le mot « déterminant » n'a été introduit par Gauss qu'en 1801.

SPECIMEN

Cours

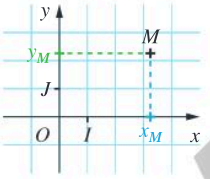
1 Coordonnées dans le plan

a Repère orthonormé

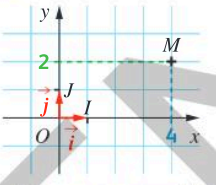
Définition Un **repère du plan,** défini par trois points non alignés O, I et J, est **orthonormé** lorsque le triangle OIJ est **rectangle isocèle** en O.
Le point O est **l'origine** du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) est l'axe des ordonnées. On a $OI = OJ = 1$ unité.

• Le repère se note $(O\,;I\,;J)$ ou $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$. En posant $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, le repère $(O\,;I\,;J)$ peut aussi s'écrire $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

• Dans un repère, tout point M est **repéré** par un **unique** couple de nombres réels $(x_M\,;y_M)$ appelé **coordonnées du point** M. On écrit $M(x_M\,;y_M)$.
x_M est l'abscisse de M et y_M est l'ordonnée de M.



Exemple



Le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O donc le repère $(O\,;I\,;J)$ est orthonormé.
Dans ce repère, le point M a pour coordonnées $(4\,;2)$.

b Coordonnées d'un vecteur

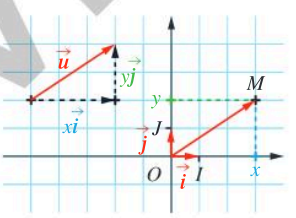
Propriété

• Pour tout point $M(x\,;y)$ dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on a :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la **base** $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

• Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la **base** $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.



(avec ici $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$)

Propriété Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et k un réel.

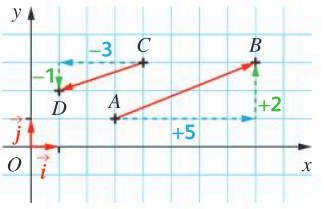
• $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

• Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

• Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple



• $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Démo

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
or $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$
et d'après la propriété précédente : $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$
donc $\overrightarrow{AB} = \left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right) - \left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = x_B\vec{i} - x_A\vec{i} + y_B\vec{j} - y_A\vec{j}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$
Ce qui signifie que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

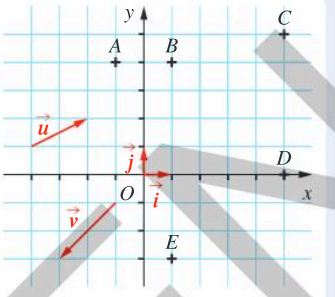
SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Mettre en relation représentation et coordonnées d'un vecteur

Énoncé

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-contre, on donne cinq points A, B, C, D, E et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1. a. Représenter le vecteur $\vec{z_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

b. Représenter le vecteur $\vec{z_2}$ d'origine A et de coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

2. a. Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

b. Construire le point G tel que $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

3. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\overrightarrow{DE}$.

Solution rédigée

1. a. Le vecteur $\vec{z_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc $\vec{z_1} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Ainsi à partir du point O par exemple (ou tout autre point), on dispose « bout à bout » le vecteur $3\vec{i}$ suivi du vecteur $2\vec{j}$. L'origine de $\vec{z_1}$ est le point O et son extrémité est celle du vecteur $2\vec{j}$. Voir la figure ci-contre.

b. Le vecteur $\vec{z_2}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, donc $\vec{z_2} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Ainsi à partir du point A, on dispose « bout à bout » le vecteur $-3\vec{i}$ suivi du vecteur $-2\vec{j}$. L'origine de $\vec{z_2}$ est le point A et son extrémité est celle du vecteur $-2\vec{j}$. Voir la figure.

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BF} = 2\vec{i}$. Ainsi à partir du point B, on construit le vecteur $2\vec{i}$. L'extrémité obtenue est le point F cherché.

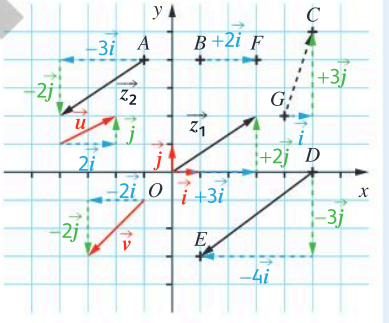
b. Le vecteur $\overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{GC} = \vec{i} + 3\vec{j}$. On dispose « bout à bout » le vecteur $\vec{i}$ suivi du vecteur $3\vec{j}$ puis on place le représentant de ce vecteur dont l'extrémité est le point C. L'origine de ce représentant est le point G cherché.

3. Par lecture graphique, on a $\vec{u} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$ (voir ci-contre). Ainsi $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

De même $\vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.

Point méthode

- Un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Pour tracer le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on dispose « bout à bout » les vecteurs $x\vec{i}$ et $y\vec{j}$.



Point méthode

3. On peut aussi construire $\overrightarrow{DE}$ à partir de $-3\vec{j}$; en effet $\overrightarrow{DE} = -4\vec{i} - 3\vec{j} = -3\vec{j} - 4\vec{i}$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 385 — Voir exercices similaires nos 39 à 44

20 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne deux points $A(3;2)$ et $B(-4;2)$.

1. Faire une figure.

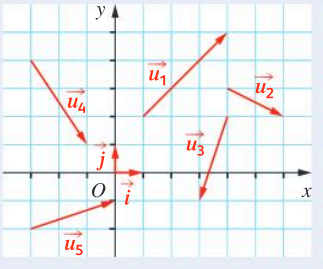
2. Représenter :

a. un vecteur $\vec{u}$ d'origine O et de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

b. un vecteur $\vec{v}$ d'origine A et de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Placer les points C et D tels que $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

21 Lire les coordonnées de tous les vecteurs tracés sur la figure ci-dessous.



SPECIMEN

Cours

2 Calculs dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un **repère orthonormé** $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété On considère deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ du plan.

Le **milieu** K du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Commentaire

Le milieu d'un segment peut être considéré comme un point « moyen » :
- son abscisse est la moyenne des abscisses des extrémités.
- son ordonnée est la moyenne des ordonnées des extrémités.

Démo

Démonstration

Le milieu K du segment $[AB]$ est défini par $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. En écrivant l'égalité des coordonnées de ces vecteurs, on a :

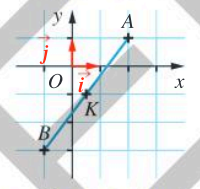
$$x_K-x_A=\frac{1}{2}(x_B-x_A) \text{ et } y_K-y_A=\frac{1}{2}(y_B-y_A)$$

Donc $x_K=x_A+\frac{1}{2}(x_B-x_A)$ et $y_K=y_A+\frac{1}{2}(y_B-y_A)$.

C'est-à-dire : $x_K=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$ et $y_K=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$.

Exemple

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(2;1)$ et $B(-1;-3)$.



Le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$\left(\frac{2+(-1)}{2}\,;\frac{1+(-3)}{2}\right)$, soit $(0{,}5\,;-1)$.

b Distance entre deux points, norme d'un vecteur

Propriété On considère deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ du plan.

La **distance** AB est donnée par $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Démo

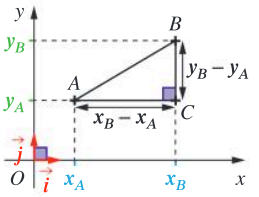
Démonstration partielle

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A<x_B$ et $y_A<y_B$. Le point $C(x_B\,;y_A)$ permet donc de définir le triangle ABC, rectangle en C.

Dans ce cas, $AC=x_B-x_A$ et $BC=y_B-y_A$ et d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2=AC^2+BC^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

d'où $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.



Commentaire

La norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul, comme la distance entre deux points.

Propriété

La **norme** d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$, est donnée par :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Démo

Démonstration

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a donc $x=x_B-x_A$ et $y=y_B-y_A$; d'où $\|\vec{u}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Dans l'exemple ci-dessus en haut de page, la longueur AB est obtenue par :

$$AB^2=((-1)-2)^2+((-3)-1)^2$$

$$AB^2=(-3)^2+(-4)^2=25$$

Donc $AB=\sqrt{25}=5$.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Calculer les coordonnées du milieu d'un segment, la distance entre deux points

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(0;8)$, $B(-3;2)$ et $C(3;-1)$.

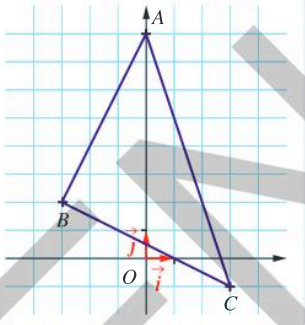
1. Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et AC.

2. En admettant que $BC = 3\sqrt{5}$, en déduire la nature du triangle ABC.

3. Vérifier que le point $D(1{,}5;3{,}5)$ est le milieu de $[AC]$.

4. Calculer les coordonnées du point E, symétrique du point B par rapport à D.

5. En déduire la nature du quadrilatère $ABCE$.



Solution rédigée

1. On calcule d'abord AB^2, puis on en déduit AB.

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-3-0)^2 + (2-8)^2 = 9+36 = 45$

donc $AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3-0)^2 + (-1-8)^2 = 9+81 = 90$

donc $AC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

2. On remarque que $BC = AB$, donc le triangle ABC est isocèle en B.

Mais on a aussi $AB^2 + BC^2 = 45 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 = 90 = AC^2$, donc le triangle ABC est rectangle en B.

Conclusion : le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

3. Le milieu de $[AC]$ a pour abscisse $\dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0+3}{2} = 1{,}5$ et pour ordonnée $\dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{8+(-1)}{2} = 3{,}5$. Ce sont les coordonnées du point D, donc D est bien le milieu de $[AC]$.

4. E est le symétrique du point B par rapport à D, donc D est le milieu de $[BE]$.

$$x_D = \frac{x_B + x_E}{2} \Leftrightarrow 1{,}5 = \frac{-3 + x_E}{2} \Leftrightarrow 3 = -3 + x_E \Leftrightarrow x_E = 6$$

$$y_D = \frac{y_B + y_E}{2} \Leftrightarrow 3{,}5 = \frac{2 + y_E}{2} \Leftrightarrow 7 = 2 + y_E \Leftrightarrow y_E = 5$$

Le point E a pour coordonnées $(6;5)$.

5. $ABCE$ est un quadrilatère dont les diagonales $[AC]$ et $[BE]$ se coupent en leur milieu D, c'est donc un parallélogramme.

Or le triangle ABC est rectangle isocèle en B, et un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur et un angle droit est un carré ; donc $ABCE$ est un carré.

Point méthode

1. Pour calculer une distance, il est plus simple de calculer d'abord son carré.

Point méthode

2. Déterminer la nature d'un triangle, c'est prouver que ce triangle est ou n'est pas un triangle particulier (isocèle, équilatéral, rectangle ou isocèle rectangle).

Point méthode

3. Le centre de symétrie est le milieu du segment reliant un point et son image.

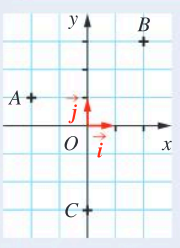
J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 385 Voir exercices similaires nos 45 à 59

22 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on place les points A, B et C.

1. Conjecturer graphiquement la nature du triangle ABC.

2. Démontrer cette conjecture.



23 Dans un repère orthonormé du plan $(O;I;J)$, on considère les points : $A(-5;5)$, $B(-2;-3)$ et $C(3;-1)$.

1. Le triangle ABC est-il rectangle ?

2. Déterminer par le calcul les coordonnées des milieux I et J respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.

3. Démontrer de deux façons différentes que $BC = 2\,IJ$.

SPÉCIMEN

Cours

3 Colinéarité et déterminant

a Critère de colinéarité de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. On a alors $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

- leurs coordonnées sont proportionnelles ;
- le tableau

abscisse	x	x'
ordonnée	y	y'

est un tableau de proportionnalité ;

- les produits « en croix » $x \times y'$ et $y \times x'$ sont égaux.

Commentaires

Ce critère de colinéarité est utile pour démontrer, dans un repère orthonormé, le parallélisme de droites et l'alignement de points du plan.

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Les points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

Dans un repère, on considère les points $A(-2;-3)$, $B(6;1)$, $C(-4;1)$, $D(2;4)$ et $E(1{,}4;-1{,}25)$.

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2-(-4) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

or $8 \times 3 = 6 \times 4$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 1{,}4-(-2) \\ -1{,}25-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}4 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}$

or $8 \times 1{,}75 \neq 4 \times 3{,}4$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et E ne sont pas alignés.

b Déterminant de deux vecteurs

Définition

On considère les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**, noté $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, est le nombre :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$$

Commentaires

- L'écriture avec le tableau des coordonnées permet de mémoriser la formule : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$.
- L'ordre dans lequel on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a de l'importance.

En effet, $\det\left(\vec{v},\vec{u}\right) = \begin{vmatrix} x' & x \\ y' & y \end{vmatrix} = x' \times y - y' \times x = -\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on aurait pu calculer les déterminants et arriver aux mêmes conclusions.

En effet :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 8 \times 3 - 4 \times 6 = 0$$

Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right) = 8 \times 1{,}75 - 4 \times 3{,}4 \neq 0$$

Donc les points A, B et E ne sont pas alignés.

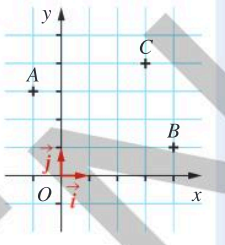
SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, du produit par un réel

Énoncé

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(-1;3)$, $B(4;1)$ et $C(3;4)$.
Soit $D(x_D\,;y_D)$ et $E(x_E\,;y_E)$ deux points tels que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AC}$.



1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AC}$.
2. a. Exprimer en fonction de x_D et y_D les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$.
b. En déduire les coordonnées du point D.
3. a. Exprimer en fonction de x_E et y_E les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$.
b. En déduire les coordonnées du point E.
4. a. Montrer que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}$. **b.** En déduire la nature du quadrilatère $ADEC$.

Solution rédigée

1. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}x_B-x_A=4-(-1)\\y_B-y_A=1-3\end{cases}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}x_C-x_A=3+1\\y_C-y_A=4-3\end{cases}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}5+4\\-2+1\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$.

Le vecteur $2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\times4\\2\times1\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

2. a. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D-x_A\\y_D-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D+1\\y_D-3\end{pmatrix}$.

b. On sait que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ sont égales. Ainsi on a les équations $x_D+1=9$ et $y_D-3=-1$.
Soient $x_D=8$ et $y_D=2$. On obtient donc : $D(8;2)$.

3. a. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-x_B\\y_E-y_B\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-4\\y_E-1\end{pmatrix}$.

b. On sait que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AC}$, donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $2\overrightarrow{AC}$ sont égales. Ainsi on a les équations $x_E-4=8$ et $y_E-1=2$.
Soient $x_E=12$ et $y_E=3$. Donc $E(12;3)$.

4. a. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-x_C\\y_E-y_C\end{pmatrix}$ et $\begin{cases}x_E-x_C=12-3\\y_E-y_C=3-4\end{cases}$ donc $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$.

De plus, on sait que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont donc les mêmes coordonnées, ainsi $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}$.

b. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}$ donc le quadrilatère $ADEC$ est un parallélogramme.

Point méthode

1. a., 2. a. et **3. a.** Pour calculer les coordonnées d'un vecteur, on applique pour $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, la formule :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

Point méthode

1. b. Pour calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs ou du produit d'un réel par un vecteur, on applique pour $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et k un réel, les formules :

- $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ pour les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$;
- $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ pour celles de $k\vec{u}$.

Point méthode

2. b. et **3. a.** Pour traduire l'égalité de deux vecteurs, on écrit que leurs coordonnées sont égales.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 385 Voir exercices similaires nos 60 à 65

24 Soient $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(-3;2)$ et $D(-5;-2)$.
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$. Justifier.

25 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
- $\vec{u}+\vec{v}$ • $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ • $2\vec{u}$ • $3\vec{u}-5\vec{v}$

26 Soient $A(-1;3)$, $B(5;1)$ et $C(3;5)$.
1. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
a. $\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{AC}$ **c.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
2. Soit $E(x_E\,;y_E)$ le point tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
a. Exprimer en fonction de x_E et y_E les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$.
b. En déduire les coordonnées de E.

SPÉCIMEN

Méthode

CAPACITÉ 4 Caractériser l'alignement par la colinéarité de vecteurs

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le triangle OAB avec $A(8;0)$ et $B(5;6)$.

Les points G et H vérifient : $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Construire la figure, placer les points G et H. Émettre une conjecture concernant les points O, G et H.

2. Démonstration de la conjecture à l'aide du calcul vectoriel

a. Démontrer que $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}$.

b. En utilisant la définition du point H, montrer que $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OH}$; puis conclure.

3. Démonstration de la conjecture à l'aide de calculs dans le repère

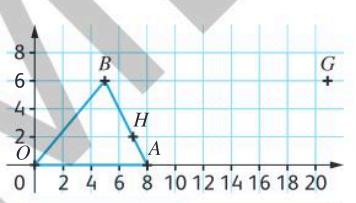
a. Préciser les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG}$.

b. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, en déduire que les coordonnées du point H sont $(7;2)$.

c. Calculer $\det\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OH}\right)$ et conclure.

Solution rédigée

1. Représentation graphique (voir ci-contre). Les points O, G et H peuvent sembler alignés.



2. a. $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}$

b. Avec **2. a.** on a : $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{OH}+3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}$.

Or : $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AH}$, ainsi : $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OH}+3\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{AH}$.

Comme $3\overrightarrow{HA}=-3\overrightarrow{AH}$, on conclut : $\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont donc colinéaires, et les points O, G et H sont alignés.

3. a. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc ses coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifient $x=2\times8+5=21$ et $y=2\times0+6=6$. Donc : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}21\\6\end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-8\\6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times(-3)\\\frac{1}{3}\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H-8\\y_H-0\end{pmatrix}$.

On en déduit donc : $x_H-8=-1$ et $y_H-0=2$, soit $x_H=7$ et $y_H=2$.

c. $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}21\\6\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OH}\right)=21\times2-7\times6=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires, et les points O, G et H sont donc alignés.

Point méthode

2. a. La présence du point H dans la partie droite de l'expression invite à l'utiliser dans la relation de Chasles.

Point méthode

3. a. Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ le point M a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

3. b. Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 385 Voir exercices similaires nos 66 à 71

27 Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère le triangle OAB de sommets $A(5;0)$ et $B(3;4)$.

Le point G vérifie : $\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$ et I est le milieu de $[OA]$.

1. Construire la figure et placer les points G et I. Émettre une conjecture concernant les points B, G et I.

2. Démonstration de la conjecture à l'aide du calcul vectoriel

a. Démontrer que $\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{OI}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OA}$.

b. En utilisant la définition du point I, montrer que $\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{IB}$; puis conclure.

3. Démonstration de la conjecture à l'aide de calculs dans le repère

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BG}$.

b. Calculer les coordonnées du point I, puis celles du vecteur $\overrightarrow{BI}$.

c. Calculer $\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BI}\right)$ et conclure.

SPECIMEN

CAPACITÉ 5 Résoudre un problème d'alignement ou de parallélisme

Énoncé

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on définit les points $U(136;0)$, $A(357;0)$, $B(136;136)$, $C(0;221)$ et $L(0;136)$.

1. Placer les points dans un repère.

2. Placer le point N, milieu de $[UA]$ puis calculer ses coordonnées.

3. Déterminer les positions relatives des droites (LN) et (AB).

4. Déterminer si les points A, B et C sont alignés.

Solution rédigée

1. Représentation graphique (voir ci-contre).

2. Les coordonnées de N sont $x_N = \dfrac{x_U + x_A}{2} = \dfrac{136+357}{2} = 246{,}5$

et $y_N = \dfrac{y_U + y_A}{2} = 0$.

3. D'après la figure, les droites (LN) et (AB) pourraient sembler parallèles. On examine la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{LN}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{LN}\begin{pmatrix}246{,}5-0\\0-136\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}246{,}5\\-136\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}136-357\\136-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-221\\136\end{pmatrix}$$

Or $246{,}5\times136 = 33\,524$ et $-136\times(-221) = 30\,056$

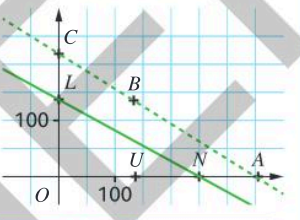
Comme $33\,524 \neq 30\,056$ les vecteurs $\overrightarrow{LN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, les droites (LN) et (AB) ne sont pas parallèles : elles sont donc sécantes.

4. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On a vu en **3.** que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-221\\136\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-357\\221-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-357\\221\end{pmatrix}$ et on a :

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -221\times221-(-357)\times136 = -289$;

le déterminant est différent de 0 : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.



Point méthode

1. Une figure permet de mieux comprendre l'énoncé.

Point méthode

3. « Déterminer les positions relatives » signifie qu'on cherche à savoir si les droites sont parallèles ou sécantes.

Point méthode

3. et **4.** On utilise au choix le calcul du déterminant ou les « produits en croix ».

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 385 Voir exercices similaires nos 72 à 85

28 Dans un repère orthonormé, on considère les points : $A(-5;8)$, $B(6;5)$, $C(-1;3)$, $D(3;2)$ et $E(7;-7)$

1. Les points A, C et E sont-ils alignés ?

2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

29 Dans un repère orthonormé, on considère les points : $A(2;6)$, $B(-3;5)$, $C(4;1)$, $D(-8;-1)$ et $E(6;-4)$

1. Les points A, C et E sont-ils alignés ?

2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

3. Le triangle BCD est-il isocèle ?

30 Dans un repère orthonormé, on définit les points $A(-3;1)$, $B(7;5)$, $C(2;y)$.

1. Justifier que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $10(y-1)-4\times5=0$.

2. Résoudre l'équation précédente pour déterminer l'ordonnée du point C.

3. Le point D a pour ordonnée 4 ; déterminer son abscisse afin que les points A, B et D soient alignés.

31 Vrai ou faux ?

Dans un repère orthonormé, on considère les points : $A(-1;5)$, $B(1;1)$, $C(4;-5)$, $D(2;3)$ et $E(3;5)$

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

3. Les points B, D et E sont alignés.

4. Les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

SPÉCIMEN

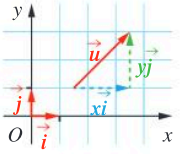
Je fais le point

Je revois mon cours

Coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

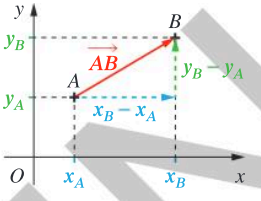
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

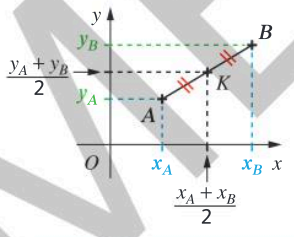


Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

Coordonnées du **milieu** K du segment $[AB]$:

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



Distance dans un repère orthonormé

Norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Distance entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

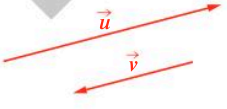
Déterminant de deux vecteurs

- Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$$

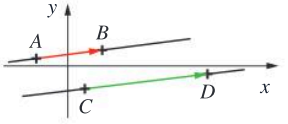
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$$

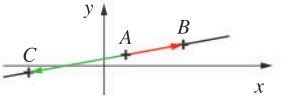


Configurations du plan

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$.



- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$.





Je m'exerce à démontrer

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2049

SPÉCIMEN

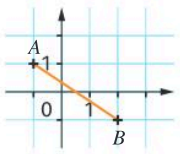
J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2050

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Voir corrigés p. 386

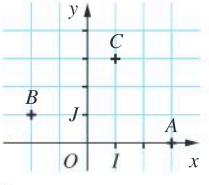
	a	b	c
1.  Par lecture graphique des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$	$-2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$
2. Dans un repère, si $A(2;-3)$ et $B(-4;-6)$ alors :	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \ldots$	$x\times x' - y\times y'$	$x\times y - x'\times y'$	$x\times y' - y\times x'$
4. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \ldots$	10	26	0
5. Si $A(-3;4)$, $B(2;5)$, $C(4;7)$ et $D(-6;5)$, alors :	$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$	les droites (AB) et (CD) sont parallèles	$AD = BC$
6. Si $A(4;1)$, $B(-2;6)$, $C(2;8)$ et $D(14;-2)$, alors :	les droites (AD) et (BC) sont sécantes	$ABCD$ est un trapèze	$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$
7. Si $A(-3;-2)$, $B(5;1)$ et $C(21;7)$, alors :	$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = 0$	A, B et C sont alignés	$\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$
8. Si $A(3;4)$ et $B(9;1)$, alors :	le point $(13;-1)$ appartient à (AB)	le point $(-3;8)$ appartient à (AB)	le point $(19;-4)$ n'appartient pas à (AB)
9. Si $A(-2;2)$, $B(6;-2)$, $C(4;9)$ et $D(16;3)$, alors :	les droites (AB) et (CD) sont parallèles	les segments $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu	$AB = 9$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;I;J)$.



1. Les coordonnées du point A sont $(0;3)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2;-3)$.

3. La longueur AC est égale à $\sqrt{13}$.

4. Le triangle ABC est isocèle en C.

5. Le triangle ABC est rectangle en C.

6. Les coordonnées du point D telles que $ADBC$ soit un parallélogramme sont $(0;-2)$.

Partie B.

Dans un repère orthonormé (unité graphique 1 cm), on considère les points $A(-2;2)$, $B(2;5)$, $C(-6;5)$, $D(-2;7)$, $E(-6;-1)$ et $F(-9;3)$.

On note Γ le cercle de centre A passant par B.

1. Le cercle Γ a pour rayon 5 cm.

2. A est le milieu du segment $[EB]$.

3. Le point C appartient au cercle Γ.

4. Le triangle BCE est rectangle.

5. Le triangle AEF est rectangle.

6. C appartient à la médiatrice du segment $[EB]$.

7. Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2051

Acquérir des automatismes

32 Simplifier l'écriture des nombres réels suivants.

1. $\sqrt{75}$ 2. $\sqrt{144}$ 3. $\sqrt{252}$ 4. $\sqrt{1815}$

33 Écrire chaque fraction sous forme irréductible.

1. $\frac{12}{18}$ 2. $\frac{42}{66}$ 3. $\frac{735}{42}$ 4. $\frac{363}{17}$

34 1. Recopier et compléter la formule de cours :

$$k(a+b)=\dots$$

2. Développer les expressions suivantes.

a. $5(x-9)$ b. $-3(2x+7)$ c. $3x(8x-4)$

35 1. Recopier et compléter la formule de cours :

$$(a+b)(c+d)=\dots$$

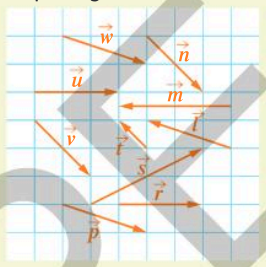
2. Développer les expressions suivantes.

a. $(2x-1)(x-4)$ b. $(6x-12)(2x+7)$

36 1. Détailler deux façons d'effectuer le produit suivant : $2\times3\times4$.

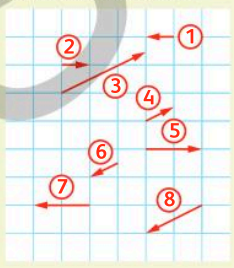
2. En déduire deux façons de développer l'expression suivante : $A(x)=3(x-2)(x+4)$.

37 En observant les vecteurs représentés ci-dessous, préciser les couples de vecteurs : égaux ; opposés ; colinéaires mais pas égaux.



Pour les vecteurs colinéaires mais ni égaux ni opposés, préciser la relation de colinéarité (du type $\vec{a}=k\vec{b}$).

38 Attribuer un nom à chacun des vecteurs ci-dessous, numérotés de 1 à 8, pour que les égalités proposées soient vérifiées.



Égalités à vérifier :

$\vec{v}=3\vec{u}$

$\vec{w}=-\frac{2}{3}\vec{v}$

$\vec{t}=-\frac{1}{2}\vec{r}$

$\vec{s}=-\vec{t}$

$\vec{n}=-\vec{r}$

$2\vec{m}=\vec{w}$

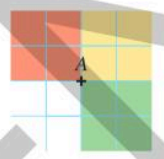
Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Mettre en relation représentation et coordonnées d'un vecteur

Voir p. 143

39 À l'oral

À l'aide des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ indiquer dans chaque cas la couleur du quadrant (non limité aux quatre carreaux représentés) dans lequel se trouve le point B. Le repère est orthonormé et un carreau du quadrillage a pour côté 1 unité.

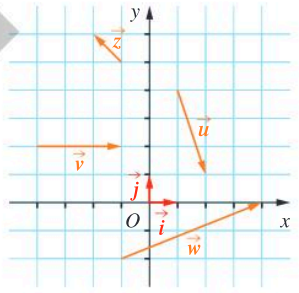


1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ 2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ 3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0,1\\5\end{pmatrix}$ 5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}-3\end{pmatrix}$ 6. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

Dans les exercices 40 à 42, lire graphiquement les coordonnées des vecteurs dans le repère indiqué sur la figure.

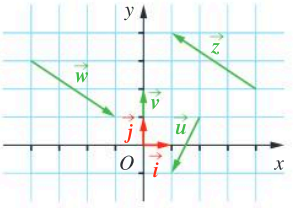
40



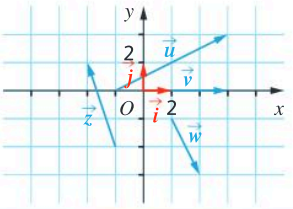


CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2052

41



42



SPECIMEN

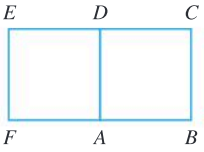
43 On considère deux points $A(4;2)$ et $B(-2;-1)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.

1. Construire un représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$.

2. Construire un représentant d'extrémité A du vecteur $\vec{v}$.

3. Construire un représentant d'origine B du vecteur $\vec{w}$.

44 Soient $ABCD$ et $ADEF$ deux carrés.



1. On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$. Lire les coordonnées de tous les points et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BE}$.

2. a. Reprendre la question **1.** si on se place maintenant dans le repère $\left(F;\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FE}\right)$.

b. Que constate-t-on ?

ACTIVITÉ 2 Calculer les coordonnées du milieu d'un segment, la distance entre deux points

Voir p. 145

Dans toute cette partie, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Dans les exercices **45** *à* **47**, *calculer les coordonnées des milieux respectifs I, J et K des segments* $[AB]$, $[AC]$ *et* $[BC]$.

45 $A(-2;6)$, $B(4;2)$ et $C(0;4)$.

46 $A(4;-5)$, $B(4;0)$ et $C(10;-5)$.

47 $A(-3;-4)$, $B\left(\frac{1}{2};-1\right)$ et $C(-3;7)$.

48 Pour chaque liste de quatre points, déterminer les coordonnées du milieu des diagonales du quadrilatère $ABCD$ et déterminer si ce quadrilatère est un parallélogramme.

1. $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(4;-1)$ et $D(0;-3)$.

2. $A(-5;5)$, $B(1;3)$, $C(2;-2)$ et $D(-4;1)$.

49 Pour chaque liste de quatre points, déterminer les coordonnées du milieu des diagonales du quadrilatère $EFHG$ et déterminer si ce quadrilatère est un parallélogramme.

1. $E(0;4)$, $F\left(\frac{1}{3};\frac{14}{3}\right)$, $G(3;5)$ et $H\left(\frac{10}{3};\frac{17}{3}\right)$.

2. $E\left(-\frac{1}{4};\frac{2}{5}\right)$, $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)$, $G\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{10}\right)$ et $H\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

50 On considère les points $A(5;-7)$, $B(-2;6)$ et I le milieu du segment $[AB]$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

2. En déduire, sans calcul, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AB}$.

51 On considère les points $E(-1;0)$, $F\left(-\frac{1}{2};4\right)$, $G\left(\frac{1}{4};-5\right)$ et I le milieu du segment $[EF]$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{IG}$.

52 On considère les points $A(-5;3)$ et $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point C pour que B soit le milieu du segment $[AC]$.

Dans les exercices **53** *à* **55**, *calculer les distances AB, AC et BC.*

53 $A(1;0)$, $B(4;4)$ et $C(3;4)$.



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2053

54 $A(-2;3)$, $B(9;-2)$ et $C(2;0)$.

55 $A(5;2)$, $B(3;0)$ et $C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

56 On considère les points $A(1;2)$, $B(2;-1)$ et $C(-6;-2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. En déduire l'aire de ABC.

57 On considère les points $A(-3;-4)$, $B(-2;3)$ et $C(2;1)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. En déduire l'aire du triangle.

58 On considère les points $S(-7;-2)$, $E(3;0)$ et $T(-3;-6)$.

1. Calculer les longueurs SE, ST et ET.

2. a. Vérifier que $SE^2 = ST^2 + ET^2$.

b. En déduire la nature du triangle SET.

59 On considère les points $A(1;0)$, $B(-2;3)$ et $C(5;4)$.

1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

2. a. Vérifier que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer l'aire du triangle ABC.

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2051

Capacité 3 Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, du produit par un réel

Voir p. 147

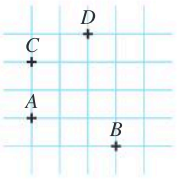
60 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

1. $\vec{u}+\vec{w}$ **2.** $\vec{u}+\vec{v}$

3. $3\vec{u}-8\vec{w}$ **4.** $-2\vec{u}+3\vec{v}-5\vec{w}$

61 On considère ci-contre les points A, B, C et D dans le plan muni d'un repère orthonormé, un carreau du quadrillage correspondant à un « carré unité ».



1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. En déduire les coordonnées des vecteurs $-3\overrightarrow{AB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ puis $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

Dans les exercices **62** *à* **64**, *on considère un point* $M(x\,;y)$ *et des points* A, B *et* C.

1. *Exprimer le vecteur* $\overrightarrow{AM}$ *en fonction de* x *et* y.

2. *Calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

3. *Déterminer les coordonnées de* M *pour que l'on ait l'égalité de vecteurs :* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

62 $A(5\,;9)$, $B(-6\,;4)$ et $C(10\,;-2)$.

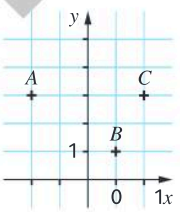


CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2054

63 $A(-6\,;0)$, $B(4\,;-7)$ et $C(1\,;-4)$.

64 $A(8\,;4)$, $B(-2\,;-3)$ et $C(5\,;-6)$.

65 On considère les points A, B et C ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement les coordonnées du point D telles que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

2. Vérifier, par le calcul, qu'avec les coordonnées trouvées dans la question **1.** l'égalité est vérifiée.

Capacité 4 Caractériser l'alignement par la colinéarité de vecteurs

Voir p. 148

66 Vrai ou Faux ?

Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$, alors les trois points A, B et C sont distincts et alignés.

2. Si $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, alors A, B et C sont alignés et C est le milieu de $[AB]$.

3. Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, alors les points A, B, C et D sont alignés.

4. Si A, B et C sont trois points distincts tels que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, où k est un réel non nul, alors A, B et C sont alignés.

67 On considère deux points distincts A et B et un nombre réel k. Le point M vérifie $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

1. Que peut-on affirmer du point M ?

2. Dans chaque cas ci-dessous, préciser la position de M en fonction des points A et B.

a. $k=0$ **b.** $k=1$ **c.** $k=\frac{1}{2}$

d. $0<k<1$ **e.** $k>1$ **f.** $k<0$

68 On donne les points $A(13\,;8)$, $B(21\,;13)$ et $C(34\,;21)$.

1. Faire une figure aussi précise que possible dans un repère orthonormé ayant pour unité graphique 0,5 cm.

2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

69 On donne les points $A(-5\,;-2)$, $B(-3\,;-5)$ et $C(-13\,;10)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

70 On considère un triangle ABC, et le milieu A' du côté $[BC]$.

1. Faire une figure et construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

2. Démontrer que les points A, A' et M sont alignés.

71 On considère un triangle ABC et les trois points L, M et N vérifiant :

$$\overrightarrow{CL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.

2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :

$$\overrightarrow{LN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

3. a. Démontrer de même que : $\overrightarrow{LM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b. En remarquant que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$, démontrer l'égalité : $\overrightarrow{LM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

4. En déduire l'égalité : $\overrightarrow{LM}=3\overrightarrow{LN}$.

5. Que peut-on en déduire pour les points L, M et N ?

SPECIMEN

CASAGE 5 Résoudre un problème d'alignement ou de parallélisme

Voir p. 149

Dans toute cette partie, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

72 Dans chaque cas, calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis indiquer s'ils sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7{,}5\\-10\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{10}\end{pmatrix}$ **4.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$

73 Dans chaque cas, déterminer la valeur du nombre réel a pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\a\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2+a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10{,}2\\17\end{pmatrix}$

Dans les exercices **74** *à* **76**, *calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *puis indiquer si ces vecteurs sont colinéaires.*

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2055



74 $A(-3;4)$, $B(2;3)$, $C(-5;2)$ et $D(5;0)$.

75 $A(1;4)$, $B(-1;1)$, $C(-6;-1)$ et $D(-2;5)$.

76 $A(2;-2)$, $B(4;-1)$, $C(-5-3)$ et $D(6;3)$.

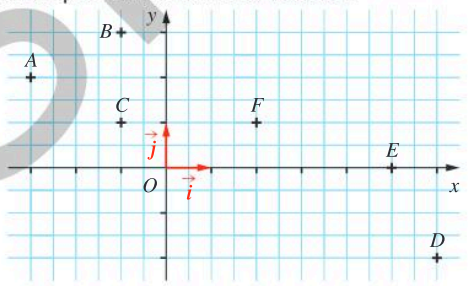
Dans les exercices **77** *à* **79**, *calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{HI}$ *et* $\overrightarrow{HJ}$ *puis déterminer si les points* H, I *et* J *sont alignés.*

77 $H(-4;2)$, $I(-2;-1)$ et $J(2;-7)$

78 $H(-4;0)$, $I(2;1)$ et $J(13;3)$

79 $H(-3;-2)$, $I(-1;1)$ et $J(17;3)$

80 On a placé des points à coordonnées entières dans le repère orthonormé ci-dessous.



1. Les droites (AC) et (BE) sont-elles parallèles ?
2. Les points A, C et D sont-ils alignés ?
3. Les points B, D et F sont-ils alignés ?

81 On considère les points $A(4;3)$, $B(2;-2)$, $C(0;x)$, $D(-3;-1)$ et $E(-5;-6)$, où x désigne un nombre réel.

1. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer x pour que les points A, B et C soient alignés.

82 On considère un rectangle $ABCD$ tel que I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[DA]$.

1. Faire une figure.
2. a. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
b. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
c. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
3. On choisit le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
a. Donner les coordonnées des points A, B, D, I et J.
b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$.
c. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
4. On appelle O le centre du rectangle $ABCD$. Quelle est la nature du quadrilatère $AIOJ$?

83 On considère le carré $ABCD$ de côté 4 cm et les points I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$. On place de plus le point K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.
2. En utilisant une décomposition vectorielle ou en introduisant un repère, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires.
3. On considère le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. Montrer, après avoir déterminé les coordonnées des points D, I, J et K, que les vecteurs $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéraires.

84 On considère un rectangle $ABCD$ ainsi que les points E et F les symétriques respectifs du point A par rapport à B et du point A par rapport à D.

1. Construire une figure.
2. En utilisant une décomposition vectorielle ou en introduisant un repère, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
3. En comparant les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{CB}$, démontrer que le point C est le milieu du segment $[EF]$.

85 On considère un triangle ABC et les points B' et C' vérifiant : $\overrightarrow{AB'}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AC}$.

1. Construire une figure.
Que peut-on affirmer des points A, B, B' d'une part et A, C, C' d'autre part ?
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{B'C'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire ? Quel résultat de géométrie de collège a-t-on ainsi illustré ?

SPÉCIMEN

1 Coordonnées dans le plan

Pour les exercices 86 à 105, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

86 Soient $A(-3;1)$, $B(6;4)$, $C(3;-1)$ et $D(13;2)$.

1. a. Placer les points dans le repère.

b. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b. $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

3. Soit $E(0;t)$ où t est un nombre réel.

a. Exprimer en fonction de t les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$.

b. Déterminer la valeur de t pour que le quadrilatère $ACBE$ soit un parallélogramme.

c. Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme $ACBE$.

87 Soient les points $C(2;1)$, $E(6;4)$, $R(8;-1)$ et $F(4;-2)$.

1. Placer les points dans le repère.

2. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{ER}$.

3. Retrouver ces coordonnées par le calcul.

4. Le quadrilatère $CERF$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $DERF$ soit un parallélogramme.

6. Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme $DERF$.

88 Soient les points $L(-6;-1)$, $U(2\,001;2\,023)$ et $N(1\,995;2\,024)$.

1. Le quadrilatère $LOUN$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

2. Déterminer les coordonnées du point A tel que $LUNA$ soit un parallélogramme.

89 Compétence Calculer Dans chacun des cas, on donne les coordonnées d'un point A et celle d'un vecteur $\vec{u}$.

Déterminer les coordonnées $(x;y)$ du point M image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

1. $A(5;12)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$ **2.** $A(-15;8)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$

3. $A(24;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ **4.** $A(0,7;1,3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

90 Dans chacun des cas, on donne les coordonnées d'un point B et celle d'un vecteur $\vec{v}$. Déterminer les coordonnées du point A tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$.

1. $B(6;4)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ **2.** $B(5;2)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

3. $B(0;3)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ **4.** $B(-1;0)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$

91 **Translation et coordonnées (1)**

On donne deux points $A(5;3)$ et $B(-2;5)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du point C image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2. Calculer les coordonnées du point D image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$.

92 **Translation et coordonnées (2)**

Soient les points $S(-5;-3)$, $A(1;-2)$ et $U(-1;3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point M, image du point U par la translation de vecteur $\overrightarrow{SA}$.

2. Déterminer les coordonnées du point E, antécédent du point U par la translation de vecteur $\overrightarrow{SA}$.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AU}$.

93 **Symétries et coordonnées (1)**

1. Placer le point $S(6;4)$ dans le repère, puis lire les coordonnées des points :

a. T, symétrique de S par rapport à l'axe des ordonnées ;

b. E, symétrique de S par rapport à O ;

c. F, symétrique de S par rapport à l'axe des abscisses.

2. Soit le point $M(x;y)$. À l'aide d'une lecture graphique, donner, en fonction des nombres réels x et y, les coordonnées des points :

a. N, symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées ;

b. P, symétrique de M par rapport à O ;

c. Q, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

3. Soient les points $A(-3;4)$ et $B(8;19)$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Donner les coordonnées des points A' (resp. B') symétrique de A (resp. B) par rapport à l'axe des abscisses.

c. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

94 **Symétries et coordonnées (2)**

Soient les points $A(2;-1)$ et $B(4;3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Vérifier le calcul à l'aide d'une lecture graphique.

2. a. Donner les coordonnées de A_1 (resp. B_1) symétrique de A (resp. B) par rapport à l'axe des abscisses.

b. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$, puis celles de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$.

3. Soient M et N deux points quelconques d'images respectives M_1 et N_1 par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Comment s'expriment les coordonnées de $\overrightarrow{M_1N_1}$ en fonction de celles de $\overrightarrow{MN}$?

SPECIMEN

95 **Rotation et coordonnées**

1. Soient les points $R(5,3)$, $A(-1;2)$, $P(-3;-1)$ et $H(2;-4)$.

a. Placer les points dans le repère.

b. Construire les points R', A', P' et H' images respectives des points R, A, P et H par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.

c. Lire les coordonnées des points R', A', P' et H'.

2. Soit $M(x\,;y)$, où x et y sont deux réels quelconques. Conjecturer les coordonnées de M', image de M par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire, en fonction de celle de M.

3. En admettant la conjecture précédente, déterminer si les triangles COQ sont rectangles en O dans les cas suivants :

a. $C(12;25)$ et $Q(-25;12)$;

b. $C\left(\sqrt{3};-4\right)$ et $Q\left(4;-\sqrt{3}\right)$;

c. $C(1\,257;879)$ et $Q(-879;-1\,257)$;

d. $C\left(\sqrt{2};5\right)$ et $Q\left(-5;\sqrt{2}\right)$.

96 Soient $A(-3;2)$, $B(7;9)$ et $C(-5;4)$.

Calculer les coordonnées $(x\,;y)$ des points suivants.

1. M tel que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

2. N tel que $\overrightarrow{BN}=-5\overrightarrow{BC}$.

3. P tel que $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.

97 On considère les points $A(26;15)$, $B(-18;1)$ et $C(14;-1)$. Calculer les coordonnées des points suivants.

1. M tel que $\overrightarrow{MA}=4\overrightarrow{AB}$.

2. N tel que $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

3. P tel que $\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$.

98 Soient $F(1;3)$, $G(6;5)$ et $H(x\,;y)$ où x et y sont deux réels.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}$.

2. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ en fonction de x et y.

3. Écrire une relation vectorielle que doit vérifier le point G s'il est le milieu du segment $[FH]$.

4. Déterminer les coordonnées du point H afin que G soit le milieu du segment $[FH]$.

99 Soient $A(-7;1)$, $B(5;7)$ et $C(-2;-3)$.

Soit $M(x\,;y)$ un point tel que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

1. a. Placer les points A, B et C dans le repère.

b. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Construire le point M et lire ses coordonnées.

2. Exprimer en fonction de x et y les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

4. Calculer les coordonnées du point M.

100 Soient $R(-3;4)$, $S(5;1)$ et $T(2;5)$. On note N les points définis par :

$$\overrightarrow{RM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RS} \text{ et } \overrightarrow{TN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{TR}$$

1. a. Placer les points R, S et T dans le repère.

b. Construire les points M et N puis lire leurs coordonnées avec la précision permise par le graphique.

c. Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TR}$.

2. Calculer les coordonnées des points M et N.

3. Vérifier que $\overrightarrow{ST}=3\overrightarrow{MN}$ et donner une interprétation géométrique de cette égalité.

101 Soient $A(-2;4)$, $B(5;7)$ et $C(3;1)$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et vérifier les calculs par une lecture graphique.

3. Soit $M(15;1)$. Déterminer le réel α tel que :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AC}$$

4. Soit $N\left(\frac{13}{2};\frac{5}{2}\right)$. Déterminer le réel β tel que :

$$\overrightarrow{AN}=\beta\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

5. Soit $P(14;16)$. Déterminer les entiers relatifs γ et μ tels que $\overrightarrow{AP}=\gamma\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$.

102 Soient $A(0;4)$, $B(-2;0)$ et $C(6;-2)$. Le point $M(x\,;y)$ vérifie : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

1. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de x et y.

2. Calculer les coordonnées de M.

103 Soient $A(4;0)$ et $B(10;7)$. Le point $M(x\,;y)$ vérifie : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MO}=\vec{0}$.

1. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MO}$ en fonction de x et y.

2. Calculer les coordonnées de M.

104 Soient $A(-5;-2)$ et $B(7;3)$. Le point $M(x\,;y)$ vérifie : $5\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MO}=\vec{0}$.

1. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MO}$ en fonction de x et y.

2. Écrire les équations que doivent vérifier les coordonnées de M. Interpréter le résultat obtenu.

105 On considère les trois points $A(3;6)$, $B(3;-2)$ et $C(-3;2)$.

On appelle G le point qui vérifie l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

1. Calculer les coordonnées du point G.

2. Faire une figure, sur laquelle on placera les milieux des côtés du triangle ABC.

3. Tracer les médianes du triangle ABC. Que peut-on conjecturer pour le point G ?

SPECIMEN

2 Calculs dans un repère orthonormé

Pour les exercices 106 à 122, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

106 Vrai ou faux ?

On considère les points $A(-2;-2)$, $B(2;-1)$, $C(3;2)$, $D(-1;1)$ et $E(1;-4)$.

Pour chaque affirmation suivante, dire si elle est vraie ou fausse.

1. $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Le point E est le symétrique du point B par rapport au point C.
3. B est le milieu du segment $[CE]$.
4. $AECD$ est un trapèze.
5. Le milieu de $[AC]$ appartient à l'axe des abscisses.
6. Le triangle ACE est isocèle en C.

107 On considère les points $A(-3;-2)$, $B(-2;3)$ et $C(3;1)$.

1. Calculer les coordonnées du point D, milieu du segment $[AC]$.
2. Énoncer une propriété que vérifient les diagonales d'un parallélogramme.
3. Calculer les coordonnées du point E telles que $ABCE$ soit un parallélogramme.
4. On considère un point G appartenant à l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées de G telles que G, B et C soient alignés.

108 On considère les points :

$A(1;3)$, $B(5;5)$, $C(8;2)$ et $D(4;0)$

Le point E est le symétrique de D par rapport à C et le point F, le symétrique de B par rapport à A.

1. Déterminer les coordonnées des points E et F.
2. Quelle est la nature des quadrilatères $ABCD$, $ABEC$, $ACDF$ et $BEDF$?

Démo

109 1. Soient les points $A(-2;3)$, $B(4;1)$ et $C(1;4)$.

a. Placer les points dans le repère.

b. Calculer les coordonnées des points I, milieu de $[AB]$ et J, milieu de $[BC]$. Vérifier les calculs à l'aide du graphique.

c. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{AC}$. Que constate-t-on ? Conjecturer une propriété générale concernant cette configuration..

2. **Démonstration de la conjecture**

On considère les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.

a. Donner l'expression des coordonnées des points I, milieu de $[AB]$ et J, milieu de $[BC]$.

b. Donner l'expression des coordonnées des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{AC}$. Conclure.

110 Soient les points $P(-1;2)$, $I(5;-2)$ et $E(7;1)$.

1. Déterminer la nature du triangle PIE.
2. En déduire la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle PIE.

Info

Déterminer la nature d'un triangle consiste à préciser si le triangle est isocèle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle ou rien de tout cela.

111 Soient les points $D(3;0)$, $I(-1;4)$ et $X(-3;-4)$.

1. Le triangle DIX est-il rectangle ? Justifier.
2. Soit M le milieu du segment $[IX]$ et $S(x;0)$. On veut que le triangle SIX soit rectangle en S.

a. Justifier que $MS^2 = \frac{1}{4}IX^2$.

b. En déduire les coordonnées possibles du point S.

112 Soient les points $G(0;1)$, $R(-2;-4)$, $I(-6;6)$ et $S(2;6)$.

1. Déterminer la nature du triangle RIS.
2. Justifier que le point G est le milieu du segment $[RS]$.
3. Soit $A(0;y)$ où y est un réel quelconque. On veut que le triangle RAS soit rectangle en A.

a. Justifier que $GA^2 = 29$.

b. En déduire les valeurs possibles de l'ordonnée de A.

113 PYTHON 1. Compléter le programme suivant écrit en Python afin que la fonction distCarre renvoie les carrés des longueurs des côtés d'un triangle de sommets $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.

```
1def distCarre(xa,ya,xb,yb,xc,yc):
2    AB2 = (xb - xa)**2 + (yb - ya)**2
3    BC2 = (xc - xb)**2 + ...
4    CA2 = ...
5    return AB2, BC2, CA2
```

2. Utiliser cette fonction pour déterminer la nature des triangles définis par les points suivants.

a. $O(0;0)$, $U(10;4)$ et $I(1;12)$.

b. $S(-3;-2)$, $A(-4;4)$ et $M(8;6)$.

c. $E(1;7)$, $S(13;2)$ et $T(-4;-5)$.

d. $Z(-3;-1)$, $E(6;1)$ et $N(-1;5)$.

114 Aire d'un triangle…

On donne les points $A(-4;2)$, $B(7;4)$ et $C(-3;-1)$.

1. a. Placer ces points dans le repère.

b. Conjecturer la nature du triangle ABC.

c. Démontrer la conjecture.

2. a. Calculer les coordonnées de D, milieu de $[AC]$.

b. En déduire l'aire du triangle ABC.

3. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ADB.

SPECIMEN

115 LOGIQUE

On considère les points $A(2;2)$, $B(5;-2)$, $C(8;-1)$ et $D(8;4)$. Léa a écrit :

$AC^2=(8-2)^2+(-1-2)^2=45$

$BD^2=(8-5)^2+(4-(-2))^2=45$

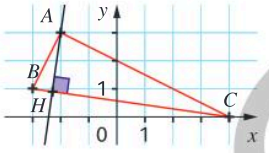
Donc les diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur.

Le quadrilatère ABCD est donc un rectangle.

1. En quoi ce raisonnement comporte-t-il une erreur ?
2. Peut-on affirmer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle ?

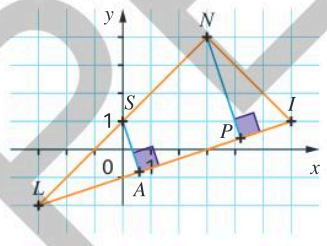
116 LOGIQUE On considère les points $A(4;-5)$, $B(7;1)$, $C(1;4)$ et $D(-2;-2)$.
1. Démontrer que $ABCD$ est un carré.
2. Calculer l'aire du carré $ABCD$.

117 On considère les points $A(-2;3)$, $B(-3;1)$ et $C(4;0)$, et on note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du point A.



1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. En déduire l'aire du triangle ABC, puis la hauteur AH issue du point A.

118 **1.** Lire les coordonnées (ce sont des entiers relatifs) des points L, I, N et S.



2. Donner la nature du triangle LIN.
3. Vérifier que l'aire du triangle LIN vaut 18 unités d'aire. En déduire la valeur exacte de la longueur NP.
4. Vérifier que S est le milieu du segment $[LN]$, en déduire que $SA=\frac{1}{2}NP$.
5. Calculer la distance SL. En déduire que les triangles LAS et PIN sont isométriques.
6. En déduire que $PI=SA=\frac{1}{2}NP$ et que $LA=NP$.
7. Exprimer AP en fonction de NP et LI, puis donner la valeur exacte de la longueur AP.

119 On considère les quatre points $A(3;1)$, $B(2;4)$, $C(8;6)$ et $D(9;3)$.
1. Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$.
2. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
3. Que peut-on affirmer concernant le quadrilatère $ABCD$?
4. On appelle I le point d'intersection des diagonales de $ABCD$ et J le milieu du côté $[AD]$.
Quel est le rapport entre l'aire du triangle AIJ et l'aire du quadrilatère $ABCD$?
5. On appelle F le symétrique de C par rapport à D. Quelle est la nature du triangle AFC ?
6. Le point G est le projeté orthogonal de C sur (AF). Déterminer la distance CG.

120 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(2;3)$ et de rayon 5.
On s'intéresse aux points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
1. a. Soit un point $M(x;0)$ sur l'axe des abscisses. Justifier que M appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si :
$$(x-2)^2=16$$
b. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
2. a. Soit un point $N(0;y)$ sur l'axe des ordonnées. Justifier que N appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si :
$$(y-3)^2=21$$
b. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

121 Soient les points $L(-4;0)$, $E(4;0)$ et $A(2;5)$.
1. Le point $M(x;y)$ est tel que $LM=EM$.
a. Justifier que x est solution de l'équation :
$$(x+4)^2-(x-4)^2=0$$
b. Résoudre cette équation et interpréter le résultat obtenu.
2. Le point $N(x;y)$ est tel que $LN=AN$.
a. Justifier que x est solution de l'équation :
$$(y-5)^2-y^2=(x+4)^2-(x-2)^2$$
b. Exprimer y en fonction de x.
3. Le point $P(x;y)$ est tel que $LP=EP=AP$.
a. À l'aide des réponses précédentes, déterminer les coordonnées du point P.
b. Que représente le point P pour le triangle LEA ?

122 Soient les points $A(0;5)$, $N(0;-1)$ et $E(7;0)$.
1. $M(x;y)$ est un point tel que $MA=MN$; déterminer son ordonnée.
2. $P(x;y)$ est un point tel que $NP=EP$; exprimer y en fonction de x.
3. Déterminer les coordonnées du point Q, centre du cercle circonscrit du triangle ANE.
4. En déduire la valeur exacte du rayon du cercle circonscrit du triangle ANE.

SPÉCIMEN

3 Colinéarité et déterminant

Pour les exercices 123 à 142, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Pour les exercices 123 et 124, déterminer le réel t tel que les vecteurs soient colinéaires.

123 **1.** $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-9\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix}$ **2.** $\overrightarrow{LO}\begin{pmatrix}3-t\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{UP}\begin{pmatrix}10\\16\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}t-5\\t+3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix}3\\1+\sqrt{5}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}1-\sqrt{5}\\t\end{pmatrix}$

124 **1.** $\overrightarrow{VE}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}64\\5\\t\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EU}\begin{pmatrix}t\\4\\\frac{}{5}\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{RO}\begin{pmatrix}t-\frac{1}{3}\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}t+\frac{4}{5}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix}t+\sqrt{3}\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IS}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{t-\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

Pour les exercices 125 et 126, déterminer le réel t tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

125 **1.** $A(-3;2)$; $B(4;4)$; $C(-1;-3)$; $D(13;t)$

2. $A(2;5)$; $B(10;1)$; $C(-2;5)$; $D(t;-3)$

3. $A(2;4)$; $B(12;t)$; $C(-2;3)$; $D(18;t)$

126 **1.** $A(-1;4)$; $B(-3;1)$; $C(-2;1)$; $D(6;t)$

2. $A(4;-1)$; $B(-3;1)$; $C(-2;t)$; $D(3;3)$

3. $A(-5;-5)$; $B(3;2)$; $C(-4;3)$; $D(t;5)$

Pour les exercices 127 et 128, déterminer le réel t tel que les points M, N et P soient alignés.

127 **1.** $M(-3;2)$; $N(6;-1)$; $P(t;3)$

2. $M(-3;-1)$; $N(t;5)$; $P(7;4)$

3. $M(-1;3)$; $N(6;5)$; $P(10;t)$

128 **1.** $M(-6;-3)$; $N(-3;-2)$; $P(2;t)$

2. $M(3;-4)$; $N(-3;7)$; $P(t;-12)$

3. $M(8;-2)$; $N(-1;3)$; $P\left(t;\frac{2}{3}\right)$

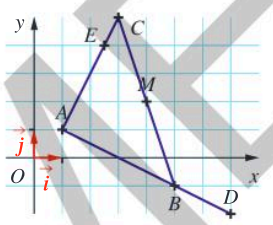
129 Soient les points $A(10;7)$ et $B(-3;-2)$. On rappelle que le point O est l'origine du repère.

1. Les points B, O et A sont-ils alignés ?

2. Soit le point $L(10;y)$. Déterminer la valeur de y pour que les points B, O et L soient alignés.

130 Soient $A(1;1)$, $B(5;-1)$ et $C(3;5)$.

- M est le milieu de $[BC]$.
- $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



1. Calculer les coordonnées des points M, D et E.

2. Démontrer que les points E, M et D sont alignés.

131 Soient les points $C(-1;-4)$, $H(5;-1)$, $A(5;3)$ et L le milieu du segment $[CA]$.

1. Placer les points C, H, A et L dans le repère, et compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2. Calculer les coordonnées de L.

3. Calculer les coordonnées des points E et V définis par : $\overrightarrow{CE}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$.

4. Les points L, V et E sont-ils alignés ? Justifier.

132 Soient $A(-3;-2)$, $B(7;3)$ et $C(-2;1)$.
On considère les points M, N et P définis par :
$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

1. Déterminer les coordonnées des points M, N et P.

2. Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

133 PRISE D'INITIATIVES **Points alignés**
On considère les points $A(-27;18)$, $B(-11;9)$, $C(8;-2)$ et $D(15;-6)$.
Parmi les points A, B, C et D lesquels sont alignés ?

Pour les exercices 134 à 136, on admet que l'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|$. Utiliser cette formule pour calculer l'aire des triangles.

134 $A(-3;2)$, $B(1;-1)$ et $C(-3;5)$.

135 $A(0;-1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$.

136 $A(-3;1)$, $B(-2;4)$ et $C(1;-2)$.

SPECIMEN

137 PYTHON **1.** Compléter le programme Python ci-dessous afin que :

• la fonction `det` renvoie $\det(\vec{u};\vec{v})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}xu\\yu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}xv\\yv\end{pmatrix}$;

• la fonction `aireT` renvoie l'aire du triangle ABC avec $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$.

`xAB` est l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$, les autres noms de variable suivent la même logique.

```
def det(xu,yu,xv,yv):
    return ...

def aireT(xa,ya,xb,yb,xc,yc):
    xAB = xb - xa
    yAB = ...
    xAC = ...
    yAC = ...
    aire = abs(det(xAB, yAB, xAC, yAC)) / 2
    return ...
```

2. Répondre aux questions des exercices **134** à **136** à l'aide de la fonction `aireT` de ce programme (par exemple, pour l'exercice **134** il faut demander `aireT(-3,2,1,-1,-3,5)`).

138 Vrai ou faux ? LOGIQUE Compétence Raisonner

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

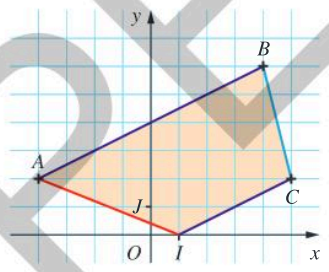
1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\det(\vec{u},\vec{v})=\det(\vec{v},\vec{u})$.

2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\det(2\vec{u},\vec{v})=2\det(\vec{u},\vec{v})$.

3. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k :
$$\det(\vec{u},k\vec{v})=k\det(\vec{u},\vec{v})$$

4. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
$$\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{w})=\det(\vec{u},\vec{w})+\det(\vec{v},\vec{w})$$

139 On considère la figure suivante où les points sont à coordonnées entières.



1. a. Quelle semble être la position relative des droites (AB) et (IC) ?

b. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IC}$.

c. En déduire la position relative des droites (AB) et (IC).

2. En s'aidant du quadrillage et de triangles rectangles bien choisis, calculer l'aire du quadrilatère $ABCI$.

3. a. Soit $\mathcal{A}_1=\left|\det(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AB})\right|$ et $\mathcal{A}_2=\left|\det(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CB})\right|$.

Calculer $\mathcal{A}=\frac{1}{2}(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)$.

b. Comparer $\mathcal{A}$ et l'aire calculée à la question **2.**

140 Soient les points $S(1;-3)$, $T(5;-3)$ et $F(5;1)$.

1. Calculer les coordonnées du point E telles que $STEF$ soit un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SF}$.

3. Calculer les valeurs exactes des distances ST, TF et SF. En déduire la nature du triangle STF.

4. Calculer l'aire du parallélogramme $STEF$ après avoir justifié que TF est sa hauteur.

5. On peut montrer que l'aire du parallélogramme $STEF$ est la valeur absolue du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SE}$. Vérifier que ce calcul donne l'aire du parallélogramme.

141 Soit un triangle quelconque CUB défini par $C(-1;0)$, $U(1;0)$ et $B(x;y)$, avec x et y réels.

1. Vérifier que O est le milieu du segment $[CU]$.

2. Déterminer les coordonnées de R, milieu du segment $[BU]$ et de E, milieu du segment $[BC]$ en fonction de x et y.

3. Déterminer, en fonction de x et y, les coordonnées du point S défini par $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

4. Justifier que :
$$\det(\overrightarrow{CR};\overrightarrow{CS})=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)\times\frac{y}{3}-\frac{y}{2}\left(\frac{x}{3}+1\right)$$

5. Calculer $\det(\overrightarrow{CR};\overrightarrow{CS})$ et interpréter le résultat.

6. Démontrer que les points U, S et E sont alignés.

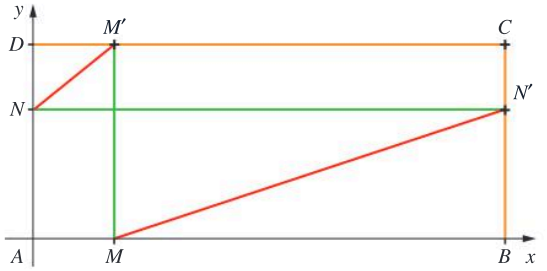
7. Préciser ce que représentent les droites (CR), (UE) et (BO) pour le triangle CUB, puis énoncer le théorème démontré dans cet exercice.

142 PRISE D'INITIATIVES Compétence Modéliser

Dans le repère orthonormé d'origine A ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle tel que $AB=10$ et $AD=4$.

Pour tout point M du segment $[AB]$, on note M' le point d'intersection du segment $[CD]$ et de la parallèle à (AD) passant par M.

Pour tout point N du segment $[AD]$, on note N' le point d'intersection du segment $[BC]$ et de la parallèle à (AB) passant par N.



On note x l'abscisse de M et y l'ordonnée de N.

À quelle condition, sur les nombres x et y, les droites (MN') et $(M'N)$ sont-elles parallèles ?

SPÉCIMEN

BILAN

143 30min Vrai ou faux ?

Soient les points $A(-4;-1)$, $B(-1;-3)$, $C(4;2)$, $D(1;4)$, $E(-5;2)$ et $F(7;6)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Les coordonnées du point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

3. Le triangle ADE est rectangle en E.

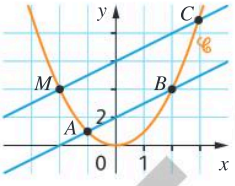
4. Les points A, D, F sont alignés.

5. Le point G tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées :

$$G\left(\frac{2}{3};2\right)$$

144 25min Points sur une courbe

Dans le repère orthogonal représenté ci-dessous, soit $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction carré et les points A, B et C de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives –1, 2 et 3.



1. Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ?

2. On cherche un point M de la courbe $\mathscr{C}$, distinct de C, tel que les droites (AB) et (MC) soient parallèles.

a. Soit x l'abscisse de M. Quelle est son ordonnée ?

b. En déduire que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MC}$ sont $(3-x;9-x^2)$.

c. Montrer que $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MC}\right)=3(3-x)(2+x)$.

d. En déduire les coordonnées de M telles que les droites (AB) et (MC) soient parallèles.

145 30min Cercle circonscrit à un triangle

On considère les points $A(-2;-1)$, $B(6;-3)$ et $C(1;2)$ dans un repère orthonormé.

1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

2. a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. En déduire les coordonnées de D, le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

3. On souhaite chercher tous les points d'abscisse 6 appartenant à $\mathscr{C}$.

On note $E(6;y_E)$ un tel point, où y_E est un réel.

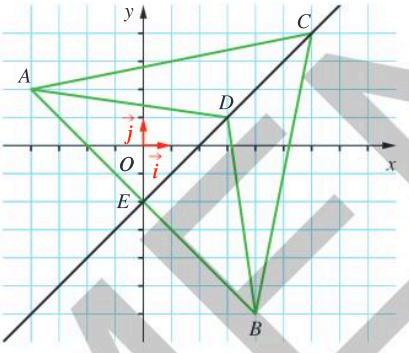
a. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{DE}$ puis de DE^2.

b. Montrer que y_E doit vérifier $(y_E+2)^2=1$.

c. Déterminer les deux valeurs possibles de y_E.

146 30min Calcul d'une aire

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, soient les points $A(-4;2)$, $B(4;-6)$, $C(6;4)$, $D(3;1)$ et $E(0;-2)$.



1. Montrer que le point D appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. En déduire que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

4. Le point D est-il le milieu du segment $[CE]$?

5. Calculer l'aire du triangle ABC.

147 30min Deux méthodes

Soient ABC un triangle et D et E les points définis par $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}$.

Partie A. Sans repère

1. Montrer que $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. a. Justifier que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

b. En déduire la position relative des droites (DE) et (BC).

Partie B. Avec coordonnées

On donne les coordonnées des points A, B et C :

$$A(-3;2),\ B(-2;-1) \text{ et } C(3;2)$$

1. Montrer que E a pour coordonnées $\left(-\frac{10}{3};3\right)$.

2. Déterminer les coordonnées de D.

3. Les droites (DE) et (BC) sont-elles sécantes ?

148 20min Encore le centre de gravité

Soit ABC un triangle. On nomme A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Démontrer que, quel que soit le point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC'}$.

2. On appelle G le point du plan défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GC'}$ et que $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

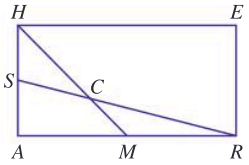
b. Que peut-on en déduire pour les points C, G et C' ?

3. De même, que peut-on démontrer pour A, G et A' d'une part, pour B, G et B' d'autre part ? Que représente le point G pour le triangle ABC ?

SPECIMEN

149 25min **Création d'un repère**

On considère le rectangle $HERA$ ainsi que M et S les milieux respectifs des segments $[AR]$ et $[AH]$. On note C, le point d'intersection de (HM) et de (SR).



On munit le plan du repère orthogonal $\left(A;\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AH}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points A, M, R, S et H dans ce repère.

2. On note $(x;y)$ les coordonnées du point C.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HM}$ et exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ en fonction de x et de y.

b. En utilisant l'égalité $\det\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HM}\right)=0$, montrer que :

$$y=-2x+1$$

c. À l'aide des vecteurs $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SR}$, obtenir une autre relation entre x et y.

d. Déterminer les coordonnées du point C.

3. Les points A, C et E sont-ils alignés ?

150 5min **Parallèles ou pas ?**

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2;0)$, $B(0;5)$, $C(80;20)$ et $D(0;222)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

151 25min **Méthode libre**

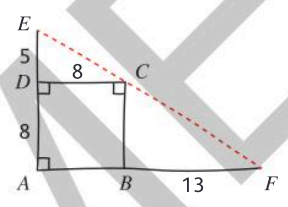
On considère le parallélogramme $ABCD$ et les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$$

Les points A, F et C sont-ils alignés ?

152 15min **Problème ouvert**

La figure ci-dessous est dessinée à main levée.



Les points A, D, E et A, B, F sont alignés. De plus, le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

Les points E, C et F sont-ils alignés ?

APPROFONDISSEMENT

Pour les exercices **153** et **154**, on utilise la notion de barycentre dont on donne la définition ci-dessous.

Soient deux points A et B, et deux nombres réels a et b tels que $a+b\neq 0$.

On appelle **barycentre de A et B affectés des coefficients a et b** le point G tel que : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

On note : $G=\text{bar}\{(A;a),(B;b)\}$.

153 Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points $A(1;2)$, $B(5;1)$ et $C(2;6)$. On définit :

- $M=\text{bar}\{(B;2),(C;1)\}$
- $N=\text{bar}\{(C;1),(A;4)\}$
- $P=\text{bar}\{(A;4),(B;2)\}$

1.a. À partir de la définition du barycentre, montrer que : $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

b. En déduire que M a pour coordonnées $\left(4;\frac{8}{3}\right)$.

c. Déterminer les coordonnées de N et de P de même.

2. On définit le point $G=\text{bar}\{(A;4),(B;2),(C;1)\}$, grâce à l'égalité : $4\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Calculer les coordonnées de G.

3. Montrer que les points A, M et G sont alignes.

4. Montrer que G appartient à la droite (BN).

5. Montrer que (AM), (BN) et (CP) sont concourantes et donner les coordonnées du point de concours.

154 On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Une commune souhaite installer une sculpture dans un parc triangulaire délimité par trois entrées :

Entrée A située au point $A(1;1)$;

Entrée B située au point $B(3;2)$;

Entrée C située au point $C(4;6)$.

Pour équilibrer les flux de visiteurs :

Le point M est choisi sur le segment $[BC]$ de façon à recevoir **deux fois plus de visiteurs venant de B que de C**. Ainsi, on choisit $M=\text{bar}\{(B;2),(C;1)\}$.

Le point N est choisi sur $[CA]$ de façon à recevoir **quatre fois plus de visiteurs venant de A que de C**. On a : $N=\text{bar}\{(A;4),(C;1)\}$.

Le point P est choisi sur $[AB]$ de façon à recevoir **deux fois plus de visiteurs venant de A que de B**. On a donc $P=\text{bar}\{(A;2),(B;1)\}$.

1. Calculer les coordonnées des points M, N et P.

2. La municipalité souhaite placer une sculpture au point $G=\text{bar}\{(A;4),(B;2),(C;1)\}$.

Calculer les coordonnées de G.

3. Montrer que les trois chemins reliant respectivement l'entrée A au point M, l'entrée B à N, et l'entrée C à P se croisent en G.

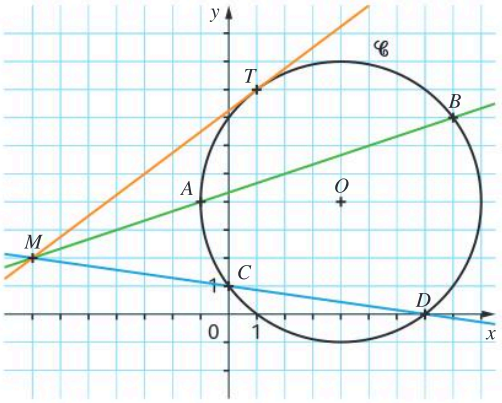
4. À quelle distance (en unité dans le repère) de l'entrée A se trouve la sculpture ?

SPECIMEN

155 Compétence Calculer

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans un repère orthonormé, on considère les points $O(4;4)$, $A(-1;4)$, $B(8;7)$, $C(0;1)$, $D(7;0)$, $T(1;8)$ et $M(-7;2)$.



1. Justifier que les points A, B, C, D et T appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

2. Les points M, A et B sont-ils alignés ?

3. Les points M, C et D sont-ils alignés ?

4. Comparer les produits :

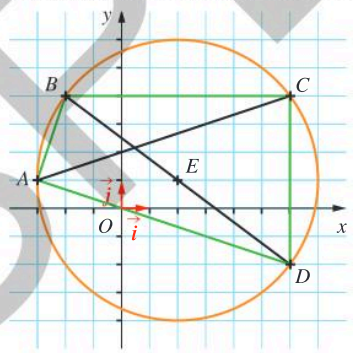
$MA \times MB$ et $MC \times MD$ et MT^2

Rappel

La valeur commune des produits trouvée en 4. est indépendante de la direction de la droite sécante au cercle. Elle ne dépend que du point M. Cette valeur est appelée la **puissance du point M par rapport à ce cercle**.

156 PYTHON **Théorème de Ptolémée**

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et on place les points A, B, C, D et E à coordonnées entières pour former le quadrilatère $ABCD$ ci-dessous.



1. a. Sans calculer, déterminer graphiquement les longueurs BC et DC.

b. Calculer les longueurs AB et BD.

c. On admet que $AD = 3\sqrt{10}$ et $AC = 3\sqrt{10}$.

Vérifier que $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

2. Pour déterminer si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle, on peut utiliser le théorème de Ptolémée :

> Un quadrilatère (convexe) est inscriptible dans un cercle si, et seulement si, le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

À l'aide de Python, on souhaite savoir si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle.

a. Compléter la fonction écrite en Python qui renvoie la distance entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

```
from math import sqrt

def dist(xA, yA, xB, yB):
    return sqrt(...)
```

Info

sqrt ( ) est la fonction racine carrée en Python.

b. On complète le programme par la fonction suivante.

```
def inscrit(x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4):
    prodDiag=dist(x1,y1,x3,y3)*dist(x2,y2,x4,y4)
    prodCote1=dist(x1,y1,x2,y2)*dist(x3,y3,x4,y4)
    prodCote2=dist(x2,y2,x3,y3)*dist(x1,y1,x4,y4)
    if prodCote1+prodCote2==prodDiag:
        print("Quadrilatère inscriptible")
    else:
        print("Quadrilatère non inscriptible")
```

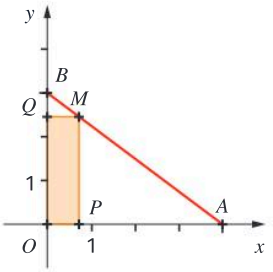
Quel sera l'effet de l'appel à la fonction suivante ?

```
inscrit(-3,1,-2,4,6,4,6,-2)
```

157 PRISE D'INITIATIVES

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère les points $A(4;0)$ et $B(0;3)$.

Pour tout point M du segment $[AB]$, on note P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



1. Déterminer les coordonnées du point M pour que le rectangle $OPMQ$ soit un carré.

2. On appelle I le centre du rectangle $OPMQ$. Exprimer les coordonnées de I en fonction de celles de M et préciser comment se déplace I quand M varie sur le segment $[AB]$.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

158 Compréhension d'énoncé

On considère l'énoncé d'exercice suivant.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-4;5)$, $B(2;3)$, $C(4;-3)$ et $D(-2;-1)$.

I. a. Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$.

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

II. a. Calculer les valeurs exactes de AB et BC.

b. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Répondre aux questions suivantes.

1. On a surligné certains verbes d'action dans cet énoncé.

a. Que signifient-ils ?

b. Quelle démarche peut-on mettre en œuvre pour répondre à chaque question de l'énoncé ?

2. Résoudre l'exercice proposé.

159 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(4;2)$ et de rayon 5.

1. Justifier que les points $A(7;-2)$ et $B(0;-1)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.

2. Calculer les coordonnées du point A', symétrique de A par rapport à I.

3. Donner la nature du triangle ABA'.

160 Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(5;2) \text{ et } B(3;6)$$

Déterminer les coordonnées du point M dans chacun des cas suivants.

1. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ **2.** $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3. $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ **4.** $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

161 Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(-3;6),\ B(7;1),\ C(3;0) \text{ et } D(-1;2)$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b. Calculer le déterminant $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

c. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

2. Soient le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$ et F le point de coordonnées $(-27;18)$.

a. Déterminer par calcul les coordonnées du point E.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{EF}$$

c. Calculer le déterminant $\det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}\right)$.

d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

Aller plus loin

162 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(1;2)$ et de rayon 5.

1. Réaliser une figure et lire, avec la précision permise par le graphique, les coordonnées :

a. des points P et A, intersections du cercle avec l'axe des ordonnées ;

b. des points U et L, intersections du cercle avec l'axe des abscisses.

2. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées de ces points à l'aide d'un calcul.

Aides

- Si un point est sur un des axes du repère, une de ses coordonnées est nulle.
- Revoir la méthode de résolution d'une équation de la forme $x^2 = a$.

163 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit les points $S(-3;1)$, $A(-2,2)$, $I(1;1)$ et $N(2-1)$.

1. Démontrer que les droites (SA) et (IN) sont sécantes.

2. Soit $P(x;y)$ le point d'intersection des droites (SA) et (IN).

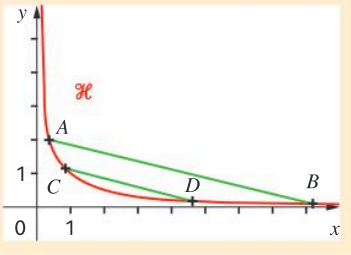
a. En utilisant le fait que le point P appartient à la droite (SA), justifier que ses coordonnées vérifient l'équation : $y - x = 4$.

b. Justifier que les coordonnées de P doivent aussi vérifier l'équation : $y + 2x = 3$.

c. Déterminer les coordonnées exactes du point P.

164 PRISE D'INITIATIVES

Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et quatre points distincts A, B, C et D sur $\mathscr{H}$, d'abscisses respectives a, b, c et d strictement positives.



À quelle condition sur les réels a, b, c et d, les cordes $[AB]$ et $[CD]$ sont-elles parallèles ?

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2056

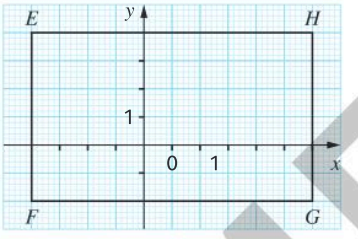
SPECIMEN

Diagramme de Voronoï

Objectif PYTHON
Manipuler des fonctions, des boucles *Tant que* et l'instruction *Si*.

Lorsqu'un conducteur tombe en panne, quel dépanneur est le plus proche ?
Lorsqu'on souhaite ouvrir un nouveau restaurant de façon à être implanté le plus loin possible de ses concurrents, quel endroit doit-on choisir ?
Ces deux problèmes font appel à un régionnement du plan en zones, appelé diagramme de Voronoï.

Un **diagramme de Voronoï** est un découpage du plan en parties, appelées *cellules*, à partir d'un ensemble de points appelés *germes*.
Chaque cellule est associée à un germe. Elle est formée de l'ensemble des points du plan **plus proches de ce germe que des autres germes.**
L'objectif de ce TP est de découper en diagramme de Voronoï l'intérieur du rectangle $EFGH$ tracé dans le repère orthonormé ci-contre.



Info
Les diagrammes de Voronoï sont présents dans la nature.
L'exemple le plus connu est celui du pelage d'une girafe.



Partie A Mise en place du graphique et étude de deux germes

On choisit les germes $A(-3;1)$ et $B(0;3)$.

1. Mettre en place la fenêtre graphique à l'aide des instructions suivantes.

```
from pylab import*
axis([-4,6,-2,4])
```

2. On choisit de créer un point $M(x;y)$ qui balaye l'intérieur du rectangle $EFGH$ de haut en bas et de gauche à droite, par pas de 0,1 et de l'afficher en rouge s'il est plus proche de A, ou en vert s'il est plus proche de B.

a. On considère la fonction carre_A suivante.

Langage naturel

```
Fonction carre_A(x,y)
    Retourner (x+3)^2+(y-1)^2
Fin Fonction
```

Que permet de faire cette fonction ? La programmer en Python.

b. Créer une fonction carre_B qui prend en argument les coordonnées de M et qui renvoie la valeur de BM^2.

c. On propose la fonction parcours suivante, traduite en langage Python.

```
def parcours():
    x = -4
    while x <= 6:
        y = 4
        while y >= -2:
            if carre_A(x,y) < carre_B(x, y):
                plot(x, y, '.', color='red')
            else:
                plot(x, y, '.', color='green')
            y = y - 0.1
        x = x + 0.1
```

Expliquer le fonctionnement de cette fonction.

3. Programmer, exécuter la fonction parcours et afficher la fenêtre graphique.

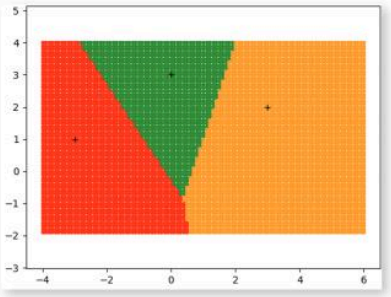
```
parcours()
plot(-3,1,'+',color='black')
plot(0,3,'+',color='black')
axis('equal')
show()
```

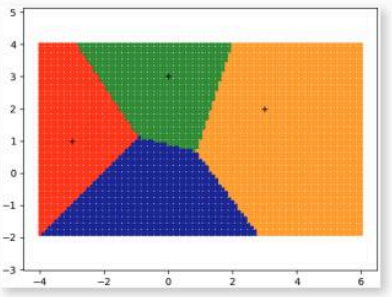
4. Expliquer le diagramme de Voronoï obtenu à l'aide d'arguments géométriques.

Partie B Avec davantage de germes

1. En s'aidant de la démarche précédente, obtenir les diagrammes de Voronoï ci-contre lorsque :
a. on considère les trois germes $A(-3;1)$, $B(0;3)$ et $C(3;2)$;
b. on considère les quatre germes $A(-3;1)$, $B(0;3)$, $C(3;2)$ et $D(-1;-1)$.

2. Expliquer la construction géométrique de ces diagrammes.





SPÉCIMEN

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

Approche géométrique de la parabole

Objectif
Déterminer un ensemble de points.

On considère une droite d donnée et un point A qui n'appartient pas à cette droite. On cherche à déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la distance AM soit égale à la distance du point M à la droite d, autrement dit : le point M est équidistant du point A et de la droite d.

Partie A Comprendre le problème

1. Déterminer l'ensemble des points M situés à 4 cm du point A.

2. La distance d'un point M à une droite d est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur d. Déterminer l'ensemble des points M situés à 4 cm de la droite d.

3. a. Expliquer pourquoi les deux figures ci-contre représentent des constructions permettant de chercher des points M équidistants du point A et de la droite d.

b. Pour chacune de ces deux figures, donner le nombre de points M solution du problème.

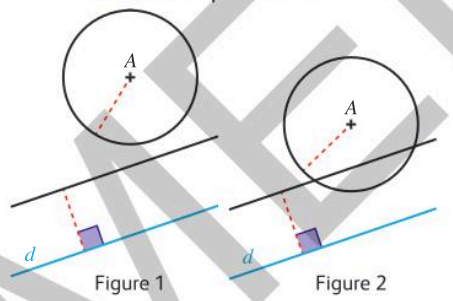


Figure 1 Figure 2

Partie B La parabole avec un logiciel de géométrie dynamique

1. Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et créer une droite d et un point A qui n'appartient pas à d.

2. Créer l'objet *parabole* en choisissant de la définir grâce au point A et à la droite d.

3. Choisir un point M appartenant à la parabole tracée. Afficher la distance AM et la distance de M à la droite d. Faire varier M sur la courbe tracée. Que semble-t-on pouvoir constater ?

Partie C Solution géométrique

Sur une feuille, tracer une droite d et un point A qui n'appartient pas à d.

1. Construire un cercle de centre A et de rayon 1 cm et tracer les parallèles à la droite d distantes de 1 cm. S'il existe des points M équidistants du point A et de la droite d : placer ces points.

2. Changer de couleur de crayon (pour mieux se repérer) et reprendre la question précédente avec un cercle de rayon 2 cm et des parallèles à la droite d distantes de 2 cm.

3. Réitérer le procédé une dizaine de fois, puis relier souplement les points M entre eux : la courbe obtenue est l'ensemble des points équidistants du point A et de la droite d !

Partie D Solution algébrique

On construit le repère orthonormé : la droite d est l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées est la perpendiculaire à d passant par A. L'intersection des axes est le point O et on choisit comme unité la distance OA, donc le point A a pour coordonnées $(0\,;1)$.

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

1. Donner l'expression du carré de la distance AM en fonction de x et y.

2. Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Donner les coordonnées de H, puis l'expression du carré de la distance MH en fonction de x et de y.

3. Les distances étant positives, on a donc $MH = AM \Leftrightarrow MH^2 = AM^2$. En déduire l'expression de y en fonction de x.

4. Dans un logiciel de géométrie :

a. placer le point A et tracer la fonction obtenue à la question précédente ;

b. vérifier que tout point M de la courbe est équidistant de l'axe des abscisses et du point A.

SPÉCIMEN

CHAPITRE

7 Droites du plan

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Déterminer une équation de droite
- CAPACITÉ 2 À partir d'une équation, déterminer un vecteur directeur, un coefficient directeur, tracer une droite



Au fil du temps

Ce chapitre traite de la géométrie plane repérée, c'est-à-dire pour laquelle on choisit un repère. Cette approche de la géométrie est aussi appelée cartésienne, du nom de René Descartes qui en a posé les bases en 1637 dans la partie « Géométrie » de son célèbre *Discours de la méthode*. Grâce aux méthodes cartésiennes, on peut résoudre des problèmes de géométrie avec une approche calculatoire. D'après Joseph Louis Lagrange : « Tant que l'algèbre et la géométrie ont été séparées, leurs progrès furent lents et leurs usages bornés ; mais lorsque ces deux sciences furent réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. » (1795).

CORRIGÉ

Des maths partout !

La « ligne droite » est une configuration privilégiée dans de nombreux ouvrages en tant que plus court chemin entre deux points. Ici, une longue ligne droite sur le « canal du Midi », qui relie Toulouse à la mer Méditerranée depuis le XVII[e] siècle.



Canal du Midi, près de Carcassonne.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2057

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Images et antécédents par une fonction affine

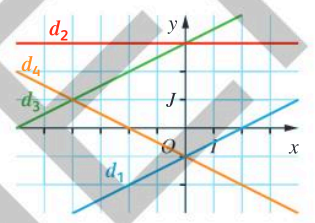
Soit f la fonction affine définie par $f(x)=-2x+1$.

1. Calculer les images par f des nombres -10 ; 0 et $\frac{1}{7}$.

2. Calculer les antécédents par f des nombres -1 ; 7 et $\frac{2}{9}$.

C Représentation graphique d'une fonction affine

Dans le repère ci-contre, quatre droites sont tracées, notées respectivement d_1 ; d_2 ; d_3 et d_4. On considère également quatre fonctions affines f_1 ; f_2 ; f_3 et f_4 définies respectivement par :

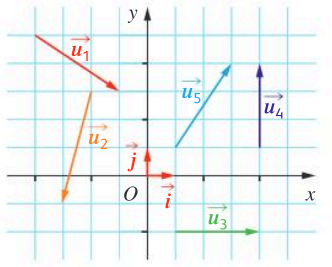


$f_1(x)=\frac{1}{2}x+3$ • $f_2(x)=-\frac{1}{2}x-1$ • $f_3(x)=\frac{1}{2}x-1$ • $f_4(x)=3$

Associer chaque fonction à la droite qui la représente graphiquement. Justifier.

D Coordonnées de vecteurs

Lire les coordonnées dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ de tous les vecteurs représentés ci-contre.



E Vecteurs colinéaires

Dans chacun des cas suivants, préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Justifier.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

4. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}$

F Alignement de trois points

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points $A(1;3)$; $B(-4;1)$; $C(4;-3)$ et $D(-4;-17)$.

1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils colinéaires ?

b. Que peut-on dire des points A, M et D ?

COPIE

automatismes

Automatismes transversaux

Pour les exercices 1 à 3, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations.

1 **1.** $-5x+7=3x-1$ **2.** $\frac{1}{3}x-\frac{3}{5}=\frac{5}{6}x+1$

2 **1.** $-4x=0$ **2.** $(-x+2)(8x+1)=0$

3 **1.** $-4x^2+3x=0$ **2.** $3x^2+4=x^2+7$

4 Dans un repère, pour deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ tels que $x_A\neq x_B$, on définit le nombre $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Calculer m dans chaque cas.

1. $A(-5;2)$ et $B(3;-1)$ **2.** $A\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

5 Recopier et compléter les égalités suivantes.

1. $(\ldots+3)^2=x^2+\ldots+\ldots$ **2.** $(2x-\ldots)^2=\ldots-\ldots+9$

3. $4x^2-\ldots=(\ldots+3)(\ldots-3)$

4. $\left(\ldots-\sqrt{2}\right)\left(\ldots+\sqrt{2}\right)=x^2-\ldots$

6 Développer les expressions suivantes.

1. $A(x)=(x+2)(-2x+5)+(-x+1)(x+2)$

2. $B(x)=(2x-3)(2x+3)-(x+1)(3x-4)$

3. $C(x)=(3x-2)^2-16$

7 Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x)=3x^2+2x$

2. $B(x)=(x+1)(2x+3)-(x+1)(2x-5)$

3. $C(x)=(2x-3)^2-5$

8 Montrer que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ est un multiple de 8.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $3x-5>7$ **2.** $4-5x\leqslant -6$

3. $-x+5>-7$ **4.** $2(x-4)<5x+3$

10 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

2. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$.

11 **1.** Dans un repère orthonormé, placer les points $A(-3;-3)$, $B(-2;1)$, $C(2;2)$ et $D(1;-2)$.

2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

3. $ABCD$ est-il un losange ? un carré ?

12 Montrer que, pour tout réel $x\neq 1$, on a :

$$\frac{2x-5}{x-1}=2-\frac{3}{x-1}$$

13 Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$x^2+2\geqslant 4x-2$$

Automatismes préparatoires au chapitre

14 Dans un repère, placer les points $A(1;2)$, $B(-2;3)$, $C(-5;-2)$, $D(0;-1)$ et $E(3;0)$.

15 On se place dans un repère orthonormé. Dans chaque cas, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de I, milieu du segment $[AB]$, et la longueur AB.

1. $A(-2;3)$ et $B(1;-4)$ **2.** $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{6};\frac{3}{4}\right)$

16 Dans chaque cas, exprimer y en fonction de x sous la forme $y=mx+p$, où m et p sont des réels que l'on précisera.

1. $2x+y-3=0$ **2.** $-x-y+1=0$

3. $x+2y+5=0$ **4.** $-6x-3y+5=0$

17 Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x-5 \text{ et } g(x)=-2x+3$$

18 On note $\mathscr{D}$ la droite représentant la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x+2$.

1. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à la droite $\mathscr{D}$?

$$A(2;-4),\ B(-1;-1),\ C\left(\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{3};1\right)$$

2. Déterminer les valeurs de a et b telles que les points $M(-3;a)$ et $N(b;6)$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

19 Soit f la fonction définie par $f(x)=-7x+p$, où p est un réel. Déterminer la valeur de p telle que le point $A(-2;3)$ appartienne à la droite $\mathscr{D}$ représentant la fonction f.

20 Déterminer le réel a tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

21 On considère les points $A(-1;5)$, $B(2;-1)$, $C(1;1)$, $D(4;-3)$ et $E(-2;9)$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2. Les points A, B et D sont-ils alignés ?

3. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

22 Soient les points $A(-2;1)$, $B(3;-1)$ et $M(x\,;y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. Montrer que $2x+5y-1=0$.

23 Dans chaque cas, une des variables x ou y est donnée. Calculer mentalement l'autre.

1. $\begin{cases}x=5\\y=2x-7\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}x=-3\\2x+3y=9\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}y=2\\y=-3x+2\end{cases}$

SPÉCIMEN

Activités

1 Vers la notion d'équation cartésienne d'une droite

Objectif
Découvrir la notion d'équation cartésienne d'une droite.

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(-2;0)$ et $B(4;5)$.

1 Placer les points A et B et tracer la droite (AB).

2 Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3 On considère un point $M(x;y)$ appartenant à la droite (AB).

a. Recopier et compléter la phrase suivante : « $M(x;y)$ appartient à la droite (AB) si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont … ».

b. Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

c. En déduire que le point $M(x;y)$ appartient à la droite (AB) si, et seulement si les réels x et y vérifient la relation $5x-6y+10=0$.

4 En utilisant la question **3 c.** :

a. indiquer si les points $C(-8;5)$ et $D(82;70)$ appartiennent à la droite (AB) ;

b. déterminer la valeur du réel x_F telle que le point $F(x_F;1)$ appartienne à la droite (AB) ;

c. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la droite (AB).

5 PYTHON La fonction Python ci-contre permet de tester l'appartenance d'un point $M(x;y)$ à la droite (AB).

```
1 def pointsurdroite(x,y):
2     if ...==...:
3         print("Le point est sur (AB)")
4     else:
5         print("...")
```

a. Recopier le programme et compléter les lignes 2 et 5.

b. Exécuter ce programme et indiquer, parmi les points proposés, ceux qui appartiennent à la droite (AB) :

$R(10;10)$; $S(101;86)$ et $T(2\,428;2\,025)$

Info
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB).

Info
L'équation $5x-6y+10=0$ est appelée **une équation cartésienne** de la droite (AB).

Info
En 1637, Descartes publie le livre premier de *La Géométrie*.
Selon lui, on peut relier toute figure géométrique à une équation, que l'on obtient en travaillant à partir des coordonnées des points composant cette figure.


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.
Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

2 La proportionnalité des accroissements

Objectif
Découvrir une propriété des fonctions affines.

Un cinéma propose des places à 7 € l'unité.
Un abonnement annuel est aussi proposé. Pour l'achat d'une carte de 20 €, le prix des places est ensuite fixé pour l'année à 5 €.

1 **a.** Calculer le prix payé par un usager de ce cinéma pour 5 places dans l'année, puis pour 20 places dans l'année, avec les deux formules.

b. Pour chaque formule, préciser si le prix des places est proportionnel au nombre d'entrées.

c. Gilles et Christophe sont abonnés. Gilles a assisté à 7 séances de plus que Christophe. Combien a-t-il payé de plus que Christophe ?

2 On appelle x le nombre d'entrées annuelles d'un usager. Pour x entrées dans l'année, on appelle $U(x)$ le prix payé à l'unité, et $A(x)$ le prix payé par un abonné.

a. Donner l'expression de $U(x)$, puis de $A(x)$, en fonction de x.

b. Remplir les deux tableaux de valeurs ci-contre. Sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

x	0	2	5	12
$U(x)$				

x	0	2	5	12
$A(x)$				

c. Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$.
Démontrer que : $A(x_2)-A(x_1)=5(x_2-x_1)$.
Interpréter cette égalité dans le contexte de la question **1c**.

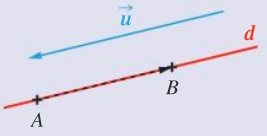
Info
La dernière égalité ci-contre indique que l'accroissement des images $A(x_2)-A(x_1)$ est proportionnel à l'accroissement des antécédents x_2-x_1.
Cette propriété caractérise les fonctions affines.

SPECIMEN

Cours

1 Vecteur directeur d'une droite

Définition On considère une droite d et deux points distincts A et B de d.
On appelle **vecteur directeur** de la droite d tout vecteur $\vec{u}$ non nul, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



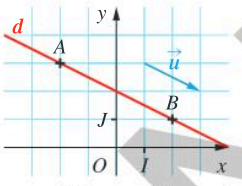
Remarques

- On dit que le vecteur $\vec{u}$ « dirige » la droite d.
- La direction du vecteur directeur $\vec{u}$ définit la direction de la droite d.
- Deux vecteurs directeurs de d ont la même direction : ils sont colinéaires.
- Deux droites parallèles ont la même direction : ainsi tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

Propriété Une droite d peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$. On a alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

Exemple



- La droite d passe par les points : $A(-2;3)$ et $B(2;1)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.

2 Équation cartésienne d'une droite

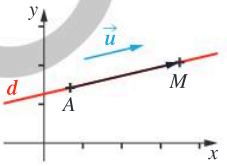
Propriété Dans un repère du plan, les coordonnées $(x\,;y)$ de tous les points M d'une droite d vérifient une équation de la forme :

$$ax+by+c=0$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. On notera par la suite $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Une telle équation s'appelle une **équation cartésienne** de la droite d.

Démonstration

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point de la droite d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.



$M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$

$\Leftrightarrow \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow \beta x-\alpha y+(-\beta x_A+\alpha y_A)=0$

On obtient bien une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=\beta$, $b=-\alpha$, $c=-\beta x_A+\alpha y_A$ et $(\beta\,;-\alpha)\neq(0\,;0)$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$.

Remarques

- Réciproquement, l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient une équation de la forme $ax+by+c=0$ (avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$) est une droite.
- Une droite d admet une infinité d'équations cartésiennes dont les coefficients sont deux à deux proportionnels.

Propriété Soit d la droite dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$, avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Remarque

Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est encore un vecteur directeur de la droite d.

Exemple

Soit d la droite passant par $A(1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

$M(x\,;y)\in d$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$

$\Leftrightarrow 5(x-1)-2(y-3)=0$

$\Leftrightarrow 5x-2y+1=0$

Une équation cartésienne de la droite d est donc $5x-2y+1=0$.

Logique

Une équation cartésienne de la droite d est une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un point appartienne à d :
– si un point M appartient à d, alors nécessairement ses coordonnées vérifient l'équation ;
– il suffit que les coordonnées d'un point M vérifient l'équation pour qu'il appartienne à d.

Exemple

La droite d d'équation cartésienne $4x-6y+1=0$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, mais aussi $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, colinéaire à $\vec{u}$, car $\vec{u}=2\vec{v}$.

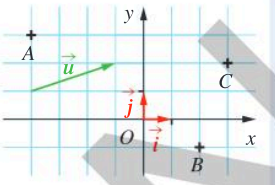
SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Déterminer une équation de droite

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(-4;3)$, $B(2;-1)$, $C(3;2)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 passant par C et parallèle à la droite (AB).

Solution rédigée

1. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2+4\\-1-3\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a :

$M(x;y)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow -4(x+4)-6(y-3)=0$

$\Leftrightarrow -4x-6y+2=0$

$\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$

Une équation cartésienne de (AB) est $2x+3y-1=0$.

2. La droite d_1 passe par C et admet pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Ainsi, pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a :

$M(x;y)\in d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM};\vec{u}\right)=0$

$\Leftrightarrow 1(x-3)-3(y-2)=0$

$\Leftrightarrow x-3y+3=0$

Une équation cartésienne de d_1 est $x-3y+3=0$.

3. La droite d_2 passe par C et est parallèle à la droite (AB).

Ainsi un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{AB}$.

Pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a :

$M(x;y)\in d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow -4(x-3)-6(y-2)=0$

$\Leftrightarrow -4x-6y+24=0$

$\Leftrightarrow 2x+3y-12=0$

Une équation cartésienne de d_2 est $2x+3y-12=0$.

Point méthode

1. Pour déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(x_A;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$: on écrit qu'un point $M(x;y)$ appartient à d, si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0$.

Point méthode

3. Lorsque deux droites sont parallèles, tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 387 Voir exercices similaires nos 40 à 47

24 Soient $A(-5;4)$, $B(2;3)$ et $C(-5;3)$.
Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

25 **1.** Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $T(-10;5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $F(5;2)$ et $G(25;-2)$.
3. Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

26 Soient $M(-2;5)$, $N(8;0)$ et $P(-3;3)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par P et parallèle à la droite (MN).
2. Le point $R(15;-6)$ est-il sur la droite d ? Justifier.

SPECIMEN

Cours

3 Équation réduite d'une droite

Propriété Soit d une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

- Si $b=0$, alors la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées et admet une équation, appelée **l'équation réduite**, de la forme $\boldsymbol{x=k}$, où $k\in\mathbb{R}$.
- Si $b\neq 0$, alors la droite d admet une unique équation de la forme $\boldsymbol{y=mx+p}$, appelée **l'équation réduite** de la droite d.

Le réel m est le coefficient directeur de d et p son ordonnée à l'origine.

Remarques

- La droite d d'équation réduite $y=mx+p$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;p)$ et admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
- Une droite d'équation réduite $y=mx+p$ est la représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$.

Propriété Soit d la droite d'équation réduite $y=mx+p$. Si les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points distincts de d, alors le coefficient directeur de la droite d est :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

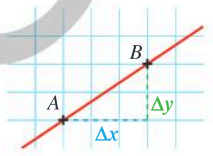
Démo

Démonstration

$A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ appartiennent à d, donc $y_A=mx_A+p$ et $y_B=mx_B+p$. On en déduit $p=y_A-mx_A$ et $p=y_B-mx_B$.
Ainsi : $y_A-mx_A=y_B-mx_B$, soit : $mx_B-mx_A=y_B-y_A$.
En factorisant par m, on obtient : $m(x_B-x_A)=y_B-y_A$.
Or $x_A\neq x_B$, donc : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Graphiquement, y_B-y_A est **l'accroissement des ordonnées** pour aller de A jusqu'à B, il est noté Δy.
De même, $\Delta x=x_B-x_A$. Ainsi, on note $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Cas particulier : lorsque $\Delta x=1$ alors $m=\Delta y$.



Exemple

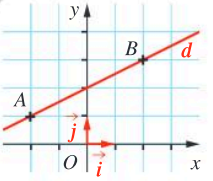
Soit d la droite d'équation cartésienne $2x-6=0$.
On a alors $x=\dfrac{6}{2}=3$.
Tous les points de d ont donc la même abscisse 3. Ainsi d est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple

Soit d la droite d'équation cartésienne $-3x+2y-5=0$.
On a $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$.
La droite d a alors pour coefficient directeur $m=\dfrac{3}{2}$ et pour ordonnée à l'origine $p=\dfrac{5}{2}$.

Exemple

Soit d la droite passant par les points $A(-2\,;1)$ et $B(2\,;3)$.



- Le coefficient directeur de d est égal à :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2+2}=\frac{2}{4}=0{,}5$$

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de d.

4 Position relative de deux droites

Propriété

- Deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.
- Deux droites d et d' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont parallèles si et seulement si $m=m'$.

Méthode : Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d : $y=x-3$ et d' : $y=-2x+3$, on écrit qu'un point $I(x_I\,;y_I)$ est à la fois sur d et d' lorsqu'on a simultanément :

$$y_I=x_I-3 \text{ et } y_I=-2x_I+3.$$

Alors on a : $x_I-3=-2x_I+3$ d'où : $3x_I=6$.
On obtient : $x_I=2$ et donc : $y_I=2-3=-2\times2+3=-1$.
Le point d'intersection de d et d' est donc : $I(2\,;-1)$.

Exemples

- Les droites :
d : $-3x+2y+1=0$ et
d' : $9x-6y-5=0$, ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$, qui sont colinéaires car $\vec{v}=-3\vec{u}$, donc d et d' sont parallèles.
- Les droites d'équations réduites $y=x-3$ et $y=-2x+3$ ne sont pas parallèles car elles n'ont pas le même coefficient directeur. Elles sont donc sécantes.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 À partir d'une équation, déterminer un vecteur directeur, un coefficient directeur, tracer une droite

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. a. Donner un vecteur directeur de la droite d_1 d'équation cartésienne $5x+4y-6=0$.
Construire la droite d_1.

b. Déterminer l'équation réduite de d_1. Donner son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

2. a. On considère les points $E(-24;-5)$ et $F(51;20)$. Déterminer l'équation réduite de la droite (EF).

b. Construire la droite (EF) en utilisant son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

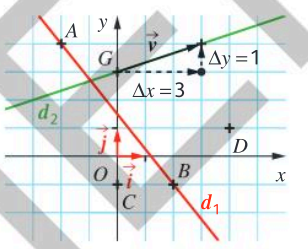
Solution rédigée

1. a. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_1.

Pour construire d_1, il suffit de placer deux points distincts de d_1.

- Pour $x=-2$, on a $5\times(-2)+4y-6=0$, soit $y=4$.
- Pour $x=2$, on a $5\times2+4y-6=0$, soit $y=-1$.

On place les points $A(-2;4)$ et $B(2;-1)$. La droite d_1 est la droite (AB).



b. $5x+4y-6=0 \Leftrightarrow 4y=-5x+6 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$.

L'équation réduite de d_1 est $y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$. Son coefficient directeur est $m=-\frac{5}{4}$ et son ordonnée à l'origine $p=\frac{3}{2}$.

2. a. E et F n'ont pas la même abscisse, donc la droite (EF) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation réduite de la forme $y=mx+p$.

- $m=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{20+5}{51+24}=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$ ainsi, on a $(EF):y=\frac{1}{3}x+p$.
- Pour calculer l'ordonnée à l'origine p, on utilise par exemple le point E qui appartient à (EF). Ses coordonnées vérifient l'équation $y_E=\frac{1}{3}x_E+p$, ainsi $-5=\frac{1}{3}\times(-24)+p$. Donc $p=3$.

La droite (EF) a pour équation réduite $y=\frac{1}{3}x+3$.

b. • La droite (EF) a pour ordonnée à l'origine $p=3$. Donc on place le point $G(0;3)$ qui appartient à (EF).

• Le coefficient directeur de (EF) est $m=\frac{1}{3}$, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EF). Par commodité pour le tracé, on peut considérer le vecteur $\vec{v}=3\vec{u}$, soit $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ qui est aussi un vecteur directeur de (EF). On construit le représentant du vecteur $\vec{v}$ d'origine G. On obtient ainsi la droite d_2 qui est la droite (EF).

Point méthode

Pour construire une droite :
- soit on calcule les coordonnées de deux points appartenant à la droite ;
- soit on calcule les coordonnées d'un point de la droite et on utilise un vecteur directeur.

Point méthode

1. b. Pour transformer une équation cartésienne en équation réduite, on exprime y en fonction de x sous la forme $y=mx+p$.

Point méthode

2. a. Pour obtenir **algébriquement** une équation de droite de la forme $y=mx+p$:
- on calcule m avec la formule $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- on calcule p en utilisant les coordonnées de l'un des points connus de la droite.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 387 Voir exercices similaires nos 50 à 56

27 On considère la droite d d'équation cartésienne $3x-2y+1=0$.

1. Donner un vecteur directeur, l'équation réduite et le coefficient directeur de d.

2. Construire la droite d.

28 On donne les points $A(-42;20)$ et $B(30;-4)$.

1. Déterminer l'équation réduite de (AB).

2. Construire la droite (AB) en utilisant son ordonnée à l'origine et son coefficient directeur.

3. Préciser un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB).

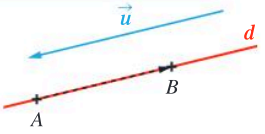
SPECIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

Vecteur directeur d'une droite

Soient d une droite et A et B deux points distincts de d.



Vecteur directeur de d : tout vecteur $\vec{u}$ non nul, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Deux vecteurs directeurs quelconques de d sont colinéaires.

La droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Équation cartésienne d'une droite

Dans un repère, toute droite du plan a une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+c=0$$

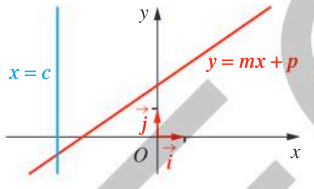
où a, b et c sont des réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.

Si un point appartient à d, ses coordonnées vérifient l'équation.
Réciproquement, si les coordonnées d'un point vérifient l'équation, alors ce point appartient à d.

Équation réduite d'une droite

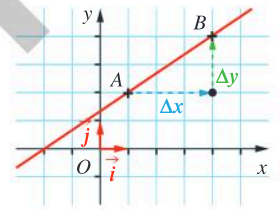
• Droite parallèle à l'axe des ordonnées : **équation réduite** de la forme $x=c$; c'est l'abscisse commune à tous les points de la droite.

• Droite non parallèle à l'axe des ordonnées : **équation réduite** de la forme $y=mx+p$.
m est le coefficient directeur de la droite et p son ordonnée à l'origine.



Coefficient directeur d'une droite

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts d'une droite avec $x_A\neq x_B$.
Le **coefficient directeur** de (AB) est $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
Graphiquement, $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

Position relative de deux droites

Dans le plan, deux droites sont parallèles ou bien sécantes.
Soient d et d' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.
• d et d' sont parallèles si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.
• d et d' sont sécantes si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.
On suppose que d et d' ont pour équations réduites respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$.
d et d sont parallèles si, et seulement si elles ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire $m=m'$.

Intersection de deux droites

On donne les équations réduites de deux droites :
$d : y=mx+p$ et $d' : y=m'x+p'$, avec $m\neq m'$.
Pour déterminer le point d'intersection de d et d' :
On détermine la solution x_0 de l'équation $mx+p=m'x+p'$.
Le point de coordonnées $(x_0\,;mx_0+p)$ est le **point d'intersection** des droites d et d'.



Je m'exerce à démontrer

Soient $A(1\,;5)$, $B(10\,;-1)$, $C(7\,;4)$ et $D(-2\,;1)$.
Les droites (AB) et (CD) se coupent en $P(4\,;3)$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2058

SPÉCIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE hachette-clic.fr/26de2059

Voir corrigés p. 387

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

	a	b	c
1. Soient $A(-2;5)$ et $B(2;1)$. Un vecteur directeur de (AB) est :	$\overrightarrow{AB}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$
2. La droite d'équation $3x-2y+5=0$ passe par le point :	$A(3;-2)$	$B(0;2{,}5)$	$C(3;7)$
3. La droite d'équation $3x-2y+5=0$ a pour vecteur directeur :	$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$
4. La droite d'équation $y=-3x+8$ passe par le point :	$A(-3;8)$	$B(-3;0)$	$C(0;8)$
5. Le point $A(-7;8)$ appartient à la droite d'équation :	$x=-7$	$2x+3y-10=0$	$y=-7x+8$
6. La droite d'équation réduite $y=-5x+2$:	a pour coefficient directeur 2	n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées	a pour coefficient directeur -5
7. La droite passant par $A(2;4)$ et $B(3;8)$:	a pour coefficient directeur $m=0{,}25$	a pour coefficient directeur $m=4$	est parallèle à l'axe des ordonnées
8. Les droites d'équations respectives $3x-6y+1=0$ et $4x-8y+5=0$ sont :	sécantes	parallèles	confondues
9. Les droites $d_1 : y=2x-3$ et $d_2 : y=2-3x$:	sont parallèles	sont sécantes au point $B(1;-1)$	sont sécantes au point $C(2;-3)$
10. Les droites $d_1 : y=-x+7$ et $d_2 : y=3x+3$ sont :	sécantes en $A(7;3)$	sécantes en $B(1;6)$	parallèles

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

On se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. La droite passant par $A(2;5)$ et $B(-1;4)$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

2. La droite $d : 2x+5y-3=0$ passe par le point : $A(2;5)$

3. La droite $d' : 2y+7=0$ est parallèle à l'axe $(O;\vec{i})$.

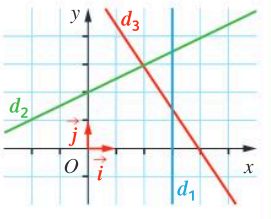
4. La droite passant par $C(2;-6)$ et $D(1;7)$ a pour équation cartésienne $13x-y-32=0$.

5. La droite passant par $E(1;6)$ et $F(2;1)$ a pour équation réduite $y=-5x+11$.

6. Les deux droites d'équation $y=-3x+2$ et $y=2x+7$ sont sécantes en $A(-1;5)$.

Partie B.

On donne le graphique ci-contre.



1. d_1 a pour équation : $x=3$

2. d_2 a pour équation : $y=0{,}5x+2$

3. Le coefficient directeur de d_3 est $m=-1{,}5$.

SPÉCIMEN

exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2060

Acquérir des automatismes

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

29 Dans chaque cas, indiquer si le point A appartient à la droite d. Justifier.

1. $A(-8;3)$ et $d : y = \frac{1}{4}x + 3$
2. $A(2;0)$ et $d : 3x - 5y + 6 = 0$
3. $A(-4;-3)$ et $d : x - y + 1 = 0$

30 Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite d.

1. d est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $A(2;-3)$.
2. d est parallèle à l'axe $(O;\vec{j})$ et passe par $A(-5;7)$.

31 Donner l'équation réduite de la droite d dans chacun des cas suivants.

1. d passe par l'origine et admet -6 pour coefficient directeur.
2. d a pour coefficient directeur -7 et coupe l'axe des ordonnées au point $A(0;11)$.
3. d est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $A(-5;-13)$.

32 On considère les points $A(3;-8)$ et $B(2;-4)$.

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

33 Soit d la droite dont une équation cartésienne est $2x + 3y - 5 = 0$.
Déterminer l'équation réduite de la droite d.

34 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

1. $A(-1;3)$ et $B(-1;-8)$ 2. $A(1;-2)$ et $B(4;3)$

35 Dans chaque cas, indiquer si les droites d et d' sont parallèles, sécantes ou confondues.

1. $d : y = 6x - 2$ et $d' : y = 4x - 2$
2. $d : y = 5x + 3$ et $d' : 10x - 2y + 4 = 0$
3. $d : 4x - 2y + 8 = 0$ et $d' : x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

36 Proposer l'équation réduite d'une droite d' parallèle à la droite $d : y = -2x + 3$.

37 Déterminer l'équation réduite de la droite d dans chacun des cas suivants.

1. d passe par l'origine et par le point $A(-9;7)$.
2. d passe par les points $A(5;-8)$ et $B(3;-8)$.
3. d est parallèle à la droite d' d'équation $y = 3x - 1$ et passe le point $A(-2;-4)$.
4. d passe par les points $A(-1;9)$ et $B(10;-3)$.

Travailler les capacités du chapitre

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Capacité 1 Déterminer une équation de droite

Voir p. 173

38 QCM

Pour chaque question, donner la (ou les) bonne(s) réponses(s).

1. La droite passant par $A(-1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

a. $3x + y = 0$ b. $3x + y - 6 = 0$ c. $3x - y + 6 = 0$

2. La droite passant par $A(3;5)$ et $B(-2;7)$ a pour équation cartésienne :

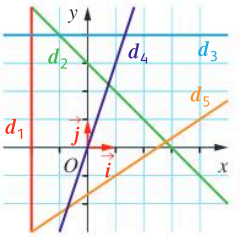
a. $2x + 5y - 31 = 0$
b. $-2x - 5y + 31 = 0$
c. $2x - 5y + 19 = 0$

3. La droite passant par $A(2;-3)$ et $B(2;5)$:

a. est parallèle à l'axe des abscisses.
b. admet pour équation cartésienne $x - 2 = 0$.
c. admet pour équation cartésienne $-8y - 24 = 0$.

39 On a tracé cinq droites sur le graphique ci-contre. Associer chaque droite à son équation cartésienne.

1. $y - 4 = 0$
2. $-2x + 3y + 5 = 0$
3. $x + y - 3 = 0$
4. $3x - y = 0$ 5. $x + 2 = 0$



Pour les exercices 40 à 42, déterminer dans chaque cas une équation cartésienne de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

40 1. $A(3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 2. $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2061

41 1. $A(5;-10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 2. $A(0;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

42 1. $A(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}$ 2. $A(-1;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

Pour les exercices 43 et 44, déterminer dans chaque cas une équation cartésienne de la droite (AB).

43 1. $A(2;1)$ et $B(5;-6)$ 2. $A(-3;0)$ et $B(1;1)$

44 1. $A(-1;7)$ et $B(0;3)$ 2. $A(6;8)$ et $B(3;2)$

SPECIMEN

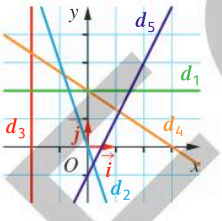
45 Soient les points $A(-3;4)$, $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.
1. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AC]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

46 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite d parallèle à la droite (AB) et passant par C.
1. $A(5;4)$; $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$
2. $A(-5;-1)$; $B(6;4)$ et $C(1;2)$

47 Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par A et parallèle à la droite d.
1. $d : -7x+2y-3=0$ et $A(4;2)$
2. $d : y=-3x+5$ et $A(-2;2)$

48 **Points alignés**
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifier si les trois points A, B et C sont alignés.
1. $A(-2;4)$; $B(7;2)$ et $C(11;1)$
2. $A(-4;-1)$; $B(4;3)$ et $C(44;23)$
3. $A(-26;20)$; $B(51;6)$ et $C(30;10)$

49 Par lecture graphique, déterminer l'équation réduite de chacune des droites tracées ci-dessous.



CAPACITÉ 2 **À partir d'une équation, déterminer un vecteur directeur, un coefficient directeur, tracer une droite**
Voir p. 175

50 Dans chaque cas, donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
1. $d : 3x-5y+4=0$ **2.** $d : y=-4x+6$
3. $d : 7x-9=0$ **4.** $d : 2y+5=0$

51 Soient $M(2;5)$, $N(1;8)$ et $P(4;-1)$.
1. Quelle formule permet de calculer le coefficient directeur de la droite (MN) ?
a. $\dfrac{y_M-x_M}{y_N-x_N}$ **b.** $\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}$ **c.** $\dfrac{x_M-x_N}{y_M-y_N}$
2. Calculer le coefficient directeur m de (MN).
3. Calculer le coefficient directeur m' de (MP).
4. Les points M, N et P sont-ils alignés ?

52 Justine affirme que pour tracer la droite d d'équation $3x-y+7=0$, il suffit de connaître les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.
Que penser de l'affirmation de Justine ? Justifier. Tracer la droite d.

Pour les exercices **53** *à* **55**, *déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur et d'un point A appartenant à la droite d, puis tracer d.*

53 $d : y=5x-2$

54 $d : 3x-y+1=0$

55 $d : -5x+4y-2=0$



56 Tracer dans un même repère du plan, les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives :
$d_1 : y=-4x$; $d_2 : y=2x+5$ et $d_3 : y=\dfrac{1}{3}x-1$

57 On considère les droites d_1 et d_2 d'équations cartésiennes :
$d_1 : 5x+4y-1=0$ et $d_2 : y=-\dfrac{5}{4}x+3$
1. a. Soit A le point de la droite d_1 d'abscisse 1. Calculer l'ordonnée de A.
b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de d_1.
c. Tracer d_1.
2. a. Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à d_2.
b. Tracer d_2. Que peut-on conjecturer quant à la position relative de d_1 et d_2 ?
3. Déterminer le coefficient directeur de la droite d_1. Justifier la conjecture.

58 Soit d la droite d'équation $2x-3y+4=0$.
1. Recopier et compléter les phrases suivantes.
a. Si $y=0$, alors $x=\ldots$ donc $A(\ldots;\ldots)\in d$.
b. Si $x=1$, alors $y=\ldots$ donc $B(\ldots;\ldots)\in d$.
2. Tracer la droite d.

59 Dans un même repère du plan, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives :
$2x-y+4=0$; $-5x+3y+21=0$ et $x=4$

60 On considère les points $A(1;5)$ et $B(6;2)$.
On note K le milieu du segment $[AB]$ et d la droite d'équation $-x+3y-7=0$.
1. Calculer les coordonnées du point K.
2. Placer les points A, B et K.
3. Tracer la droite d.
4. Le point K appartient-il à la droite d ? Justifier.
5. On appelle F le symétrique de D par rapport à E. Déterminer les coordonnées de F et la nature du quadrilatère $ADBF$.

SPECIMEN

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2060

CAPACITÉ 3 Étudier la position relative de deux droites, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes

61 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations cartésiennes :
$d_1 : 2x - y + 4 = 0$
$d_2 : -x + \frac{1}{2}y - 5 = 0$
$d_3 : x - 2y - 1 = 0$
1. Montrer que d_1 et d_2 sont parallèles.
2. Montrer que d_1 et d_3 sont sécantes.
3. Justifier que d_2 et d_3 sont sécantes en $A(-7 ; -4)$.

62 Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. Les droites d'équations $x = 3$ et $y = 3$ sont parallèles.
2. Les droites d'équations $y = \frac{2}{3}x - 1$ et $y = \frac{2}{3}x$ sont sécantes.
3. Les droites d'équations $3x - 7y - 8 = 0$ et $4x + 3y - 23 = 0$ sont sécantes en $A(5 ; 1)$.

Pour les exercices 63 à 65, étudier la position relative des droites d et d'. Dans le cas où ces deux droites sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

63 **1.** $d : y = 4x - 5$ et $d' : y = -3x + 9$
2. $d : y = x + 2$ et $d' : 6x - 2y + 8 = 0$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2063

64 **1.** $d : -5x + 7y - 2 = 0$ et $d' : y = 5x + 2$
2. $d : x - 5y + 10 = 0$ et $d' : y = \frac{1}{5}x + 2$

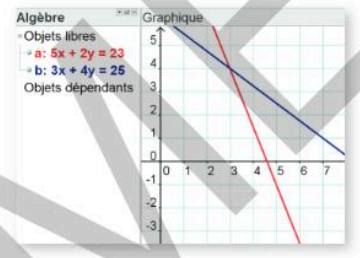
65 **1.** $d : y = 7x - 1$ et $d' : 14x - 2y + 3 = 0$
2. $d : 4x + y - 9 = 0$ et $d' : -5x + 3y + 2 = 0$

66 Soient deux droites :
$d_1 : -2x + 3y - 5 = 0$ et $d_2 : x + 4y - 14 = 0$
1. Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les équations réduites de d_1 et d_2, puis leur point d'intersection.

67 On considère deux droites d_1 et d_2 d'équations réduites respectives $y = x - 2$ et $y = -2x + 10$.
1. Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_2.

68 Soit d_1 la droite passant par $A(-2 ; -1)$ et $B(1 ; 1)$. Soit d_2 la droite passant par $C(-2 ; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
1. Tracer les droites d_1 et d_2.
2. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites d_1 et d_2.
3. Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2. Vérifier graphiquement.

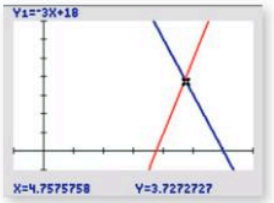
69 Alicia a tracé deux droites d_1 et d_2 à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



1. Lire les coordonnées du point d'intersection A des droites d_1 et d_2.
2. Retrouver par le calcul les coordonnées de A.

70 On considère trois droites d_1, d_2 et d_3.
d_1 passe par le point $A(2 ; -3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
d_2 et d_3 ont pour équations respectives :
$$-6x + 9y + 1 = 0 \text{ et } -\frac{3}{2}y + 3 = 0$$
1. Donner un vecteur directeur $\vec{v}$ de d_2.
2. Étudier la position relative des droites d_1 et d_2.
3. Montrer que les droites d_2 et d_3 sont parallèles.
4. Que peut-on en déduire pour les droites d_1 et d_3 ? Justifier.

71 Rémi a tracé deux droites $d_1 : y = -3x + 18$ et $d_2 : y = 4x - 15$.
À l'aide de la fonction *Trace*, il a placé le curseur à l'intersection des droites d_1 et d_2.



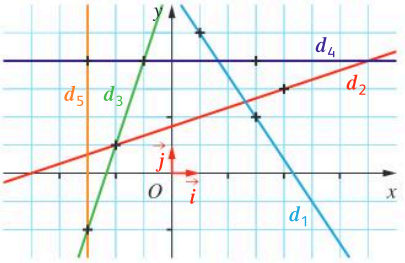
1. Calculer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection.
2. Rémi doit tracer une droite d_3 parallèle à d_1 passant par l'origine du repère.
a. Déterminer l'équation réduite de la droite d_3.
b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice les coordonnées du point d'intersection des droites d_2 et d_3.
c. Retrouver le résultat par le calcul.

SPÉCIMEN

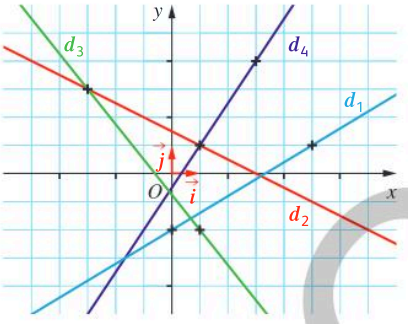
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 Vecteur directeur d'une droite

72 Pour chacune des droites ci-dessous, lire les coordonnées d'un vecteur directeur.



73 On a tracé quatre droites d_1 à d_4.



On donne les vecteurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-2\\2{,}5\end{pmatrix}$, $\vec{u_3}\begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{u_4}\begin{pmatrix}1\\0{,}6\end{pmatrix}$. Chaque vecteur est un vecteur directeur d'une des quatre droites.
Associer chaque droite et son vecteur directeur.

74 On considère le point $A(4;3)$.
Tracer quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u_3}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u_4}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

75 Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de trois vecteurs directeurs de la droite (AB).
1. $A(2;3)$ et $B(-1;2)$
2. $A(-5;4)$ et $B(3;1)$
3. $A(7;8)$ et $B(7;9)$

76 Dans chacun des cas suivants, indiquer si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
1. $A(-7;3)$; $B(5;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$
2. $A(5;2)$; $B(0;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$
3. $A(4;-2)$; $B(3;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$

77 On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.
1. Tracer la droite d puis placer B, C et D.
2. Le point B est-il sur d ? Justifier.
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier.

78 d et d' sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. Dans chaque cas, indiquer si les droites d et d' sont parallèles.
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

79 PYTHON
On considère les points $A(1;-1)$ et $B(6;1)$.
1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Les vecteurs suivants sont-ils des vecteurs directeurs de la droite (AB) ? Justifier.
a. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\0{,}4\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}12{,}5\\5\end{pmatrix}$
3. On donne la fonction Python ci-dessous qui permet de tester si un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

```
1 def vecteurdirecteur(x,y,xA,yA,xB,yB):
2     x2=xB-xA
3     y2=yB-yA
4     if ...==...:
5         print("u est un vecteur directeur de (AB)")
6     else:
7         print("u n'est pas un vecteur directeur de (AB)")
```

a. À quoi correspondent les variables x2 et y2 ?
b. Compléter la ligne 4.
c. Programmer cet algorithme et vérifier les résultats de la question **2.**

2 Équation cartésienne d'une droite

80 On considère la droite d d'équation cartésienne $3x-2y+5=0$.
1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d.
2. Le point $A(1;4)$ appartient-il à la droite d ? et le point $B(-2;3)$?
3. Construire la droite d.

81 Dans chaque cas, déterminer un vecteur directeur de la droite d et les coordonnées d'un point appartenant à d. Construire d.
1. $d:-3x+5y-2=0$
2. $d:4x+2y-3=0$

SPECIMEN

82 On considère la droite d d'équation cartésienne :
$$-x+2y+4=0$$
1. Déterminer :
a. un vecteur directeur de d dont les coordonnées sont positives ;
b. les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère ;
c. l'ordonnée du point de d d'abscisse 2 ;
d. l'abscisse du point de d d'ordonnée -3 ;
e. le réel m tel que $A(m\,;m)$ appartienne à d.
2. Construire la droite d.

83 On considère la droite d d'équation cartésienne :
$$2x-3y-5=0$$
Déterminer les valeurs des nombres réels a, b et c tels que les points $A(a\,;2)$, $B(-3\,;b)$ et $C(c\,;c)$ appartiennent à la droite d.

84 On considère la droite d d'équation cartésienne :
$$-5x+8y-c=0, \text{ où } c\in\mathbb{R}$$
Dans chaque cas, déterminer la valeur de c telle que le point A appartienne à d.
1. $A(5\,;3)$ **2.** $A(-1\,;2)$ **3.** $A(6\,;0)$

85 Construire les droites d_1 à d_4 d'équations cartésiennes respectives :
$$-3x+4y+9=0\ ;\ y=4\ ;$$
$$x+2y+4=0 \text{ et } 2x-5=0$$

86 Dans chaque cas, construire la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, puis en donner une équation cartésienne.
1. $A(-1\,;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
2. $A(5\,;-7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Pour les exercices **87** *et* **88**, *déterminer une équation cartésienne de la droite* (AB).

87 **1.** $A(2\,;1)$ et $B(2\,;-5)$
2. $A(3\,;-1)$ et $B(4\,;1)$

88 **1.** $A\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{3}\right)$ et $B\left(1\,;\frac{2}{3}\right)$
2. $A(2\,;-5)$ et $B(-4\,;-5)$

89 Soient les points $A(4\,;2)$ et $B(-1\,;-1)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Dans chaque cas, déterminer la valeur du réel m tel que les points A, B et C soient alignés.
a. $C(m\,;1)$ **b.** $C(-3\,;m)$ **c.** $C(m\,;m)$

Pour les exercices **90** *et* **91**, *déterminer une équation cartésienne de la droite* d' *passant par* A *et parallèle à la droite* d.

90 $A(1\,;5)$ et $d : 5x+2y+3=0$

91 $A(-2\,;3)$ et $d : x-4y-8=0$

Pour les exercices **92** *et* **93**, *déterminer une équation cartésienne de la droite passant par* C *et parallèle à la droite* (AB).

92 $A(-1\,;2)$, $B(3\,;-3)$ et $C(1\,;2)$

93 $A(2\,;3)$, $B(-1\,;-4)$ et $C(-2\,;1)$

94 **Médiatrices d'un triangle rectangle**
On considère les points $A(5\,;5)$, $B(2\,;1)$ et $C(10\,;-5)$.
1. **a.** Calculer les longueurs AB, AC et BC.
b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Déterminer les coordonnées des points M et N milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
3. **a.** Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice d_1 du segment $[AB]$.
b. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice d_2 du segment $[BC]$.
4. Montrer que le milieu P de $[AC]$ appartient à chacune des médiatrices d_1 et d_2.

3 Équation réduite d'une droite

95 Soient d_1 et d_2 les droites d'équations cartésiennes respectives $x-y-5=0$ et $2x-3y+7=0$.
Donner les équations réduites de d_1 et d_2.

96 Dans chaque cas, déterminer le coefficient directeur m de la droite (AB).
1. $A(2\,;5)$ et $B(-8\,;10)$ **2.** $A(-3\,;4)$ et $B(2\,;-5)$

97 Dans chaque cas, déterminer le réel p ou m pour que le point A appartienne à la droite d.
1. $d : y=-2x+p$ et $A(-3\,;2)$
2. $d : y=mx-\frac{1}{3}$ et $A(-1\,;-2)$

98 Dans chaque cas, déterminer le réel t pour que le point A appartienne à la droite d.
1. $d : y=-6x+11$ et $A(2\,;t)$
2. $d : y=3x+4$ et $A(t\,;t)$

99 Soient les points $A(2\,;-5)$, $B(2\,;4)$ et $C(-3\,;4)$.
1. Sans faire de calcul, donner l'équation réduite des droites (AB) et (BC).
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AC).

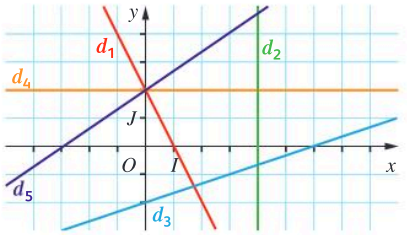
SPÉCIMEN

100 Tracer les droites d_1 à d_4 en utilisant le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

$d_1 : y = 2x - 3$ $\quad$ $d_2 : y = -3x + 1$

$d_3 : y = \frac{1}{2}x + 4$ $\quad$ $d_4 : y = \frac{2}{3}x - 2$

101 Par lecture graphique, préciser les équations réduites des droites tracées ci-dessous.



102 Déterminer algébriquement l'équation réduite de la droite d passant par le point A et de coefficient directeur m. Tracer d.

1. $A(2;8)$ et $m = -5$ $\quad$ **2.** $A(-3;-5)$ et $m = 3$

Pour les exercices **103** *à* **105**, *déterminer l'équation réduite de la droite* (AB).

103 **1.** $A(3;2)$ et $B(5;-2)$ $\quad$ **2.** $A(3;1)$ et $B(2;1)$

104 **1.** $A(0{,}2;5)$ et $B(1;0{,}8)$ **2.** $A(-2;-1)$ et $B(3;1)$

105 **1.** $A(3;2)$ et $B(3;-2)$ $\quad$ **2.** $A(-5;6)$ et $B(-6;5)$

106 Soient les points $A(-1;3)$ et $B(-2;1)$.
Déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point $C(-3;2)$ et parallèle à (AB).

107 Compétence Modéliser

En 2019, la Bibliothèque nationale de France a enregistré 1,3 millions d'entrées pour 1,7 millions en 2024.
On considère les deux points $A(0\,;\,1\,300)$ et $B(5\,;\,1\,700)$ dans un repère orthogonal.



Source : INSEE

On suppose que la droite (AB) décrit l'évolution en fonction du temps du nombre d'entrées de la bibliothèque à partir de 2019.

1. Déterminer une équation réduite de (AB).
2. Estimer le nombre d'entrées en 2027.
3. En quelle année le nombre d'entrées pourrait dépasser 2,5 millions ?

108 ALGO L'algorithme ci-contre permet d'obtenir l'équation réduite $y = mx + p$ d'une droite passant par deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.

```
Saisir xA, yA, xB, yB
m ← ...
p ← ...
Afficher m
Afficher p
```

1. Montrer que $p = y_A - mx_A$.
2. Recopier et compléter l'algorithme.

109 **Vrai ou faux ?** Justifier.

1. La droite passant par $A(2;5)$ et $B(2;-9)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
2. La droite passant par $A(8;1)$ et $B(2;19)$ admet pour coefficient directeur $m = -\frac{1}{3}$.
3. Le point $A(1;1)$ est le point d'intersection des droites d'équations $y = -2x + 3$ et $y = 3x - 4$.

4 Position relative de deux droites

Pour les exercices **110** *et* **111**, *indiquer si les droites* d *et* d' *sont strictement parallèles, confondues ou sécantes. Justifier.*

110 **1.** $d : 2x - 6y + 5 = 0$ et $d' : x - 3y + 2 = 0$
2. $d : 4x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 5x - 4y + 2 = 0$

111 **1.** $d : 3x + 9y - 2 = 0$ et $d' : x + 3y - \frac{2}{3} = 0$
2. $d : y = 3x - 6$ et $d' : y = -4x + 1$

112 On considère les droites d_1 et d_2 d'équations cartésiennes respectives $-2x + 5y - 1 = 0$ et $3x + by + 4 = 0$, où b est un réel. Déterminer le réel b pour que les droites d_1 et d_2 soient parallèles.

113 **1.** Placer les points $A(4;5)$, $B(-2;2)$, $C(2;-3)$ et $D(4;-2)$.
2. Étudier la position relative des droites (AB) et (CD).
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Analyse d'un énoncé

114 **Exercice commenté**

On donne un nombre réel t et quatre points :
$A(2;8), B(7;-2), C(-3;-1)$ et $D(-8;t)$

1. Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Exprimer en fonction de t le coefficient directeur de la droite (CD).

Cela signifie que la réponse ne sera pas un nombre fixé, le réel t apparait dans le coefficient.

3. Calculer le nombre t pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Deux droites sont parallèles si, et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

115 **Application immédiate**

Soient $A(12;10), B(-3;15), C(2;t)$ et $D(4;3t+4)$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de t le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (CD).
2. Existe-t-il un nombre t pour lequel les droites (AB) et (CD) sont confondues ?
3. Existe-t-il un nombre réel t pour lequel les points A, C et D sont alignés ?

SPECIMEN

BILAN

116 20min Exploiter une équation cartésienne

On considère la droite d dont une équation cartésienne est $2x-3y-5=0$ dans un repère du plan.

1. Donner un vecteur directeur de d.

2. Les points $A(-1;-1)$ et $B\left(\frac{1}{2};-\frac{4}{3}\right)$ appartiennent-ils à d ? Justifier.

3. Déterminer :

a. l'ordonnée du point de d dont l'abscisse est 1 ;

b. l'abscisse du point de d dont l'ordonnée est $-\frac{1}{3}$;

c. les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère ;

d. le réel m tel que $C(m;m)$ appartienne à d.

4. Donner l'équation réduite de la droite d.

5. Construire la droite d.

6. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par $E(4;-3)$ et parallèle à d.

117 15min Équations cartésiennes de droites

On considère les points $A(-5;2)$, $B(3;4)$, $C(8;5)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Soit d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a. Construire d.

b. Déterminer une équation cartésienne de d.

2. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

b. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

3. Montrer que les droites d et (BC) sont sécantes en un point M dont on déterminera les coordonnées.

118 15min Une modélisation

Une entreprise vend différents modèles de chaises dont le prix est compris entre 100 € et 1 500 €. Une étude a montré que si le prix de vente d'un modèle de chaise est de 100 €, alors elle en vend chaque mois environ 2 500. Pour un modèle à 1 500 €, elle en vend seulement 10. On considère les points $M(100;2\,500)$ et $N(1500;10)$ dans un repère du plan.

On admet que la droite (MN) permet d'estimer le nombre de chaises vendues en fonction du prix du modèle.

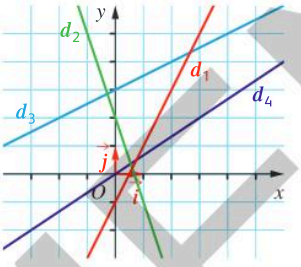
1. Déterminer l'équation réduite de la droite (MN). Arrondir le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine au centième.

2. Estimer le nombre de chaises vendues pour un modèle à 500 euros.

3. Un modèle est rentable si, chaque mois, plus de 1 000 exemplaires sont vendus. Quel est le prix de vente que ne doit pas dépasser un modèle pour être rentable ?

119 15min Lectures graphiques

1. Pour chacune des droites d_1 à d_4 tracées ci-dessous, donner son coefficient directeur puis son équation réduite.



2. Déterminer l'équation réduite de la droite d_5 parallèle à d_2 et passant par $A(-2;3)$.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d_1 et d_3.

120 10min Alignés ou pas ?

Dans un repère orthonormé, on donne les trois points $A(0;13)$, $B(8;8)$ et $C(21;0)$.

1. Choisir des unités adaptées et placer les points A, B et C sur un graphique.

2. Les trois points A, B et C sont-ils alignés ?

121 20min Étude d'une configuration

Dans un repère, on donne $A(-4;5)$, $B(5;3)$, $C(-5;1)$ et $D(1;6)$. Soit M le milieu du segment $[BC]$.

1. a. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites (AB) et (CD).

b. Justifier que (AB) et (CD) sont sécantes en un point F dont on donnera les coordonnées.

2. a. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites (AC) et (DB).

b. Justifier que (AC) et (DB) sont sécantes en un point G dont on calculera les coordonnées.

3. Déterminer l'équation réduite de la droite (MG).

4. Montrer que les points M, F et G sont alignés.

122 15min Étude d'une configuration

On considère les points $A(3;6)$, $B(9;12)$, $C(14;10)$ et $D(5;1)$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. a. Déterminer l'équation réduite des droites (AD) et (BC).

b. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont sécantes en un point M dont on déterminera les coordonnées.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

SPÉCIMEN

123 15min **Achat en ligne ou en magasin ?**

Léa souhaite acheter un téléviseur et une tablette pour un montant total de 714 € en magasin.
Sur le site internet du magasin, elle remarque que pour des modèles identiques, le téléviseur bénéficie, par rapport au prix en magasin, d'une remise de 30 % et la tablette d'une remise de 50 €. Le montant total de ces deux achats sur internet s'élève alors à 535 €.
Les prix en magasin du téléviseur et de la tablette sont notés respectivement x et y.

1. Montrer que les indications du site internet permettent d'affirmer que $0{,}7x + y = 585$.

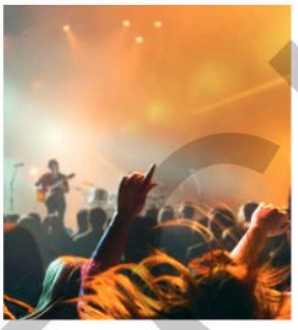
2. Écrire une seconde équation vérifiée par x et y.

3. Dans le plan rapporté à une repère, comment s'interprète le fait que x et y vérifient les deux équations précédentes simultanément ?

4. En déterminant le point d'intersection de deux droites du plan, en déduire le prix du téléviseur et de la tablette sur internet.

124 10min **Au concert**

Une salle de concert propose des places à 5 € et des places à 9,50 €. Lors du dernier concert, la recette a été de 29 375 € pour 4 300 spectateurs.



1. Après avoir choisi des inconnues, écrire deux équations traduisant les hypothèses du problème.

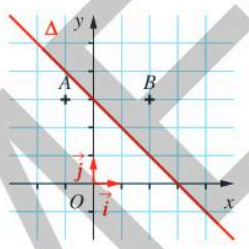
2. Comment s'interprète graphiquement, dans le plan rapporté à un repère, le problème à résoudre ?

3. En déterminant le point d'intersection de deux droites du plan, déterminer le nombre de places de chaque sorte qui ont été vendues.

125 20min **Équations réduites de droites**

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère deux points $A(-1;3)$ et $B(2;3)$. On note Δ la droite d'équation :

$$y = -x + 3$$



1. Construire la droite Δ, puis placer A et B.

2. Déterminer par lecture graphique l'équation réduite de la droite (AB).

3. On donne $C(-1;4)$ et $D(2;13)$.

a. Montrer que C appartient à la droite Δ.

b. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (CD).

c. Pourquoi (CD) et (AB) sont-elles sécantes ?

d. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E des droites (CD) et (AB).

APPROFONDISSEMENT

126 **Droite d'Euler d'un triangle**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on place les points $A(-4;3)$, $B(8;1)$ et $C(1;4)$.

Partie A. **Médiatrices du triangle ABC**

On rappelle que la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

1. On note m_1 la médiatrice du segment $[BC]$.

a. Soit $M(x;y)$ un point quelconque de m_1. Exprimer BM^2 et CM^2 en fonction de x et y.

b. En déduire qu'une équation cartésienne de m_1 est $7x - 3y - 24 = 0$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne de la médiatrice m_2 du segment $[AC]$ est $5x + y + 4 = 0$.

3. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

Partie B. **Hauteurs du triangle ABC**

1. Soit h_1 la hauteur issue de A du triangle ABC.

a. Justifier que m_1 et h_1 sont parallèles.

b. En déduire une équation cartésienne de h_1.

2. Déterminer une équation de h_2, hauteur issue de B du triangle ABC.

3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

Partie C. **Médianes du triangle ABC**

1. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de C dans le triangle ABC.

3. On admet qu'une équation cartésienne de la médiane issue de A dans le triangle ABC est $x + 17y - 47 = 0$. Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

Partie D. **Droite d'Euler du triangle ABC**

Montrer que les points Ω, H et G sont alignés.

Info

La droite passant par les points Ω, G et H est appelée la droite d'Euler du triangle ABC. Ce résultat reste valable dans tout triangle ABC non équilatéral.

SPÉCIMEN

127 Un ensemble de points

On note E l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan rapporté à un repère tels que :

$$(-2x+3y+1)^2-(4x-y+2)^2=0$$

1. Montrer que E est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on déterminera une équation cartésienne.

2. Représenter graphiquement l'ensemble E.

128

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;1)$, $B(1\,;0)$, $C(1\,;2)$ et $D(4\,;3)$. On appelle Γ le cercle de centre A qui passe par B.

1. Approche graphique, conjectures

a. Réaliser une figure.

b. Tracer la droite d_1 d'équation : $x-3y+5=0$.

c. Tracer la droite d_2 d'équation : $y=-2x+2$

d. Tracer la droite d_3 d'équation : $y=-x$.

e. Par lecture graphique, conjecturer les coordonnées des points d'intersection de d_1, d_2 et d_3 avec Γ.

2. Approche numérique

a. Calculer la distance AB.

b. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne au cercle Γ est donnée par la relation :

$$(x-3)^2+(y-1)^2=5$$

c. À l'aide de cette équation cartésienne, vérifier les conjectures réalisées graphiquement ci-dessus pour l'intersection des droites d_1 et d_2 avec le cercle Γ.

d. On suppose ici qu'un point $M(x\,;y)$ appartient à la fois à la droite d_3 et au cercle Γ.

Montrer qu'alors on a : $(x-1)^2+\dfrac{3}{2}=0$.

Que peut-on en déduire pour d_3 et Γ ?

Info

Dans cet exercice, on rencontre les trois cas possibles pour l'intersection d'une droite et d'un cercle : deux points d'intersection, un point d'intersection, ou aucun.

129 Une famille de droites

Soit m un nombre réel. On note D_m la droite dont une équation cartésienne dans le plan rapporté à un repère est $(m-1)x+(3m+2)y+m+4=0$.

1. Donner l'équation réduite de la droite D_{-1} et tracer cette droite.

2. Dans chaque cas, déterminer la valeur de m telle que :

a. D_m passe par l'origine du repère ;

b. le point $A(-1;1)$ appartienne à D_m ;

c. D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées ;

d. D_m soit parallèle à l'axe des abscisses ;

e. D_m soit parallèle à la droite Δ d'équation :

$$x-4y+5=0$$

3. Montrer qu'il existe un point P, dont on déterminera les coordonnées, qui appartient à toutes les droites D_m.

130 Régionnement du plan

Partie A. On considère la droite $d : 2x+3y=11$.

1. Tracer la droite d dans un repère.

2. On considère l'ensemble E des points $M(x\,;y)$ tels que $2x+3y<11$.

a. Montrer que l'origine du repère est dans E.

b. Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à l'ensemble E ? Justifier par un calcul.

• $A(2;1)$ • $B(1;4)$ • $C(5;0)$ • $D(4;1)$

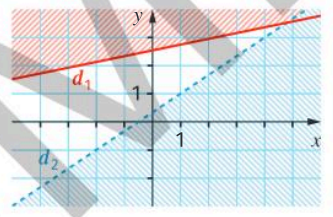
c. Graphiquement, où sont situés les points qui appartiennent à l'ensemble E ?

Info

On dit que l'ensemble E est le **demi-plan** délimité par la droite d (non incluse) et contenant l'origine du repère.

Partie B. Ci-dessous, on a représenté deux droites :

$$d_1 : x-5y+13=0 \text{ et } d_2 : 2x-3y+1=0$$



Décrire l'ensemble non hachuré par un système de deux inéquations à deux inconnues x et y. *Une droite en pointillés correspond à une inégalité stricte.*

131

On considère l'ensemble F des points $M(x\,;y)$ vérifiant dans le plan rapporté à un repère :

$$\begin{cases} x>0 \\ x-y-1\leqslant 0 \\ 3x-5y+4>0 \end{cases}$$

1. Les points $A(1;2)$ et $B(3;2)$ appartiennent-ils à F ?

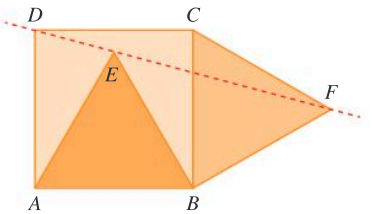
2. a. Tracer les droites $d_1 : x=0$, $d_2 : x-y-1=0$ et $d_3 : 3x-5y+4=0$.

b. Hachurer les parties du plan qui ne vérifient pas les inéquations de l'ensemble F. Décrire l'ensemble F.

3. Combien de points à coordonnées entières sont-ils dans l'ensemble F ? Lesquels ?

132 PRISE D'INITIATIVES

Soit $ABCD$ un carré. Soient E et F deux points tels que les triangles ABE et BCF sont équilatéraux comme indiqué sur la figure ci-dessous.



En se plaçant dans le repère (A, B, D), montrer que les points D, E et F sont alignés.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

133 **Compréhension d'énoncé**
On considère l'énoncé suivant.

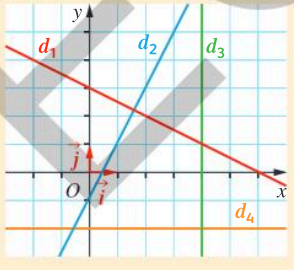
Soient $A(2;-8)$, $B(-5;6)$ et $C(-12;15)$.
I. Déterminer une équation cartésienne, puis l'équation réduite de la droite (AB).
II. Le point C appartient-il à (AB) ?
III. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ parallèle à (AB) passant par C.

Répondre aux questions suivantes.
1. Quelle est la forme d'une équation cartésienne ? Celle d'une équation réduite ?
2. Comment montre-t-on qu'un point appartient à une droite ?
3. Quel mot est important dans la consigne ? Que permet-il de connaître pour l'équation réduite de Δ ?
4. Répondre aux trois questions de l'énoncé.

134 **1.** Dans un repère, construire la droite d_1 passant par $A(-3;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de d_1.

135 On donne deux points $T(-4;3)$ et $R(5;4)$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (RT).
2. Le point $S(15;5)$ appartient-il à la droite (RT) ?

136 **1.** Déterminer graphiquement le coefficient directeur de la droite d_1 ci-contre.
2. Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des quatre droites ci-contre.



137 Soient $A(2;4)$, $B(3;3)$, $C(2;-1)$ et $D(0;2)$.
Déterminer algébriquement l'équation réduite de chacune des droites :
(AB) ; (CD) ; (AC) et (AD)

138 Soient trois droites :
$d_1 : 7x-4y+13=0$
$d_2 : -21x+12y-4=0$
$d_3 : x-10y+5=0$
1. Les droites d_1 et d_2 sont-elles sécantes ?
2. a. Déterminer l'équation réduite des droites d_1 et d_3.
b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

Aller plus loin

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

139 Soient $A(3;8)$, $B(2;1)$, $C(8;3)$ et $N(6;5)$.
1. a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
b. Calculer les coordonnées de M, milieu de $[BC]$.
c. Que représente la droite (AM) pour le triangle ABC ?
2. a. Déterminer une équation cartésienne de (AC).
b. Démontrer que N appartient à la droite (AC).
c. Montrer que le triangle BNC est rectangle en N.
d. Que représente la droite (BN) pour le triangle ABC ?
3. a. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AM) et (BN).
b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

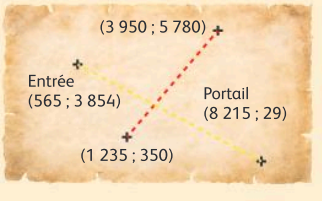
140 Soient $A(2;2)$, $B(4;4)$, $C(7;2)$ et $D(4;-2)$.
1. Montrer que la droite d_1 passant par A et parallèle à (BC) et la droite d_2 passant par D et parallèle à (AC) sont sécantes en un point P.
2. Calculer les coordonnées du point P.

141 $ABCD$ est un carré. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.
1. Donner les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.
2. Calculer les coordonnées des points I et J.
3. Déterminer l'équation réduite des droites (AC) et (BJ).
4. Montrer que (AC) et (BJ) sont sécantes en un point G dont on déterminera les coordonnées.
5. Montrer que les points D, G et I sont alignés.

142 PRISE D'INITIATIVES

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2064

Un trésor serait caché dans le puits d'un château situé à mi-chemin entre la porte d'entrée du château et le portail du parc. Sur une carte, les positions des points sont données avec l'indication : « Le trésor est au croisement des deux chemins. »



Le trésor est-il dans le puits ?

SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

Droites perpendiculaires dans un repère orthonormé

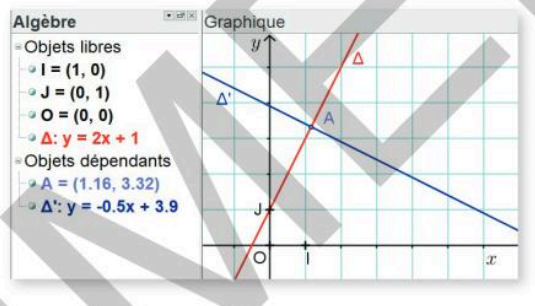
L'objectif est d'établir un moyen rapide pour savoir si deux droites non parallèles aux axes et dont on connaît les équations réduites dans un repère orthonormé sont perpendiculaires.

Objectif
Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et démontrer.

Partie A Première approche

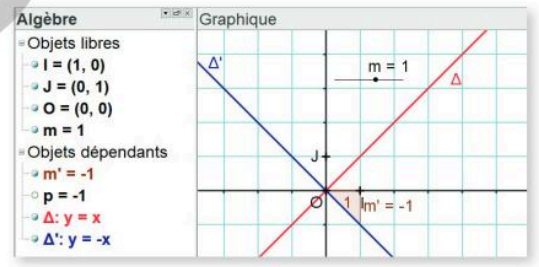
1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
a. construire la droite d'équation réduite $y = 2x + 1$, la renommer Δ et placer un point A quelconque sur cette droite ;
b. construire la droite perpendiculaire à Δ et passant par A, la renommer Δ' ;
c. dans la fenêtre *Algèbre*, mettre l'équation de la droite Δ' sous la forme $y = ax + b$ et noter son coefficient directeur m' ;
d. calculer le produit $p = m \times m'$ des coefficients directeurs.

2. Reprendre la question **1.** avec la droite $\Delta : y = -5x + 2$, puis avec la droite $\Delta : y = \frac{2}{3}x$.
3. Que constate-t-on ?



Partie B Conjecture avec des droites non parallèles aux axes du repère

Soit une droite Δ d'équation réduite $y = mx$ où m est un nombre réel non nul.
1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
a. créer un curseur m à l'aide de l'icône ;
b. construire la droite d'équation réduite $y = mx$ à renommer Δ ;
c. construire la droite perpendiculaire à Δ et passant par l'origine O du repère, la renommer Δ' ;
d. à l'aide de l'icône, afficher le coefficient directeur, renommé m', de la droite Δ' ;
e. dans la barre de saisie, écrire $p = m \times m'$ et animer le curseur m.
2. Que constate-t-on pour le produit $p = m \times m'$?



Partie C Démonstration

On considère les droites Δ et Δ' d'équations réduites respectives :

$$y = mx \text{ et } y = m'x$$

1. a. Montrer que les points $A(1; m)$ et $A'(1; m')$ appartiennent respectivement à Δ et Δ'.
b. Montrer que les droites Δ et Δ' sont perpendiculaires si, et seulement si le triangle OAA' est rectangle en O.
c. Exprimer les longueurs OA^2, OA'^2 et AA'^2 en fonction de m et m'.
d. Montrer que les droites Δ et Δ' sont perpendiculaires si, et seulement si $m \times m' = -1$.
2. On considère deux droites d et d' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
a. Que peut-on dire des droites d et Δ ? Pourquoi ?
b. Que peut-on dire des droites d' et Δ' ? Pourquoi ?
c. Si Δ et Δ' sont perpendiculaires, que peut-on dire des droites d et d' ?
3. Énoncer une règle permettant de savoir si deux droites d et d' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires.

SPECIMEN

TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Méthode pour multiplier deux nombres à l'aide d'une droite

TRAVAIL DE GROUPE

Il existe une méthode pour connaître la valeur du produit de deux nombres a et b à l'aide d'une équation réduite de droite.

Partie A Observation sur deux exemples

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite $y = mx + p$ de la droite (AB).

a. $A(2;4)$ et $B(-3;9)$

b. $A(5;25)$ et $B(-4;16)$

2. Dans chacun des cas ci-dessus, vérifier qu'on a :

$$p = -x_A \times x_B$$

Partie B Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique

- Créer deux curseurs a et b ayant un pas égal à 1, tels que $0 \leqslant a \leqslant 10$ et $-10 \leqslant b \leqslant 0$.
- Placer deux points $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$.
- Tracer la droite (AB) et afficher son équation réduite dans la fenêtre algèbre.
- Vérifier que l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est égale à $-a \times b$ quelles que soient les valeurs de a et de b.

Partie C Démonstration

On considère deux points $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$.

1. Démontrer que la droite (AB) a un coefficient directeur égal à $b + a$.
2. Démontrer que la droite (AB) a une ordonnée à l'origine égale à $-ab$.
3. Recopier et compléter la phrase suivante :

« Le produit de deux nombres a et b est égal à … de la droite (AB). »

Info

Cette méthode est valable pour tous nombres a et b réels.

Partie D Présentation de la méthode

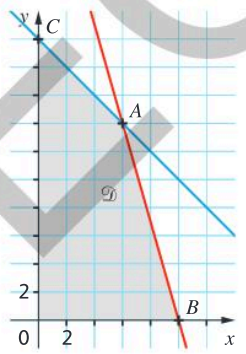
À l'oral ou à l'écrit, présenter la méthode qui permet de connaître le résultat de la multiplication de deux nombres a et b.

Montrer comment on peut visualiser dans un repère le résultat de 5×6, de $3{,}2 \times 4{,}7$ et de $0{,}9 \times 3{,}4$.

TP2 Programmation linéaire

Partie A Caractérisation d'un domaine sur un graphique

Dans le repère orthonormé ci-contre, on considère deux droites (AB) et (AC). La partie grisée est notée $\mathscr{D}$.



1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB) et (AC).
2. Écrire un système d'inéquations caractérisant la partie de plan grisée, frontières comprises. On justifiera la réponse.

Partie B Étude d'un espace publicitaire

Les espaces publicitaires d'un magazine sont soumis à deux contraintes. D'une part, il ne doit pas y avoir plus de 20 publicités. D'autre part, l'aire du domaine occupé par l'ensemble de la publicité ne doit pas dépasser 2 240 cm^2.

De plus, dans ce magazine, il existe deux types de formats publicitaires, un « grand format » d'aire 224 cm^2 et un « petit format » d'aire 64 cm^2.

On appelle x le nombre de publicités « grand format » et y le nombre de publicités « petit format ».

1. Montrer que les informations ci-dessus se traduisent par un système équivalent à celui trouvé dans la **partie A**.
2. Le magazine facture 1 200 € une publicité « grand format » et 600 € une publicité « petit format ».

a. Exprimer la recette R dégagée par l'édition de x publicités « grand format » et y publicités « petit format ».

b. Reproduire à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique le graphique ci-contre et tracer les droites suivantes.

- La droite Δ_1 de la recette lorsque $R = 8\,000$ €.
- La droite Δ_2 de la recette lorsque $R = 12\,000$ €.
- La droite Δ_3 de la recette lorsque $R = 20\,000$ €.

c. Que constate-t-on pour les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 ?

Partie C Recherche de la recette maximale

À l'oral ou à l'écrit, expliquer la méthode graphique qui permet de déterminer les nombres x et y de publicités « grand format » et « petit format » induisant une recette maximale pour le magazine.

Quel est le montant de la recette maximale ?

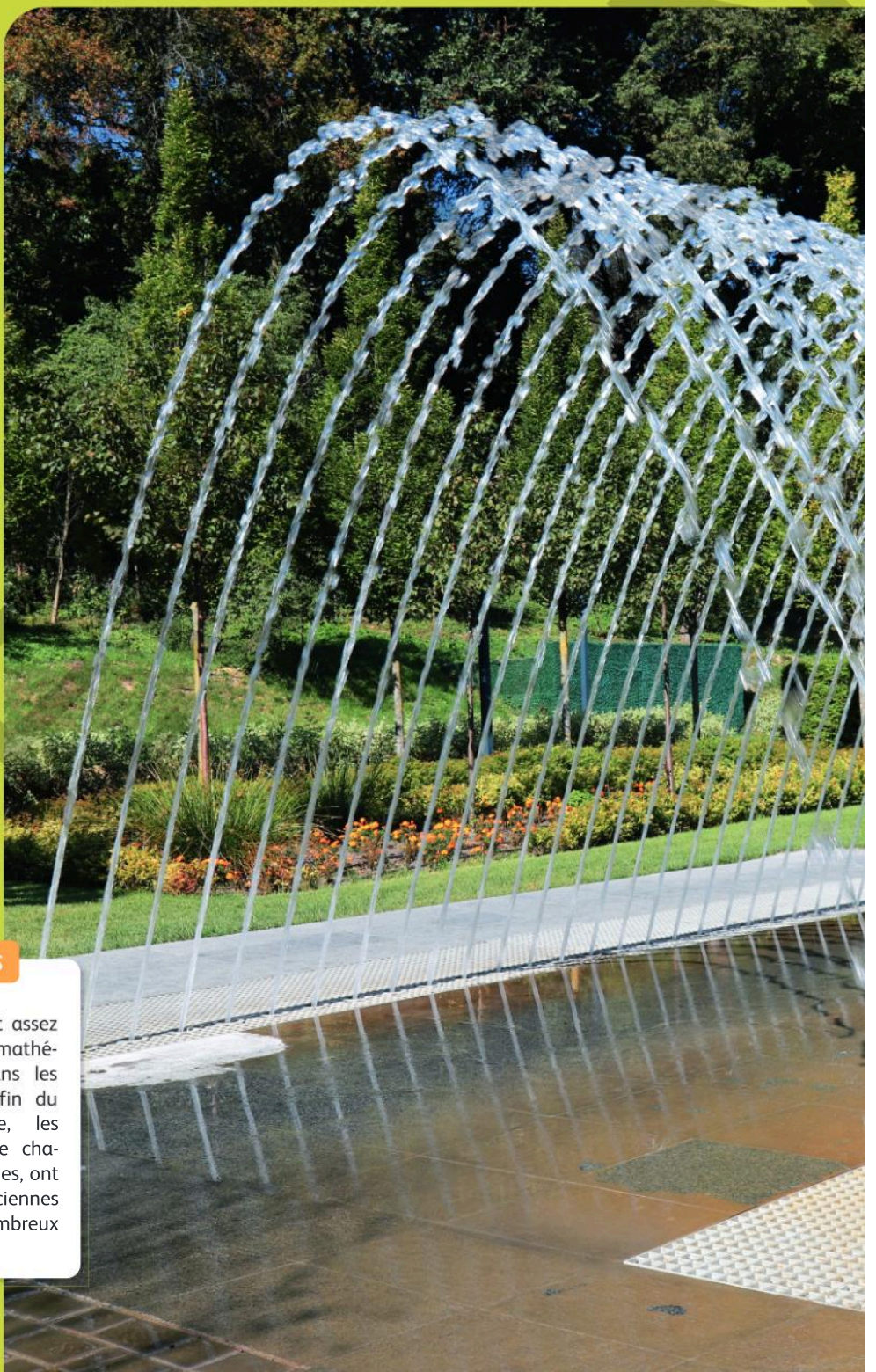
SPECIMEN

CHAPITRE

8 Fonctions numériques et représentations graphiques

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe
- CAPACITÉ 2 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$, une inéquation du type $f(x) < k$
- CAPACITÉ 3 Résoudre une équation, une inéquation à l'aide des fonctions de référence
- CAPACITÉ 4 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$, une inéquation du type $f(x) < g(x)$
- CAPACITÉ 5 Modéliser une situation par une fonction



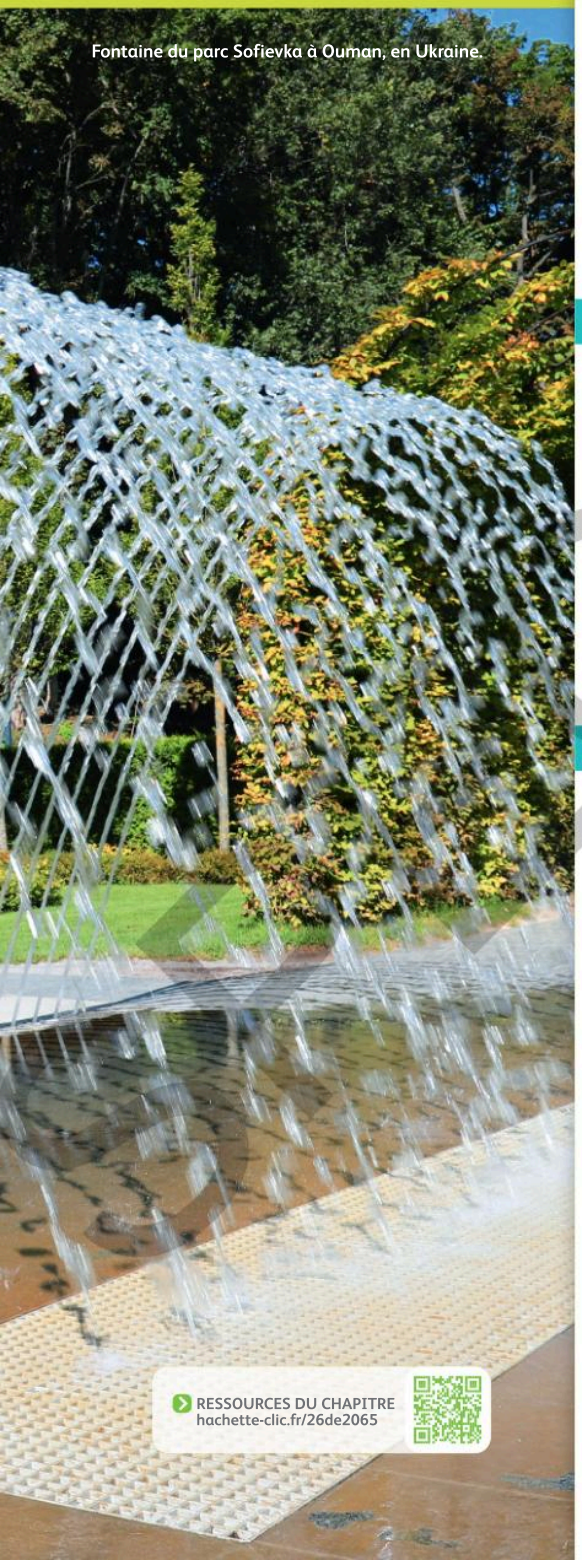
Au fil du temps

Le concept de fonction est assez récent dans l'histoire des mathématiques ; il apparaît dans les travaux de Leibniz à la fin du XVII^e siècle. En revanche, les courbes abordées dans ce chapitre, paraboles et hyperboles, ont fait l'objet d'études très anciennes et sont utilisées dans de nombreux domaines.

COPIE

Des maths partout !

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles, courbes qui modélisent la chute des corps. Les jets d'eau en donnent de belles illustrations.



Fontaine du parc Sofievka à Ouman, en Ukraine.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2065

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Réactiver le vocabulaire des fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

1. a. Vérifier que $f(-1) = 5$.

b. Recopier et compléter les phrases suivantes à l'aide des nombres -1 ou 5, ou des mots « image » ou « antécédent ».

- 5 est l'… de -1 ;
- … a pour antécédent … ;
- … est l'antécédent de … ;
- -1 admet 5 comme … ;
- le point $A(\ldots;\ldots)$ appartient à la droite d représentant f.

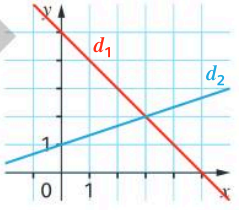
2. Déterminer, sans calculatrice, l'image par f de $\frac{1}{2}$ puis de $-\frac{2}{3}$.

3. Déterminer les antécédents de -3 et de 0 par f.

4. Représenter graphiquement la fonction f.

C Des fonctions affines

On considère les fonctions affines f et g représentées respectivement par les droites d_1 et d_2 tracées ci-contre.



1. Résoudre graphiquement :

a. l'équation $f(x) = g(x)$;

b. l'inéquation $f(x) < g(x)$.

2. a. Lire graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d_1 et d_2.

b. En déduire les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

3. Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **1.**

D Différents modes de représentation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par le programme de calcul ci-contre.

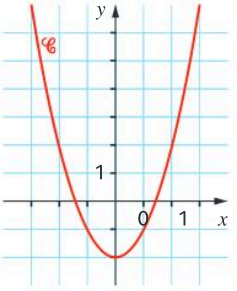
Choisir un nombre
Élever au carré
Soustraire 2

1. Calculer les images par f des nombres -3 ; 0 et 4.

2. On applique le programme à un réel x quelconque. Préciser l'expression $f(x)$ en fonction de x.

3. On admet que la fonction f admet le tableau de valeurs et la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	-2	-1	2	7



En utilisant le mode de représentation le plus adapté, préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. L'image de 1 par f est égale à -1.

b. -3 n'a pas d'antécédent par f.

c. 2 admet deux antécédents par f.

d. Le point de coordonnées $\left(\sqrt{2};0\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

e. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en $(-2;0)$.

BONUS

automatismes

Automatismes transversaux

1 Soit $A = 2\sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{3}$. Écrire A sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier relatif.

2 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $-7x + 2 < 0$ **2.** $3(1-x) \geqslant 5x + 1$

3. $\dfrac{x-1}{3} \leqslant -1$ **4.** $\dfrac{2x-1}{2} > \dfrac{x-1}{3}$

3 Développer les expressions suivantes.

1. $(3x+4)^2$ **2.** $(1-6x)^2$ **3.** $(2x-7)(2x+7)$

4 Développer les expressions suivantes.

1. $A(x) = (2x-1)^2 - 4$

2. $B(x) = (x+3)^2 - (2x-1)(-x+2)$

5 Factoriser les expressions suivantes.

1. $25x^2 - 49$ **2.** $x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}$ **3.** $4x^2 + 20x + 25$

6 Factoriser les expressions suivantes.

1. $x^2 - 3x$ **2.** $(3x-1)^2 - 16$

3. $(x-2)(2x+3) - (x-2)(-3x+5)$

7 Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

8 Recopier et compléter les phrases suivantes.

1. Si $U = RI$, alors $R = \ldots$.

2. Si $v = \dfrac{d}{t}$, alors $d = \ldots$ et $t = \ldots$.

3. Si $U = E - RI$, alors $E = \ldots$ et $R = \ldots$.

9 Dans chaque cas, calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

1. $A(-5;3)$ et $B(1;2)$ **2.** $A\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ et $B\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$

10 On considère les points $A(3;-2)$ et $B(1;3)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

2. Déterminer l'équation réduite de la droite d passant par $C(0;-1)$ et parallèle à (AB).

11 **Vrai ou faux ?**

1. La droite d'équation $-2x + 3y - 1 = 0$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

2. L'équation $2x^2 + x = 0$ admet 0 pour unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. $\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right) \in \mathbb{Z}$

4. Si x est un nombre réel strictement positif, l'aire d'un carré de côté $x+2$ est égale à la somme des aires de deux carrés de côtés respectifs x et 2.

5. Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 6x - 9$.

Automatismes préparatoires au chapitre

12 Résoudre les équations suivantes.

1. $-2x + 6 = x - 3$ **2.** $\dfrac{4}{3}x - 1 = x + 5$

3. $(-x+2)(3x+1) = 0$ **4.** $3x^2 + 2x = 0$

13 Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2 + x = 0$ **2.** $3x^2 + 1 = x^2 + 3$

3. $\dfrac{1}{x} = 2$ **4.** $\sqrt{x} = 6$

14 On donne l'expression $A = 2x^2 + 3x - 1$.

Calculer A pour $x = 0$; $x = 2$; $x = -3$; $x = \dfrac{1}{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

15 **Vrai ou faux ?**

On donne un tableau de valeurs d'une fonction f.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	-3	1	3	1	-2

1. L'image de 1 par f est 3.

2. 1 est un antécédent de 2 par f.

3. Le point $A(-2;3)$ appartient à la courbe représentative de f.

4. Il n'existe pas de nombre admettant plusieurs antécédents par f.

16 Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$ représentée par la droite D.

1. Calculer l'image de 1, de -2 et de $\dfrac{2}{3}$ par f.

2. Déterminer les antécédents de 0 et de 3 par f.

3. Le point $A\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à D ?

4. Construire D.

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)(2x-3)$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(-2)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

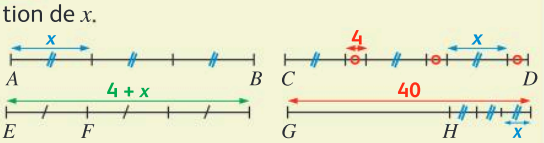
18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$$

Montrer les égalités suivantes.

1. $f(x) = 2(x-2)^2 - 18$ **2.** $f(x) = 2(x-5)(x+1)$

19 Exprimer les longueurs AB, CD, EF et GH en fonction de x.



20 Donner la liste des carrés, puis des cubes de tous les entiers appartenant à l'intervalle $[-4;4]$.

SPECIMEN

activités

1 Associer un nombre à un autre

Objectif
Réactiver la notion de fonction.

On considère les instructions A, B et C suivantes :
A : « soustraire 3 » – B : « élever au carré » – C : « multiplier par 2 »
Dans les questions suivantes, ces instructions vont être appliquées dans un certain ordre et une seule fois chacune à n'importe quel nombre réel x.

1 Soit x un nombre réel. On note $f(x)$ le résultat obtenu en appliquant à x la suite d'instructions B puis C puis A (notée B-C-A).
On définit ainsi la fonction f qui, à chaque valeur du nombre réel x, associe le nombre réel $f(x)$.
a. Vérifier que $f(2)=5$ puis calculer $f(-1)$.
b. Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x)=-3$?
c. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2 On note g, h, i, j et k les fonctions obtenues en suivant respectivement les instructions A-B-C ; A-C-B ; B-A-C ; C-A-B et C-B-A.
Identifier l'expression de chacune des fonctions parmi les expressions suivantes.
a. $(2x-3)^2$ b. $4x^2-3$ c. $2(x-3)^2$ d. $4(x-3)^2$ e. $2(x^2-3)$

3 Pour chacune des fonctions g, h, i, j et k, déterminer :
a. l'image de -1 ; b. le (ou les) antécédent(s) de 0.

Info
La fonction f est le procédé qui permet d'associer à n'importe quel nombre réel x, le nombre $f(x)$ obtenu en appliquant à x les instructions B-C-A.
$f(2)=5$ signifie que par la fonction f :
- 5 est l'image de 2 ;
- 2 est un antécédent de 5.

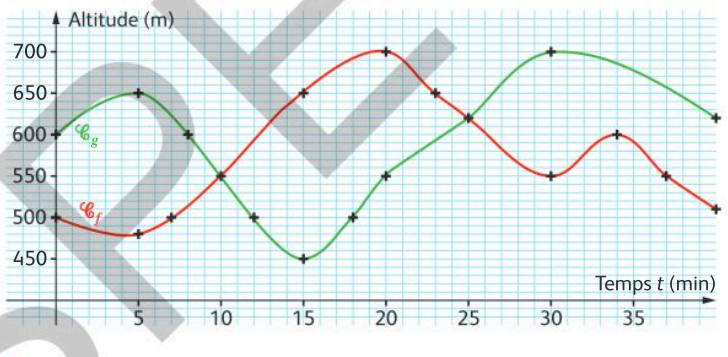
Info
Le terme « fonction » a été introduit par le mathématicien allemand Leibniz en 1673, mais la définition actuelle de fonction comme correspondance entre deux nombres x et y n'a été formalisée qu'en 1837 par le mathématicien Dirichlet.



2 Du langage courant au langage mathématique

Objectif
Résoudre graphiquement des équations et des inéquations.
Passer du registre courant au registre mathématique.

Jérôme et Chan effectuent leur baptême de l'air en deltaplane. Les courbes ci-dessous représentent l'altitude (en mètre) de chacun en fonction du temps. On note $f(t)$ (resp. $g(t)$) l'altitude de Jérôme (resp. de Chan) à l'instant t (exprimé en minute).





1 À chaque question mathématique (en bleu) ci-dessous, associer son interprétation en langage courant (en orange).

Résoudre $g(t)\geqslant 500$	À quel(s) instant(s) Jérôme est-il à 500 m d'altitude ?
Résoudre $f(t)=g(t)$	À quel(s) instant(s) l'altitude de Jérôme est-elle inférieure à celle de Chan ?
Résoudre $f(t)<g(t)$	À quel(s) instant(s) l'altitude de Chan est-elle supérieure ou égale à 500 m ?
Résoudre $f(t)=500$	À quel(s) instant(s) Chan et Jérôme sont-ils à la même altitude ?

2 Résoudre graphiquement les équations et inéquations de la question 1.

SPECIMEN

Cours

1 Fonction, courbe représentative

a Définition et vocabulaire

Définition Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

On appelle **fonction à valeurs réelles** f définie sur D un procédé qui à tout réel x de D associe un unique réel, noté $f(x)$.

D est appelé l'**ensemble de définition** de la fonction f.

Pour un nombre a de D, si $f(a)=b$, on dit que :

- b est l'**image** de a par la fonction f ;
- a est un **antécédent** de b par la fonction f.



Antécédent Fonction Image

Commentaire

Une fonction traduit une relation de dépendance entre une variable (notée x, t, q, N, …) et une autre grandeur (son image), qui peut s'exprimer « en fonction de » cette variable.

Remarques

- L'ensemble de définition D de la fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui admettent une image par f.
- Si f est une fonction définie sur un ensemble D :
  - chaque réel x de D admet une et une seule image
  - chaque réel y peut avoir un ou plusieurs antécédents, ou ne pas avoir d'antécédent.

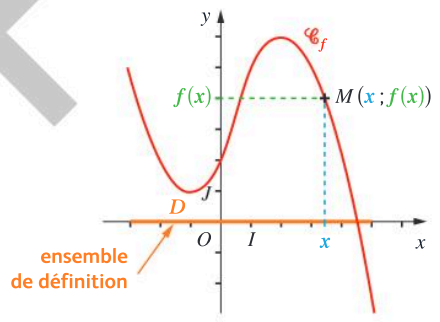
b Représentation graphique d'une fonction

Définition Dans un repère du plan, on appelle **courbe représentative** ou **représentation graphique** de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient :

$$x \in D \text{ et } y=f(x)$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est formée de tous les points dont l'ordonnée est l'image par f de l'abscisse.

La relation $y=f(x)$ est appelée **équation de la courbe** $\mathscr{C}_f$.



Remarque

Un point $M(a\,;b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f si, et seulement si $a \in D$ et $f(a)=b$.

Exemple

L'algorithme suivant définit une fonction f dont l'ensemble de définition est l'intervalle $[-2\,;2]$.

Langage naturel

```
Choisir un réel entre –2 et 2
Élever au carré
Ajouter 3
Renvoyer le résultat
```

On a $f(-2)=(-2)^2+3=7$.
7 est l'image de -2 par f.
-2 est un antécédent de 7 par f.

Pour tout réel $x \in [-2\,;2]$, on a :

$$f(x)=x^2+3$$

Exemple

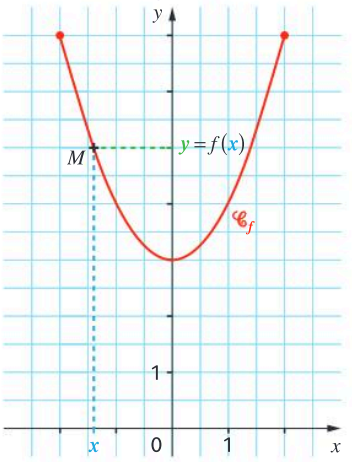
La fonction f définie par l'expression $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ est définie si, et seulement si $x-2\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq 2$. Son ensemble de définition est :
$D_f=]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$, encore noté $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Exemple

Pour tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par $f(x)=x^2+3$, on peut construire un tableau de valeurs (ici avec un pas de 1).

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	7	4	3	4	7

Le point $(-2\,;7)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
Le point $(-1\,;4)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
…
Représentation graphique de f :



SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe

Énoncé On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;4]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - x - 3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Le point $A(-2;1)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$? et le point $B(3{,}1;-1{,}3)$?

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des ordonnées.

3. Montrer que les points E et F de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives -1 et 3 ont la même ordonnée.

4. Déterminer les coordonnées des points G et H de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est -3.

5. À l'aide de la calculatrice, donner le tableau de valeurs de f sur $[-3;4]$ avec un pas de 0,5 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Solution rédigée

1. • $f(-2) = 0{,}5\times(-2)^2 - (-2) - 3 = 1$. Donc $A(-2;1) \in \mathscr{C}_f$.

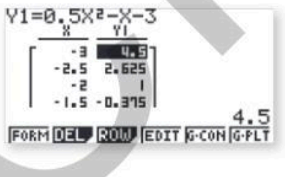
• $f(3{,}1) = 0{,}5\times 3{,}1^2 - 3{,}1 - 3 = -1{,}295$. Or $f(3{,}1) \neq -1{,}3$, donc $B \notin \mathscr{C}_f$.

2. L'ordonnée du point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}_f$ est $f(0) = -3$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point $D(0;-3)$.

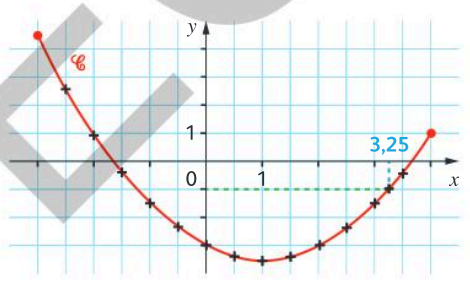
3. L'ordonnée du point E d'abscisse -1 de $\mathscr{C}_f$ est $f(-1)$ et celle du point F d'abscisse 3 est $f(3)$.
$f(-1) = 0{,}5\times(-1)^2 - (-1) - 3 = 0{,}5 + 1 - 3 = -1{,}5$
$f(3) = 0{,}5\times 3^2 - 3 - 3 = 4{,}5 - 6 = -1{,}5$. Ainsi $f(-1) = f(3)$.
On a donc $E(-1;-1{,}5)$ et $F(3;-1{,}5)$. E et F ont la même ordonnée.

4. Les abscisses de G et H sont solutions de l'équation $f(x) = -3$.
$f(x) = -3 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0{,}5x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$
On obtient donc $G(0;-3)$ et $H(2;-3)$.

5. On entre en Y1 l'expression $f(x)$.
Puis on tabule la fonction sur $[-3;4]$ avec un pas de 0,5. Cela permet d'obtenir les coordonnées (X ; Y1) de quelques points de $\mathscr{C}$.



On relie ces points « à la main » (surtout pas à la règle, car la fonction f n'est pas une fonction affine).



Point méthode

1. Pour vérifier si $M(a;b)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$:
• on vérifie si a appartient à l'ensemble de définition de f
• on calcule $f(a)$
- si $f(a) = b$, alors $M \in \mathscr{C}_f$
- si $f(a) \neq b$, alors $M \notin \mathscr{C}_f$

Point méthode

2., **3.** et **4.** Tout point de la courbe $\mathscr{C}_f$ a des coordonnées de la forme $(a;f(a))$, où a appartient à l'ensemble de définition de f.

Point méthode

5. Pour réaliser un tableau de valeurs à la calculatrice :
① on saisit la fonction
② on paramètre le balayage



Voir pages Calculatrices

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 388 Voir exercices similaires nos 39 à 43

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Le point $A(-2;5)$ appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier.

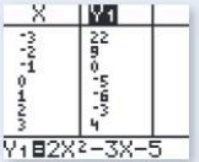
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

3. Calculer l'ordonnée du point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$.

4. Déterminer les abscisses des points d'ordonnée -3 de $\mathscr{C}$.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ à la calculatrice et vérifier les résultats précédents.

22 On a tabulé ci-contre une fonction f à la calculatrice.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1. Quelle est l'expression de $f(x)$?

2. Quel point d'abscisse 0 appartient à la courbe $\mathscr{C}$?

3. Quel point d'ordonnée -3 appartient à la courbe $\mathscr{C}$?

4. Le point $(4;3)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}$?

5. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée -5.

SPÉCIMEN

Cours

2 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

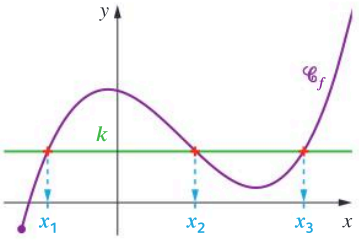
On considère deux fonctions f et g définies sur un même ensemble D.
On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques.
k est un nombre réel quelconque.

a Équations du type $f(x)=k$ ou $f(x)=g(x)$

• Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=k$, c'est déterminer, si elles existent, les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y=k$.

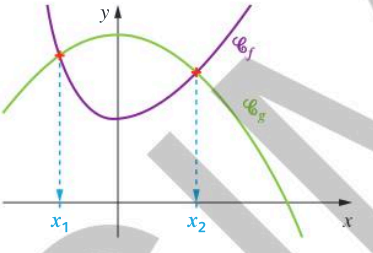
• Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$, c'est déterminer, si elles existent, les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Équation $f(x)=k$



On cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y=k$. Il s'agit ici de x_1, x_2 et x_3.
On note $S=\{x_1\,;x_2\,;x_3\}$.

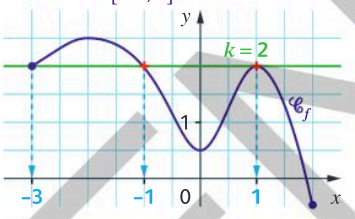
Équation $f(x)=g(x)$



On cherche les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Il s'agit ici de x_1 et x_2.
On note $S=\{x_1\,;x_2\}$.

Exemple

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;2]$.



• On souhaite résoudre graphiquement l'équation :
$f(x)=2$
On trace la droite d'équation $y=2$ qui coupe $\mathscr{C}_f$ en trois points d'abscisses -3, -1 et 1. Donc $S=\{-3\,;-1\,;1\}$.

• L'équation $f(x)=3$ n'a pas de solution car la droite d'équation $y=3$ ne coupe pas la courbe. On note : $S=\varnothing$.

Remarque

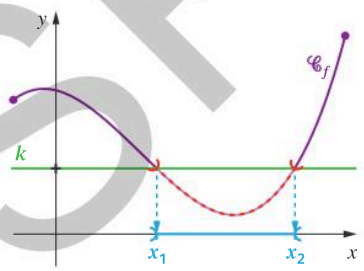
Les résolutions graphiques dépendent de la précision du tracé des courbes. Souvent, on obtient seulement des valeurs approchées des solutions.

b Inéquations du type $f(x)<k$ ou $f(x)\leqslant g(x)$

• Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<k$, c'est déterminer, si elles existent, les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (strictement) de la droite d'équation $y=k$.

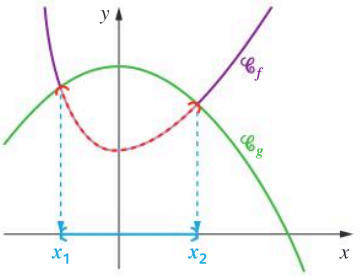
• Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$, c'est déterminer, si elles existent, les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Inéquation $f(x)<k$



On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (strictement) de la droite d'équation $y=k$. Ici :
$S=]x_1\,;x_2[$

Inéquation $f(x)\leqslant g(x)$

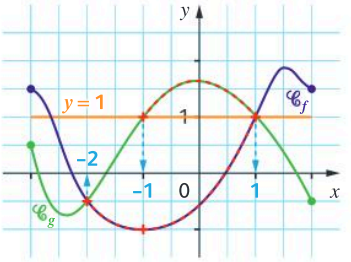


On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$. Ici :
$S=[x\,;x_2]$

On résout de même les inéquations du type $f(x)\geqslant k$ ou $f(x)>g(x)$.

Exemple

On a représenté ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;2]$.



• Les solutions de l'inéquation $g(x)>1$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ situés au-dessus (strictement) de la droite d'équation $y=1$.
$S=]-1\,;1[$

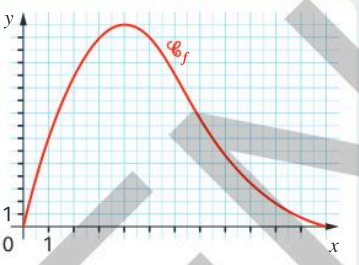
• Les solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.
$S=[-2\,;1]$

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=k$, une inéquation du type $f(x)<k$

Énoncé Des tests ont été réalisés sur un médicament. La courbe tracée ci-contre représente la fonction f qui modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient (en milligramme) en fonction du temps t (en heure) écoulé après la prise du médicament.



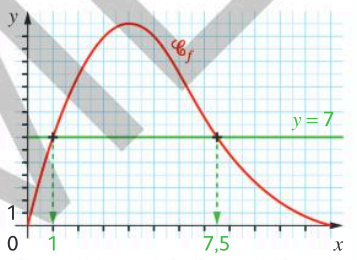
1. Avec la précision permise par le graphique, résoudre graphiquement l'équation et l'inéquation suivantes. Interpréter les solutions dans le contexte de l'exercice.

a. $f(t)=7$ **b.** $f(t)<12$

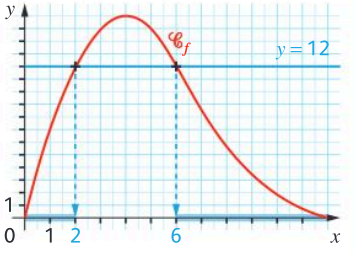
2. On considère que le médicament est actif lorsque la quantité de médicament présente dans le sang est d'au moins 4 mg. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

Solution rédigée

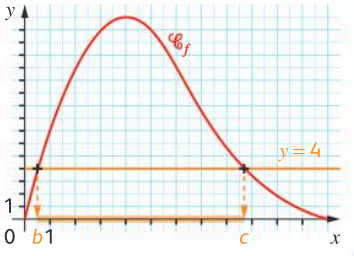
1. a. Les solutions de l'équation $f(t)=7$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y=7$.
Cette droite coupe la courbe en deux points d'abscisses 1 et 7,5.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(t)=7$ est $S=\{1;7,5\}$.
La quantité de médicament présente dans le sang est de 7 mg au bout de 1 h et au bout de 7,5 h après la prise du médicament.



b. Les solutions de l'inéquation $f(t)<12$ sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous (strictement) de la droite d'équation $y=12$. La droite coupe la courbe aux points d'abscisses 2 et 6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t)<12$ est la réunion de deux intervalles. On a $S=[0;2[\cup]6;12]$.
La quantité de médicament est strictement inférieure à 12 mg entre 0 h et 2 h ou entre 6 h et 12 h après la prise.



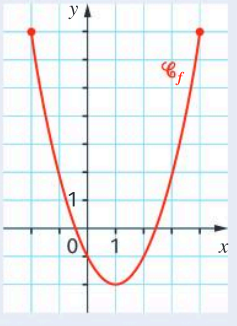
2. On résout graphiquement l'inéquation $f(t)\geqslant 4$.
Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite d'équation $y=4$. La droite coupe la courbe en deux points d'abscisses $b\approx 0,5$ et $c\approx 9$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $S=[b;c]$.
Le médicament est donc actif pendant $c-b\approx$ 8 h 30 min.



J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 389 Voir exercices similaires nos 52 à 57

23 Soit f la fonction définie sur $[-2;4]$ représentée ci-contre.



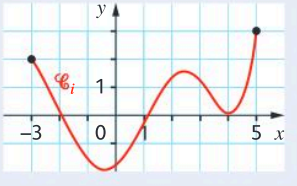
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x)=2$
2. $f(x)=-2$
3. $f(x)>-1$
4. $f(x)\leqslant 2$

24 Soit i la fonction définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par la courbe ci-après.

1. Déterminer le nombre de solutions de $i(x)=1$.
2. On considère un nombre réel k.
Donner une valeur possible de k pour que l'équation $i(x)=k$ admette :

a. une solution
b. aucune solution
c. deux solutions
d. quatre solutions



SPECIMEN

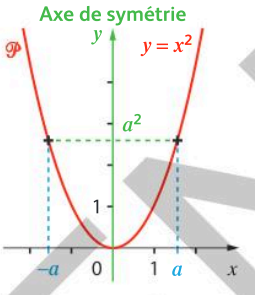
Cours

3 Fonctions de référence

a Fonction carré

Définition La **fonction carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2$.

Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une **parabole** $\mathscr{P}$ de sommet l'origine du repère.



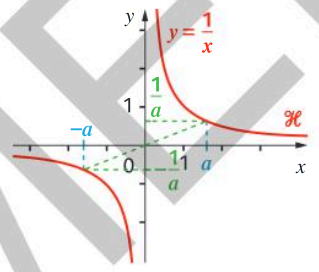
Remarque

Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$. La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$.
La parabole $\mathscr{P}$ est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

b Fonction inverse

Définition La **fonction inverse** est définie sur la réunion d'intervalles $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$, noté $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$, par : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une **hyperbole** $\mathscr{H}$ qui admet l'origine du repère pour centre.

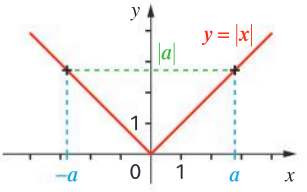


Remarque

Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x} > 0$ et pour tout réel $x < 0$, on a $\dfrac{1}{x} < 0$.
L'hyperbole $\mathscr{H}$ est donc en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et au-dessus sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c Fonction valeur absolue

Définition La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$, avec : pour tout réel $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et pour tout réel $x \leqslant 0$, $|x| = -x$.

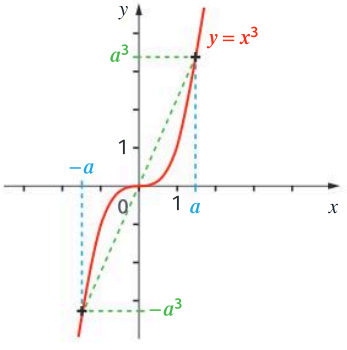


Remarques

- Pour tout réel x, on a $|x| \geqslant 0$. La fonction valeur absolue est positive sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est donc au-dessus de l'axe des abscisses.
- La courbe de la fonction valeur absolue est la réunion de deux demi-droites d'équations : $y = x$ sur $[0 ; +\infty[$ et $y = -x$ sur $]-\infty ; 0]$.

d Fonction cube

Définition La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^3$.

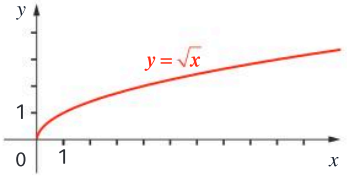


Remarque

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $x^3 \geqslant 0$ et pour tout réel $x \leqslant 0$, on a $x^3 \leqslant 0$.
La courbe de la fonction cube est donc en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et au-dessus sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

e Fonction racine carrée

Définition La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.



Remarque

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} \geqslant 0$. La fonction racine carrée est positive sur $[0 ; +\infty[$.
Sa courbe représentative est donc au-dessus de l'axe des abscisses.

SPECIMEN

méthode

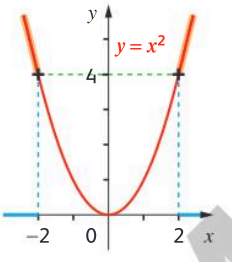
CAPACITÉ 3 Résoudre une équation, une inéquation à l'aide des fonctions de référence

Énoncé Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $4x^2+3=19$ **2.** $3x^2 \geqslant 12$ **3.** $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ **4.** $3|x|+1=7$ **5.** $|x|>2$

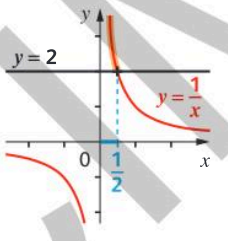
Solution rédigée

1. On a : $4x^2+3=19 \Leftrightarrow 4x^2=16$.
C'est-à-dire $x^2=4$. Comme $4>0$, les solutions sont $\sqrt{4}$ et $-\sqrt{4}$, c'est-à-dire 2 et -2.
On peut vérifier graphiquement le résultat obtenu.
On écrit $S=\{-2;2\}$.



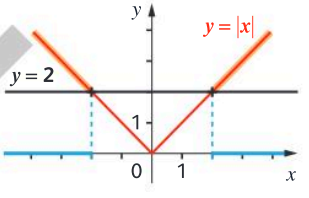
2. On a $3x^2 \geqslant 12 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 4$.
Les points $(x;x^2)$ de la parabole vérifiant $x^2 \geqslant 4$ ont une ordonnée supérieure à 4 : ils sont situés au-dessus de la droite d'équation $y=4$.
Leurs abscisses x vérifient $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$.
On écrit $S=]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

3. Les points $\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$ de l'hyperbole vérifiant $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ sont situés au-dessus de la droite d'équation $y=2$.
Leurs abscisses x vérifient $0<x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
On écrit $S=\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.



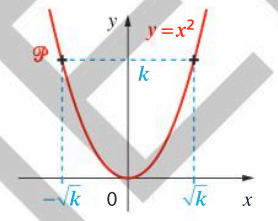
4. $3|x|+1=7 \Leftrightarrow 3|x|=6 \Leftrightarrow |x|=2$. Comme $2>0$, les solutions sont -2 et 2. On peut vérifier graphiquement le résultat obtenu.
On écrit $S=\{-2;2\}$.

5. Les points $(x;|x|)$ de la courbe de la fonction valeur absolue vérifiant $|x|>2$ sont situés strictement au-dessus de la droite d'équation $y=2$.
Leurs abscisses vérifient $x<-2$ ou $x>2$.
On écrit $S=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.



Point méthode

1. Pour tout réel $k>0$, l'équation $x^2=k$ admet deux solutions : $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$.



Point méthode

3. Pour résoudre une équation ou une inéquation avec un inverse, on utilise le fait que l'inverse de k est $\dfrac{1}{k}$ et on s'aide de la courbe représentative de la fonction inverse.

Point méthode

4. Pour tout réel $k>0$, l'équation $|x|=k$ admet deux solutions : $-k$ et k.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 389 Voir exercices similaires nos 61 à 63

25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
1. $x^2=3$ **2.** $x^2+25=14$
3. $\dfrac{1}{3}(x^2+3)=1$ **4.** $3x^2=12$
5. $2|x|+3=1$ **6.** $3|x|-1=2$

26 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
1. $x^2 \leqslant 81$ **2.** $3x^2+75<0$
3. $2x^2-18 \geqslant 0$ **4.** $9x^2>1$
5. $|x| \leqslant 5$ **6.** $2|x|+1>4$

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
1. $\dfrac{1}{x}=3$ **2.** $\dfrac{1}{x}<-2$ **3.** $\dfrac{1}{x} \leqslant 10$

28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
1. $x^3=8$ **2.** $x^3>64$ **3.** $x^3 \leqslant 0{,}001$

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
1. $\sqrt{x}>10$ **2.** $\sqrt{x} \leqslant 4$ **3.** $\sqrt{x}<5$

SPÉCIMEN

Méthode

CAPACITÉ 4 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=g(x)$, une inéquation du type $f(x)>g(x)$

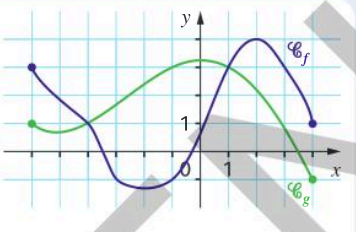
Énoncé

1. On a représenté ci-contre deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-6\,;4]$. Résoudre graphiquement :

a. l'équation $f(x)=g(x)$; **b.** l'inéquation $f(x)>g(x)$.

2. Résoudre graphiquement :

a. l'équation $x^2=x+2$; **b.** l'inéquation $x^2\leqslant x+2$.



Solution rédigée

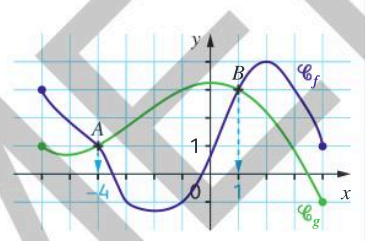
1. a. Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

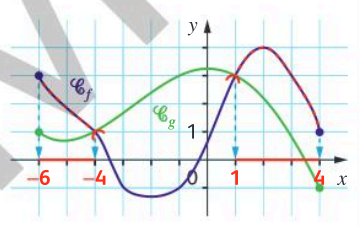
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection A et B d'abscisses respectives -4 et 1.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ est $S=\{-4\,;1\}$.

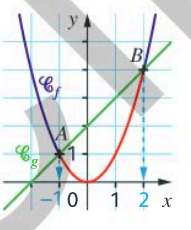
b. Pour résoudre l'inéquation $f(x)>g(x)$, on lit les abscisses de tous les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus (strictement) de $\mathscr{C}_g$.

L'ensemble des solutions de cette inéquation est la réunion de deux intervalles. On a $S=[-6\,;-4[\cup]1\,;4]$ (les valeurs -4 et 1 sont exclues de l'ensemble S des solutions puisque l'inégalité est stricte).





2. Sur un graphique, on représente les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x+2$.



a. Les solutions de l'équation $x^2=x+2$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection A et B d'abscisses respectives -1 et 2.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2=x+2$ est $S=\{-1\,;2\}$.

b. Les solutions de l'inéquation $x^2\leqslant x+2$ sont les abscisses de tous les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Il s'agit de tous les nombres réels compris entre -1 et 2.

L'ensemble des solutions est $S=[-1\,;2]$.

Point méthode

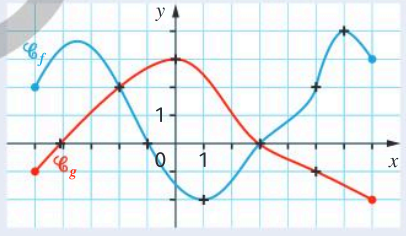
2. • f est la fonction carré, représentée par la parabole d'équation $y=x^2$.

• g est une fonction affine représentée par une droite. Pour tracer cette droite on peut calculer les coordonnées de deux points ou utiliser son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 389 Voir exercices similaires nos 65 à 67

30 On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions f et g.



1. Donner l'ensemble de définition de f et g.

2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a. $f(x)=g(x)$ **b.** $g(x)>f(x)$ **c.** $f(x)\geqslant g(x)$

31 Résoudre graphiquement :

1. l'équation $x^2=-2x+3$;

2. l'inéquation $x^2\geqslant -2x+3$.

32 Résoudre graphiquement :

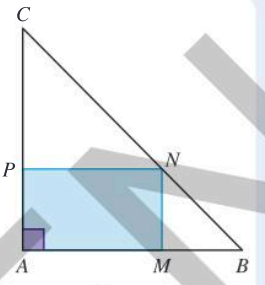
1. l'équation $x^3=2-x$;

2. l'inéquation $x^3<2-x$.

SPECIMEN

CAPACITÉ 5 Modéliser une situation par une fonction

Énoncé ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB = AC = 4$ cm. M est un point variable du segment $[AB]$, N et P sont les points des segments $[BC]$ et $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle. On pose $AM = x$.



Soit f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du rectangle $AMNP$.

1. Donner l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. Montrer que $MN = 4 - x$. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) = 4 - (x-2)^2$.

4. Dans chaque cas, déterminer si possible, la (ou les) position(s) du point M telle(s) que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale à :

a. 3 cm² **b.** 5 cm² **c.** la moitié de l'aire du triangle ABC.

Solution rédigée

1. $M \in [AB]$ avec $AB = 4$, donc $x \in [0;4]$: $D = [0;4]$.

2. • Les droites (MN) et (AC) sont parallèles. Les triangles BMN et BAC forment une configuration de Thalès. On a donc :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}, \text{ soit } \frac{4-x}{4} = \frac{MN}{4}, \text{ ainsi } MN = 4 - x$$

• L'aire du rectangle $AMNP$ est : $f(x) = AM \times MN = x(4-x)$, soit, en développant $f(x) = -x^2 + 4x$.

3. Pour montrer l'égalité, on développe l'expression $4-(x-2)^2$.

$4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = 4-x^2+4x-4 = -x^2+4x$

On retrouve l'expression de $f(x)$, donc $f(x) = 4-(x-2)^2$.

4. a. On résout l'équation $f(x) = 3$, équivalente à $4-(x-2)^2 = 3$, soit $(x-2)^2 = 1$ et donc $x-2 = 1$ ou $x-2 = -1$, ce qui donne : $x = 3$ ou $x = 1$.

L'aire de $AMNP$ est égale à 3 cm² lorsque $AM = 1$ cm ou $AM = 3$ cm.

b. On résout l'équation $f(x) = 5$, équivalente à : $4-(x-2)^2 = 5$ soit : $(x-2)^2 = -1$. Or $(x-2)^2 \geqslant 0$ et $-1 < 0$, donc cette équation n'a pas de solution.

Il n'est pas possible que l'aire du rectangle $AMNP$ soit égale à 5 cm².

c. L'aire du triangle ABC est : $\frac{4 \times 4}{2} = 8$. On résout l'équation $f(x) = 4$.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow 4-(x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

L'aire de $AMNP$ est égale à 4 cm² lorsque $AM = 2$ cm.

Point méthode

3. Pour montrer une égalité, on peut :
- transformer l'un des membres de l'égalité pour obtenir l'autre ;
- transformer séparément chaque membre de l'égalité pour obtenir une expression commune ;
- montrer que la différence des deux membres est nulle.

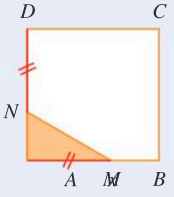
Point méthode

4. L'équation $X^2 = a$ admet :
- deux solutions si $a > 0$ qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;
- 0 pour unique solution si $a = 0$;
- aucune solution si $a < 0$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 389 Voir exercices similaires nos 68 et 69

33 $ABCD$ est un carré de côté 10. M est un point variable sur le segment $[AB]$. Le point N appartient au segment $[AD]$ et vérifie $AM = ND$. On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle AMN.



1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$.

3. a. Tabuler la fonction f à la calculatrice sur $[0;10]$ avec un pas de 0,1.

b. Conjecturer les positions du point M pour que l'aire du triangle AMN soit égale à 8.

4. a. Montrer que :

$$f(x) - 8 = -\frac{1}{2}(x-2)(x-8)$$

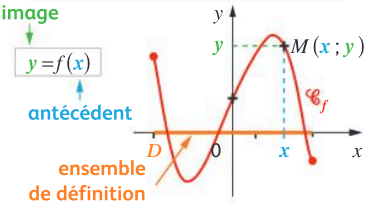
b. Démontrer le résultat conjecturé à la question **3.b.**

SPECIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

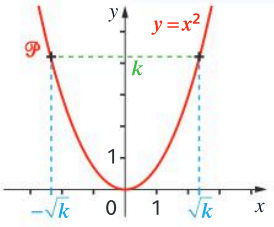
Courbe représentative



Fonctions de référence

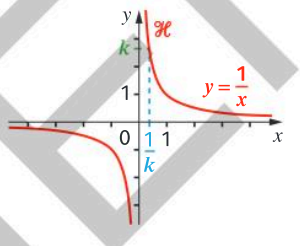
Fonction carré

Définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.



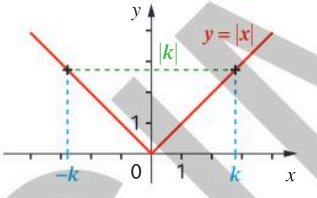
Fonction inverse

Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.



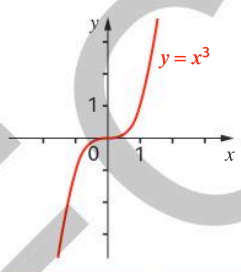
Fonction valeur absolue

Définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, avec : $|x| = x$ si $x \geqslant 0$
$|x| = -x$ si $x \leqslant 0$



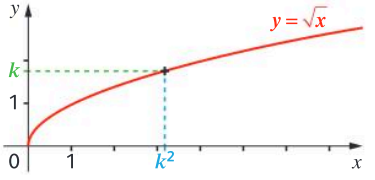
Fonction cube

Définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.



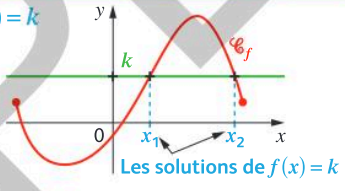
Fonction racine carrée

Définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.

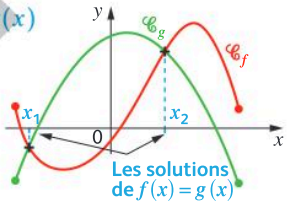


Résolution graphique d'une équation

Équation $f(x) = k$

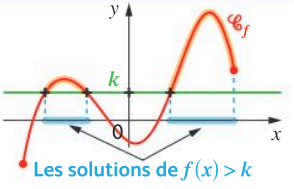


Équation $f(x) = g(x)$

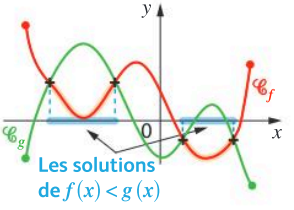


Résolution graphique d'une inéquation

Inéquation $f(x) > k$



Inéquation $f(x) < g(x)$





Je m'exerce à démontrer

Sur $[1;+\infty[$, la courbe d'équation $y = x^2$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2066

SPÉCIMEN

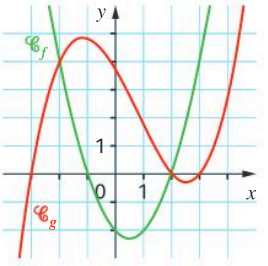
J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2067

Voir corrigés p. 389

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).
On a représenté ci-contre deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



	a	b	c
1. $f(1)$ est égale à :	0	-2	2
2. L'équation $f(x)=0$ admet pour solution :	-2	-1	2
3. L'équation $g(x)=2$ admet :	une solution	deux solutions	trois solutions
4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>4$ est :	$]-3;3[$	$]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$	$]-\infty;-2]\cup[3;+\infty[$
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)\leqslant 0$ est :	$[-1;2]$	$[2;3]$	$]-\infty;-3]\cup[2;3]$
6. L'équation $f(x)=g(x)$ admet pour solution :	-2	4	2
7. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ est :	$]-\infty;-2]$	$[-2;2]$	$[2;+\infty[$
8. $A(4;3)\in\mathscr{C}_g$ signifie que :	l'image de 4 est 3 par g	$g(3)=4$	$g(4)=3$
9. Si $x\in[-1;2]$ alors :	$f(x)\geqslant 0$	$f(x)<0$	$f(x)\leqslant 0$
10. Si $x\in]-2;2[$ alors :	$f(x)\leqslant g(x)$	$f(x)<g(x)$	$f(x)>g(x)$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. L'image de $\sqrt{3}$ est 5.

2. Le point $A\left(\frac{1}{3};\frac{-8}{9}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

3. $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Un nombre réel et son opposé ont la même image par f.

5. Pour tout réel x, $f(x)\geqslant -1$.

Partie B.

1. L'inverse de 3 est -3.

2. Le cube de 2 est 6.

3. Les carrés de deux réels opposés sont opposés.

4. Les inverses de deux réels opposés non nuls sont opposés.

5. La valeur absolue de $\pi-3$ est $\pi-3$.

6. Le carré de l'inverse d'un réel non nul est égal à l'inverse du carré de ce réel.

7. Les valeurs absolues de deux réels opposés sont opposées.

SPECIMEN

exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2068

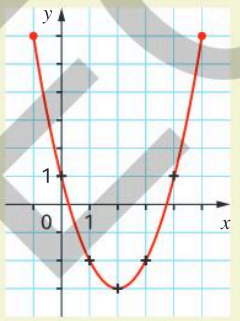
Acquérir des automatismes

34 Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Traduire les informations suivantes par une égalité de la forme $f(\ldots)=\ldots$.
1. L'image de 5 par f est 2.
2. Un antécédent de -3 par f est 4.
3. Le point $A(6;-1)$ appartient à $\mathscr{C}$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en 8.
5. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en 3.

35 f est une fonction telle que $f(4)=-3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Recopier et compléter les phrases suivantes.
1. Un antécédent de … par f est….
2. L'image de … par f est ….
3. $A(\ldots;\ldots)\in\mathscr{C}$.
4. Le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse … a pour ordonnée ….

36 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=3x-5$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Calculer l'image de 8 par f.
2. Le point $A(-2;11)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
3. Déterminer l'antécédent de 24 par f.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées.

37 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente une fonction f.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'image de -1 par f puis celle de 2.
3. Déterminer les antécédents de -2 par f.
4. Résoudre graphiquement :
a. l'équation $f(x)=1$;
b. l'inéquation $f(x)>1$.



38 **Vrai ou faux ?**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=3x^2-1$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant.
1. L'image de -1 par f est -4.
2. -1 a pour antécédent 0 par la fonction f.
3. Le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\sqrt{2}$ a pour ordonnée 5.
4. L'équation $f(x)=8$ admet deux solutions.
5. $\mathscr{C}$ passe par le point $A(1;-2)$.
6. $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ont la même image par f.

Travailler les capacités du chapitre

Exploiter l'équation $y=f(x)$ d'une courbe

Voir p. 195

39 Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y=f(x)$. Le point $A(7;-6)$ appartient à $\mathscr{C}$.
Recopier et compléter les phrases suivantes.
1. $f(\ldots)=\ldots$. 2. L'image de … par f est ….
3. Un antécédent de … par f est ….

40 $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
Les trois formulations suivantes donnent la même information :
• l'image de 0 est 3 • $f(0)=3$ • $M(0;3)\in\mathscr{C}_f$.
Dans chaque cas ci-dessous, énoncer les deux formulations correspondant à celle qui est rédigée.
1. L'image de 1 est 5 2. $A(2;4)\in\mathscr{C}_f$
3. 0 est un antécédent de 12 4. $f(-2)=6$
5. Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 a pour ordonnée 15.

41 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=15x-x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Calculer $f(3)$. En déduire les coordonnées d'un point appartenant à $\mathscr{C}$.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Indiquer si les points $A(-1;16)$ et $B\left(\sqrt{2};19{,}2\right)$ appartiennent à $\mathscr{C}$. Justifier.
4. Résoudre l'équation $f(x)=0$. Interpréter graphiquement les solutions.

42 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x-3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Justifier que le point $A(-2;5)$ appartient à $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
3. Calculer l'ordonnée du point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée -3.

43 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Dans chaque cas, déterminer si possible :
1. l'ordonnée du point d'abscisse -1 de $\mathscr{C}$;
2. l'ordonnée du point d'abscisse $2\sqrt{3}$ de $\mathscr{C}$;
3. l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées ;
4. l'abscisse du point d'ordonnée 4 de $\mathscr{C}$;
5. l'abscisse du point d'ordonnée 5 de $\mathscr{C}$;
6. les abscisses des points d'ordonnée 2 de $\mathscr{C}$;
7. les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

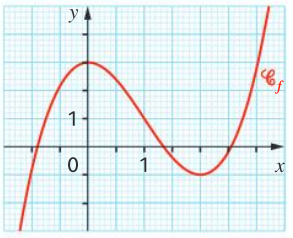
SPECIMEN

44 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Dans chaque cas, déterminer le nombre réel t tel que le point A appartienne à la courbe $\mathscr{C}$.

1. $A(-1;t)$ **2.** $A\left(\dfrac{3}{4};t\right)$ **3.** $A(t;-1)$ **4.** $A\left(t;\dfrac{2}{3}\right)$

45 On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Avec la précision permise du graphique, répondre aux questions suivantes.

a. Quelles sont les images de 0 ; 1 et 2 par f ?

b. Lire les antécédents de 3 ; –1 et 1 par f.

2. On suppose que $f(x)=x^3-3x^2+3$.

Les réponses obtenues à la question **1.** sont-elles exactes ? Justifier par des calculs.

46 ALGO

On considère la fonction f définie par l'algorithme ci-contre.

Langage naturel

Choisir un réel entre –3 et 3
Multiplier par 2
Élever au carré
Soustraire 1
Renvoyer le résultat

1. Après avoir précisé l'ensemble de définition de f, déterminer l'expression $f(x)$ en fonction de x.

2. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à la courbe représentative de f ?

a. $(-1;-5)$ **b.** $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ **c.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}\right)$ **d.** $\left(\sqrt{2};7\right)$

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

Pour les exercices **47** *à* **49**, *indiquer si les points A et B appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f. Justifier.*

47 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x$.

1. $A(-2;0)$

2. $B(3;-3)$

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2069



48 La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{2x+3}$.

1. $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ **2.** $B\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$

49 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2$.

1. $A\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{15}{8}\right)$ **2.** $B(-2;0)$

50 Vrai ou faux ?

On considère les fonctions f et g de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2-3x+1$ et $g(x)=x-2$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(-2;3)$

2. $\mathscr{C}_g$ est la droite d'équation $y=x-2$.

3. L'image de –1 par f est égale à –3.

4. –5 est un antécédent de –3 par g.

5. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 1 et 3.

51 PYTHON

On a programmé en langage Python la fonction g ci-contre dans laquelle x est un nombre réel. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère.

```
def g(x):
    y=-2*(x-4)**2
    return y
```

1. Que renvoie l'instruction `g(0)` ?

2. Quelle est l'image de 7 par g ?

3. Déterminer les éventuels antécédents par g de :

a. 0 **b.** –32 **c.** 8

4. Utiliser les résultats précédents pour donner les coordonnées de points appartenant à $\mathscr{C}$.

Info Python

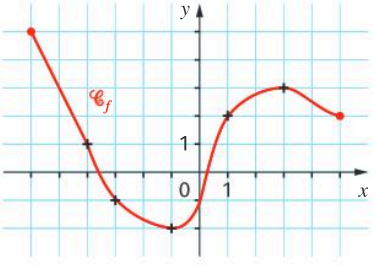
« x**2 » signifie « x^2 » en langage Python.

CAPACITÉ 2 **Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=k$, une inéquation du type $f(x)<k$**

Voir p. 197

52 Vrai ou faux ? Compétence Communiquer

On considère la fonction f définie sur $[-6;5]$ par sa courbe représentative ci-dessous.



Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, l'une positive et l'autre négative.

2. L'équation $f(x)=2$ a deux solutions : 1 et 5.

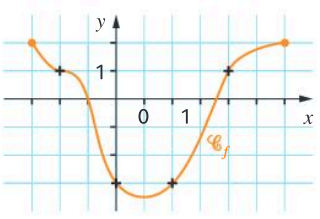
3. L'inéquation $f(x)>-1$ admet pour ensemble solution $]-3;-1[$.

4. L'inéquation $f(x)\geqslant 3$ admet pour ensemble solution $[-6;-5]$.

SPECIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2068

53 On a représenté graphiquement une fonction f définie sur $[-3;6]$.



1. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

a. $f(x)=1$ **b.** $f(x)=2$ **c.** $f(x)=-3$

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

a. $f(x)<-3$ **b.** $f(x)\geqslant 1$

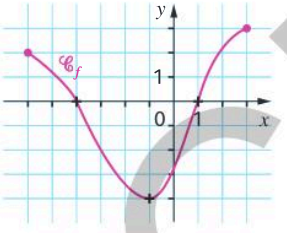
3. Donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=-1$. Donner un encadrement à l'unité de chaque solution.

4. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3,5.

a. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

b. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f(x)$.

54 La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;3]$.



1. Résoudre graphiquement :

a. l'équation $f(x)=0$;

b. l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

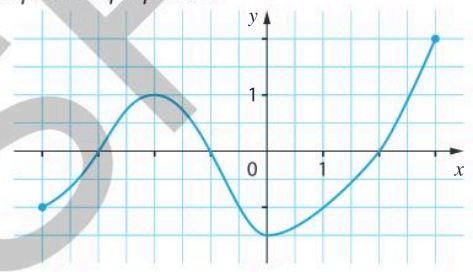
2. Dans chaque cas, donner une valeur du nombre réel k tel que l'équation $f(x)=k$ admette :

a. une unique solution ; **b.** aucune solution ;

c. deux solutions strictement négatives.

3. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=k$.

Pour les exercices **55** *à* **57**, *on donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;3]$. Résoudre graphiquement les équations et inéquations proposées.*



55 **a.** $f(x)=1$ **b.** $f(x)\leqslant 1$

56 **a.** $f(x)=0$ **b.** $f(x)>0$

57 **a.** $f(x)=-1$ **b.** $f(x)\leqslant -1$

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2070



58 Soit f la fonction définie sur $[-3;2]$ par :

$$f(x)=x^3-2x+3$$

À l'aide de la calculatrice donner des valeurs approchées des solutions des équations :

1. $f(x)=-2$ **2.** $f(x)=0$ **3.** $f(x)=3$

CAPACITÉ 3 Résoudre une équation, une inéquation à l'aide des fonctions de référence

Voir p. 199

59 **Vrai ou faux ?** Compétence Raisonner

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. Le point $A(-4;-16)$ appartient à la parabole représentant la fonction carré.

2. L'équation $x^2=k$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{R}$.

3. Le point $B\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-1\right)$ appartient à la courbe de la fonction valeur absolue.

4. L'inéquation $|x|\leqslant 1$ admet pour ensemble de solutions l'intervalle $[0;1]$.

60 **1.** Quelles sont les images par la fonction inverse de -2 ; $\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{4}$?

2. Quels sont les antécédents par la fonction inverse de 10^{-6} ; $\frac{5}{3}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$?

61 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=5$ **2.** $x^2=\frac{4}{9}$

3. $x^2-\frac{1}{4}=0$ **4.** $x^2+3=2$

5. $5x^2=125$ **6.** $3x^2=\frac{1}{3}$

On s'aidera d'un schéma représentant la courbe de la fonction carré pour guider la résolution.

62 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x^2+11<7$ **2.** $3x^2-1\leqslant 11$

3. $\frac{1}{2}x^2+2>4$ **4.** $\frac{1}{7}x^2-2\geqslant -2$

63 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x}=16$ **2.** $4\sqrt{x}+3=0$ **3.** $2\sqrt{x}<18$

4. $|x|=8$ **5.** $4|x|+3\leqslant 7$ **6.** $2|x|>18$

64 **1.** Un carré a une aire de 20 cm^2.
Quelle est la longueur de son côté ?

2. Un carré a une aire au plus égale à 25 cm^2.
Quelles sont les longueurs possibles de son côté ?

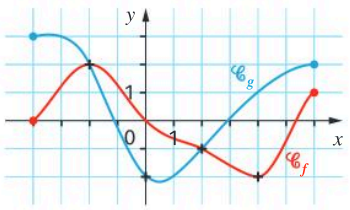
3. Un cube a un volume de 1 728 cm^3.
Quelle est la longueur de son arête ?

SPECIMEN

Capacité 4 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=g(x)$, une inéquation du type $f(x)<g(x)$

Voir p. 200

65 On a représenté graphiquement dans un repère deux fonctions f et g définies sur $[-4;6]$.



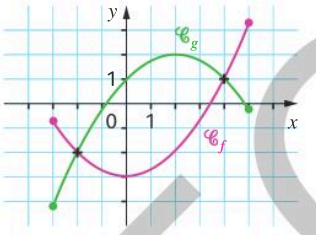
1. Est-il vrai que $f(4)$ est égal à $g(0)$? Justifier.
2. Pour chacun des nombres suivants, indiquer s'il est solution de l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$. Justifier.

a. 3 **b.** -2 **c.** $\frac{3}{2}$

3. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

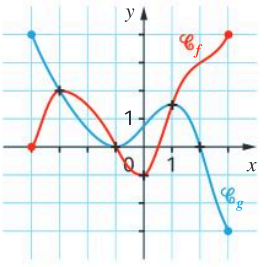
a. $f(x)=g(x)$ **b.** $f(x)<g(x)$ **c.** $f(x)\geqslant g(x)$

66 On a représenté graphiquement dans un repère les courbes de deux fonctions f et g.



1. Quel est l'ensemble de définition des fonctions f et g ?
2. Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle vraie ou fausse. Justifier.
a. Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont -2 et 1.
b. L'inéquation $f(x)>g(x)$ a pour ensemble solution $S=]-1{,}5;-1[\cup]2;2{,}5[$.
c. L'équation $f(x)=1$ a pour ensemble solution $S=\{0;2\}$.
d. L'inéquation $g(x)\leqslant -2$ a pour ensemble solution $S=\{-1;1\}$.

67 On a tracé les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-4;3]$.



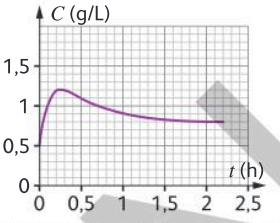
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x)=g(x)$ **2.** $g(x)<f(x)$
3. $g(x)=0$ **4.** $g(x)\geqslant 0$

Capacité 5 Modéliser une situation par une fonction

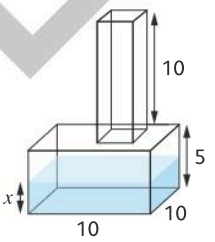
Voir p. 201

68 La courbe ci-contre représente la fonction C qui modélise l'évolution du taux de glycémie d'un patient (concentration de glucose dans le sang en fonction du temps t).



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction C.
2. Quelle est l'image de 0,5 par C ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 1 par la fonction C. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $C(t)>1$. Interpréter ce résultat pour le patient.

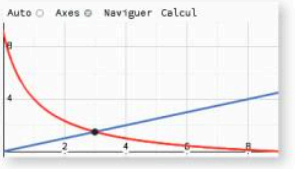
69 On remplit d'eau un récipient formé de deux pavés droits à base carrée (l'un de côté 10 cm, l'autre de côté 5 cm).



1. Exprimer le volume de liquide en fonction de la hauteur x d'eau.
2. On souhaite remplir le récipient à la moitié de sa contenance maximale. Déterminer quelle sera la hauteur d'eau dans le récipient.
3. Même question dans le cas où on souhaite remplir le récipient aux trois quarts.

70 Avant de commercialiser un casque audio, une étude de marché est réalisée. On note x le prix d'un casque audio, en dizaines d'euros, avec $x\in[0;9]$.
Le nombre de casques, en millier, achetés par les consommateurs en fonction de x est donné par $f(x)=\frac{9-x}{1+x}$ (c'est la fonction *demande*).
Le nombre de casques, en millier, proposés sur le marché par le fabriquant, en fonction de x, est donné par $g(x)=\frac{x}{2}$ (c'est la fonction *offre*).

1. Combien de casques seront achetés par le consommateur si le prix d'un casque est fixé à 40 € ?
2. On a représenté graphiquement les fonctions f et g sur $[0;9]$.



a. Déterminer le prix d'équilibre du marché, pour lequel l'offre sera égale à la demande.
b. Combien de casques seront produits et achetés à ce prix d'équilibre ?
c. Pour quels prix, l'offre sera-t-elle inférieure ou égale à la demande ?

SPECIMEN

exercices Entraînement

1 Fonction, courbe représentative

71 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x + 3$$
1. Calculer l'image de 1, de -2 puis de $\frac{1}{3}$ par f.
2. Déterminer l'antécédent de -3 puis de $\frac{3}{4}$ par f.
3. Représenter graphiquement la fonction f.

72 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^2 + 4x - 1$$
1. Calculer l'image de 1 par f.
2. Montrer que $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$.
3. Montrer que -3 est un antécédent de 5 par f.

73 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f. Recopier et compléter le tableau suivant.

Image ou antécédent	Notation	Courbe
L'image de 2 est -5.	…	…
…	…	$A(1;-3) \in \mathscr{C}$
…	$f(-3) = 2$	…
0 est un antécédent de 11.	…	…
…	…	L'ordonnée du point d'abscisse 7 de $\mathscr{C}$ est 15.
…	…	$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $A(-1;0)$.

74 Traduire chacune des informations suivantes par une égalité de la forme $f(\ldots) = \ldots$.
1. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(-1;5)$.
2. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_f$ est 3.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -4.
4. Les antécédents de 5 par f sont -1 et 6.
5. L'équation $f(x) = 0$ admet 8 pour solution.
6. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.

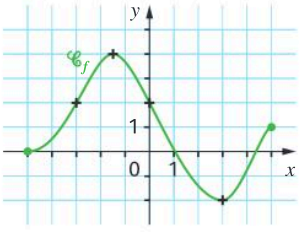
75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x-2)(2x+1)$$
1. Calculer l'image de 0 puis celle de -1 par f.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Déterminer les antécédents de 0 par f.

76 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;16]$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$.
1. Calculer l'image de 0, de 2 puis de 4 par f.
2. Montrer que 9 est un antécédent de 5 par f.
3. Déterminer l'antécédent de 6 par f.
4. Donner un nombre qui n'admet pas d'antécédent par f.
5. Le point A(3 ; 3,73) appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$?

77 Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, représentée par la droite D.
1. Tracer la droite D en utilisant son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
2. Calculer l'image par f de -1, de 2 puis de $\frac{2}{3}$.
3. Déterminer les antécédents par f des réels -2 et 3.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D avec l'axe des abscisses.
5. Les points suivants appartiennent-ils à D ?
a. $A(2;-1)$
b. $B(4;1)$
c. $C(-2;-3)$

78 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x + 2.$$
1. Calculer les images par f de 2, de -1 et de $\frac{1}{3}$.
2. Déterminer les antécédents par f de -1 et de $\frac{1}{2}$.
3. Déterminer tous les nombres réels dont l'image par f est strictement négative.
4. Déterminer tous les nombres réels dont l'image par f appartient à l'intervalle $[-3;3]$.
5. Représenter graphiquement la fonction f.

79 La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $f(-5)$, $f(0)$ et $f(3)$.
3. Déterminer les antécédents de 2 puis de -2 par f.
4. Donner un nombre qui n'admet pas d'antécédent par f.
5. Donner un nombre qui admet trois antécédents par f.

SPECIMEN

80 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f(2)$, $f(-1)$ et $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

2. Déterminer les antécédents éventuels par f de 1, de -5, de -3 puis de 2.

3. Les points $A(-5;-28)$ et $B\left(\sqrt{5};2\right)$ appartiennent-ils à la courbe $\mathscr{C}$?

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

Analyse d'un énoncé

81 **Exercice commenté**

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x+3}$.

La question revient à déterminer l'ensemble D des valeurs du nombre réel x qui admettent une image par la fonction f, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ « existe ».

$f(x)$ est ici un quotient, il faut donc que son dénominateur $2x+3$ soit différent de 0.

82 **Application immédiate**

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression $f(x)=\dfrac{2x+7}{x^2-1}$.

Pour les exercices **83** *à* **85**, *déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*

83 **1.** $f(x)=-2x^2+3x-1$ **2.** $f(x)=\dfrac{2}{x}-3$

3. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ **4.** $f(x)=\sqrt{x}+2x-3$

84 **1.** $f(x)=\sqrt{x+4}$ **2.** $f(x)=\dfrac{2x-5}{-4x+2}$

3. $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x+1)(-2x+3)}$ **4.** $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

85 **1.** $f(x)=\sqrt{-4x+5}$ **2.** $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ **4.** $f(x)=\dfrac{3x}{|x|-1}$

86 Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont l'ensemble de définition est $D=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$?

$f_1(x)=\dfrac{x^2+6}{1-x}$; $f_2(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$; $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

$f_4(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$; $f_5(x)=\sqrt{x-1}$; $f_6(x)=\dfrac{x^2}{-7x+7}$

87 **1.** Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{2x-3}$ et $g(x)=\sqrt{-3x+6}$, notés respectivement D_f et D_g.

2. On note h la fonction définie par $h(x)=f(x)+g(x)$.

a. Exprimer son ensemble de définition D_h en fonction de D_f et D_g.

b. En déduire D_h.

88 Un rectangle de dimensions x et y a un périmètre égal à 28.

1. Exprimer y en fonction de x.

2. On note f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du rectangle.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

89 PYTHON

On considère la fonction f définie sous Python ci-contre.

```
def f(x):
    return x**2-3*x-2
```

1. Déterminer l'image de 2 puis celle de -3 par f.

2. Déterminer les antécédents de -2 par f.

3. Le point $A(0,5;3,25)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$? et le point $B\left(\sqrt{2};-4,24\right)$?

90 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer l'image de -3 puis de $\frac{2}{3}$ par f.

2. Déterminer les antécédents de 0 par f.

3. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}$.

91 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-3)(-x+1)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f(-1)$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

3. **a.** Développer $f(x)$.

b. Déterminer les antécédents de -3 par f.

92 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x-3$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Le point $A(-2;-3)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

3. Déterminer les antécédents de -3 par f.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=(x-1)^2-4$.

b. En déduire une factorisation de $f(x)$.

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

93 Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3$.

1. Déterminer :

a. l'ordonnée du point d'abscisse -1 de $\mathscr{C}$;

b. l'abscisse du point d'ordonnée -3 de $\mathscr{C}$;

c. les abscisses des points d'ordonnées 5 de $\mathscr{C}$.

2. Existe-t-il un point d'ordonnée -4 appartenant à la courbe $\mathscr{C}$? Justifier.

SPECIMEN

94 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1;5]$ telle que :
- l'image de -1 est 3
- $f(4)=-1$
- les antécédents de 1 par f sont 0 et 3
- l'équation $f(x)=0$ a pour solutions 2 et 5.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ pouvant représenter la fonction f. Combien existe-t-il de courbes possibles ?

95 Soit f la fonction définie sur $[-2;4]$ par :
$$f(x)=-0{,}5x^2+2x+1$$
1. À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs de f sur $[-2;4]$ avec un pas de 1.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

2. Dans un repère, placer les points du tableau.
3. Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, peut-on relier ces points à l'aide d'une règle ? Pourquoi ?
4. En s'aidant de la calculatrice, construire $\mathscr{C}_f$.

96 Soit f la fonction définie sur $[-1;4]$ par :
$$f(x)=x^2-2x-2$$
1. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de f sur $[-1;4]$ avec un pas de 0,5.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

97 On donne le programme Python ci-contre.

```
def f(x):
    return x**2-2*x-3

def A(a,b):
    if f(a)==b:
        return "oui"
    else:
        return "non"
```

1. Ce programme permet de définir une fonction f. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Que va retourner le programme dans chacun des cas suivants ?
a. `A(-1,0)` **b.** `A(-2,3)`
3. Quel est le rôle de la fonction `A(a,b)` ? À quoi correspondent les affichages `"oui"` et `"non"` retournés par le programme ?
4. Déterminer les valeurs possibles de a telles que l'instruction `A(a,-3)` retourne `"oui"`.

98 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer l'image de -3 par f.
3. Calculer $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
4. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$.
5. Sans calcul, donner l'image de $-\dfrac{3}{2}$ par f.
6. Déterminer le (ou les) point(s) d'ordonnée -1 sur $\mathscr{C}$.

99 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=(x+1)^2-(x+1)(-x+7)$$
1. On donne la copie d'écran ci-après obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1	f(x):=(x+1)^2-(x+1)(-x+7) → f(x) := $2x^2-4x-6$
2	Factoriser(f(x)) → $2(x-3)(x+1)$
3	FormeCanonique(f(x)) → $2(x-1)^2-8$

a. Développer $f(x)$ et vérifier le résultat donné à la ligne 1.
b. Factoriser $f(x)$ et vérifier le résultat donné à la ligne 2.
c. Montrer le résultat donné à la ligne 3.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant la forme de $f(x)$ la plus adaptée.
a. Calculer l'image de 0 par f.
b. Le point $S(1;-8)$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}_f$?
c. Déterminer les antécédents de -6 par f.
d. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

100 Un atelier artisanal produit et vend chaque jour un nombre x de bracelets compris entre 0 et 50.
Le coût de fabrication journalier de x bracelets est donné, en euro, par :
$$C(x)=x^2-4x+80$$
Chaque bracelet est vendu au prix de 20 €.
1. Pour 10 bracelets produits et vendus, calculer le coût de fabrication, la recette et le bénéfice réalisé.
2. Pour la production et la vente journalière de x bracelets, on note respectivement $R(x)$ et $B(x)$ la recette et le bénéfice (en euro) réalisés.
a. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
b. Montrer que $B(x)=-x^2+24x-80$.
3. Montrer les égalités suivantes :
a. $B(x)=-(x-12)^2+64$
b. $B(x)=(-x+20)(x-4)$
4. En utilisant la forme de $B(x)$ la plus adaptée, répondre, en justifiant, aux questions suivantes.
a. Quel est le bénéfice réalisé par la vente de 12 bracelets ?
b. Résoudre l'équation $B(x)=0$. Interpréter les solutions dans le contexte de l'exercice.
c. Déterminer le nombre de bracelets que doit vendre l'atelier pour réaliser un bénéfice de 28 €.
d. L'atelier peut-il réaliser un bénéfice journalier de 100 € grâce à ces bracelets ? Justifier.

SPECIMEN

101 La trajectoire d'un javelot est modélisée par fonction h définie par $h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}8$, où $h(t)$ représente la hauteur du javelot, en mètre, au bout de t seconde.

1. Calculer $h(1{,}5)$. Interpréter cette valeur.

2. a. De quelle hauteur le javelot a-t-il été lancé ?

b. Déterminer les antécédents de 1,8 par h.

c. Quand le javelot repasse-t-il par la hauteur dont il a été lancé ?

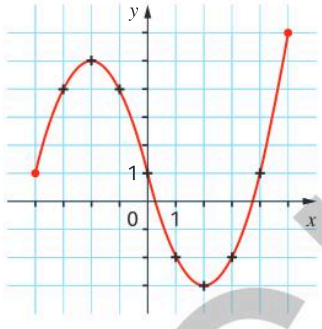
3. a. Montrer que $h(t) = -5(t-1)^2 + 6{,}8$.

b. Au bout de combien de temps le javelot atteindra-t-il 6,8 m de hauteur ?

2 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

102 Exercice guidé

La courbe ci-contre représente une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Résoudre graphiquement les équations :

a. $f(x) = 1$ **b.** $f(x) = -3$ **c.** $f(x) = 7$

3. Résoudre graphiquement les inéquations :

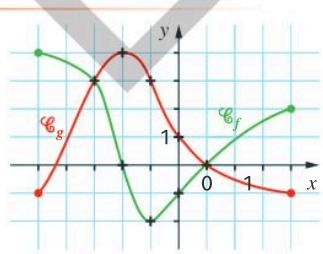
a. $f(x) \leqslant -2$ **b.** $f(x) > 1$

4. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel k le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = k$.

Pistes de résolution

4. On doit dénombrer les antécédents du nombre k, ce qui revient à compter, lorsque k varie, le nombre de points d'ordonnée k sur la courbe.

Pour les exercices **103** *et* **104**, *on a représenté ci-contre les courbes représentatives de deux fonctions f et g.*



103 **1.** Donner l'ensemble de définition de f et g.

2. Déterminer $f(-1)$ et $g(0)$.

3. Déterminer l'image de 4 par f.

3. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

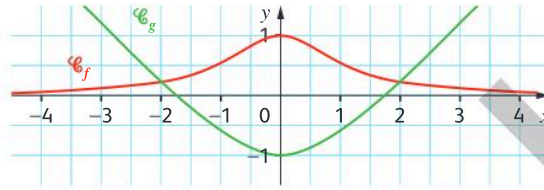
a. $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = 3$ **c.** $f(x) = g(x)$

104 Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a. $f(x) = 5$ **b.** $g(x) = -1$ **c.** $g(x) < 3$

d. $f(x) \geqslant g(x)$ **e.** $f(x) \leqslant 0$ **f.** $g(x) \leqslant 4$

105 On donne ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

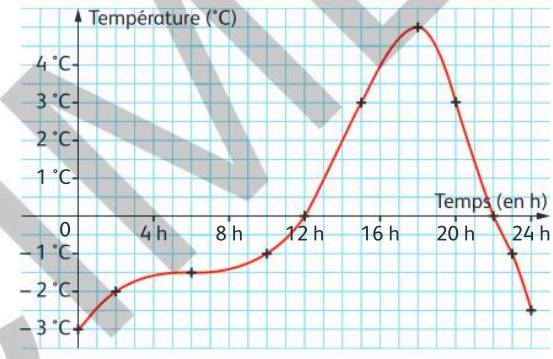


Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x) = 0{,}5$ **2.** $g(x) = -1$ **3.** $f(x) = g(x)$

4. $f(x) < 0{,}5$ **5.** $g(x) \geqslant -1$ **6.** $f(x) > g(x)$

106 On a relevé les températures dans une ville lors d'une journée d'hiver. On note f la fonction qui, à chaque instant t exprimé en heure, associe la température $f(t)$ en degré.



1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer la température à 6 h.

3. Déterminer $f(10)$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes et interpréter les solutions dans le contexte de l'exercice.

a. $f(t) = 3$ **b.** $f(t) < 0$ **c.** $-1 \leqslant f(t) \leqslant 3$

107 **1.** Sur un même graphique, représenter les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ et } g(x) = 2x + 3$$

2. Résoudre graphiquement :

a. l'équation $f(x) = g(x)$;

b. l'inéquation $f(x) < g(x)$.

3. Retrouver algébriquement les résultats de la question **2.**

108 **1.** Sur un même graphique, construire les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ et } g(x) = -x + 1$$

2. En déduire la résolution graphique des équations et inéquations suivantes.

a. $f(x) = g(x)$

b. $f(x) < g(x)$

SPECIMEN

109 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5;2]$ par $f(x)=0{,}5x^2+2x+3$.

1. Afficher la courbe de la fonction f à l'écran de la calculatrice.

2. En déduire les solutions des équations et de l'inéquation suivantes.

a. $f(x)=3$ **b.** $f(x)=1$ **c.** $f(x)<3$

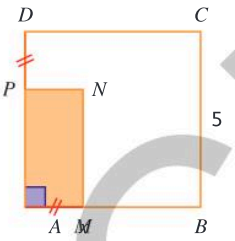
3. En utilisant la fonction « trace », déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des solutions de l'équation $f(x)=2$.

110 **1.** Afficher à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-2x-3$ et $g(x)=-x^2+x+3$.

2. En déduire la résolution graphique de l'équation et de l'inéquation suivantes.

a. $f(x)=g(x)$ **b.** $f(x)>g(x)$

111 Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 5. Le point M appartient au segment $[AB]$, et le quadrilatère $AMNP$ est un rectangle. On pose $AM=x$, et on note $f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$.

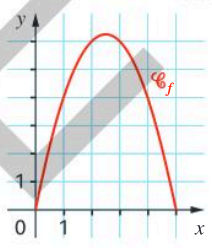


1. a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c. Calculer $f(1)$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

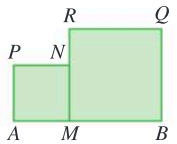
2. On donne ci-contre la courbe représentative de f.



a. Pour quelles positions du point M l'aire du rectangle $AMNP$ est-elle égale à 4 ?

b. L'aire du rectangle $AMNP$ peut-elle être égale à la moitié de l'aire du carré $ABCD$? Justifier.

112 On considère deux points A et B tels que $AB=4$ cm et M un point variable sur le segment $[AB]$. On construit, du même côté du segment $[AB]$, les carrés $AMNP$ et $MBQR$.



On pose $AM=x$, et on note $\mathscr{A}(x)$ la somme des aires des carrés $AMNP$ et $MBQR$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $\mathscr{A}$ puis montrer que $\mathscr{A}(x)=2x^2-8x+16$.

2. a. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $[0;4]$ avec un pas de 0,5.

b. Proposer un réglage de la fenêtre graphique de la calculatrice permettant de visualiser la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction de $\mathscr{A}$ à l'écran.

c. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

3. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

a. Pour quelle(s) position(s) de M sur $[AB]$ la somme des aires des carrés $AMNP$ et $MBQR$ est-elle égale à 10 cm² ?

b. Pour quelles positions de M sur $[AB]$ la somme des aires des carrés $AMNP$ et $MBQR$ est-elle comprise strictement entre 10 et 12,5 cm² ?

4. a. Montrer que $\mathscr{A}(x)-10=2(x-1)(x-3)$.

b. Retrouver le résultat de la question **3.a.** par le calcul.

3 Fonctions de référence

113 Soit f la fonction carré.

1. Calculer $f(2)$, $f(-3)$ et $f\left(\sqrt{5}\right)$.

2. Mélina affirme que l'image de $1+\sqrt{2}$ par f est égale à 3. A-t-elle raison ? Justifier.

3. Déterminer les antécédents éventuels par f des réels 4 ; 6 et -3.

4. Déterminer tous les réels qui n'admettent pas d'antécédent par la fonction f.

114 Accoudée à son balcon, Margaux laisse échapper son téléphone portable.

La hauteur h par rapport au sol, en mètre, à laquelle le téléphone se situe après t secondes de chute est donnée par la relation :

$$h(t)=-4{,}905t^2+15$$

1. De quelle hauteur Margaux lâche-t-elle son téléphone ?

2. Au bout de combien de temps passe-t-il au 3e étage, situé à une hauteur de 9 mètres ?

3. Combien de temps s'écoule-t-il pour que le téléphone atteigne le sol ?

115 **1.** Un pavé droit à base carrée a une hauteur de 4 cm et un volume de 100 cm³.

Quelle est la longueur du côté de sa base ?

2. Une pyramide, de hauteur de 5 cm, a une base carrée et un volume de 60 cm³.

Quelle est la longueur du côté de sa base ?

Rappel

Le volume $\mathscr{V}$ d'une pyramide de hauteur h et dont la base a une aire $\mathscr{A}$ est $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}\times h$.

SPÉCIMEN

116 Vrai ou faux ? LOGIQUE

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Illustrer par un contre-exemple les propositions fausses.

1. Si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$.
2. Si $-2 < x < 3$, alors $4 < x^2 < 9$.
3. Si $4 < x^2 < 9$, alors $-2 < x < 3$.
4. Si $x \in [0\,;1]$, alors $x^2 \in [0\,;1]$.
5. Si $x^2 \in [0\,;1]$, alors $x \in [0\,;1]$.

117 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 \leqslant 5$ **2.** $x^2 > 4$
3. $9 < x^2 < 16$ **4.** $x^2 - 3 \geqslant 0$

118 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $(x-4)^2 = 7$ **2.** $(x+2)^2 = 81$
3. $(x+13)^2 = 0$ **4.** $(0{,}5x+6)^2 = 4$

119 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $2|x| + 3 = 5$ **2.** $|x-1| + 2 = 1$
3. $|x| > 5$ **4.** $4|x| + 1 \leqslant 3$

120 Vrai ou faux ? LOGIQUE

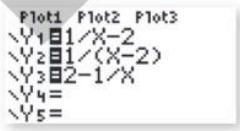
Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. Illustrer par un contre-exemple les propositions fausses.

1. Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$. **2.** Si $\frac{1}{x} < 0$, alors $x < 0$.
3. Si $x = \frac{1}{x}$, alors $x = 1$. **4.** Si $x = 1$, alors $x = \frac{1}{x}$.
5. Si $x \in]0\,;1[$, alors $\frac{1}{x} \in]0\,;1[$.

121 ALGO La fonction f est définie par l'algorithme ci-contre.

Choisir un réel non nul
Prendre l'inverse
Prendre l'opposé
Ajouter 2
Renvoyer le résultat

1. Quelle est l'image de 1 ? Et celle de 4 ?
2. Parmi les expressions Y1, Y2, Y3 entrées dans la calculatrice ci-contre, laquelle correspond à $f(x)$?

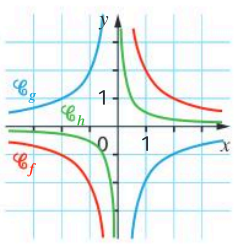


3. Résoudre les équations suivantes.
a. $f(x) = 1$ **b.** $f(x) = -4$ **c.** $f(x) = 2$

122 Les fonctions f, g et h sont de la forme $x \mapsto \frac{k}{x}$, où k est un nombre réel.

On a tracé ci-contre leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.

Déterminer les expressions des fonctions f, g et h.



123 Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Quel que soit le nombre réel k, l'équation $|x| = k$ admet toujours au moins une solution.
2. Si $|x| \leqslant 3$ alors $x \in [0\,;3]$.
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| > 4$ est l'intervalle $]4\,;+\infty[$.
5. Si deux nombres réels ont la même valeur absolue, alors ils sont égaux.

124 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x} \leqslant 8$ **b.** $\sqrt{x} \geqslant 9$ **c.** $\sqrt{x} < 3$

125 On lâche un corps en chute libre à une hauteur h du sol. En supposant qu'il n'est soumis à aucun frottement, la vitesse v (en m/s) au moment de l'impact avec le sol est donnée par $v = \sqrt{2gh}$, où h est en mètre. On donne $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$.

1. Déterminer la vitesse en m/s, puis en km/h, au moment de l'impact avec le sol lorsque $h = 50\,\text{m}$.
2. De quelle hauteur h faut-il lâcher l'objet en chute libre pour que sa vitesse soit supérieure à 180 km/h au moment de l'impact avec le sol ?

126 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $x^3 = 0{,}125$ **b.** $x^3 = -27$ **c.** $x^3 = 1\,000$
d. $x^3 < 125$ **e.** $x^3 + 1 \geqslant 0$ **f.** $x^3 > -0{,}008$

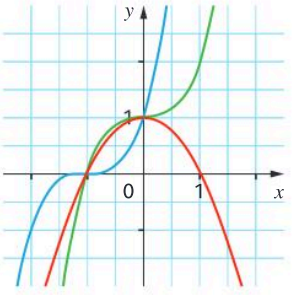
127 Une action à la bourse augmente du même taux d'évolution t chaque semaine (t est écrit sous forme décimale, par exemple 0,3 pour une hausse de 30 %).

1. On suppose ici que l'action augmente globalement de 50 % en deux semaines.
a. Justifier que $(1+t)^2 = 1{,}5$.
b. Déterminer la valeur de t.
2. On suppose maintenant que l'action augmente globalement de 50 % en trois semaines.
En raisonnant comme à la question **1.**, déterminer une équation vérifiée par t, puis la résoudre.
On donnera le résultat à 0,01 près.

128 On a représenté ci-dessous les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x+1)^3$; $g(x) = x^3 + 1$ et $h(x) = -x^2 + 1$

Associer fonctions et courbes représentatives.

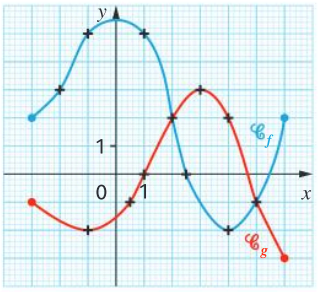


SPECIMEN

BILAN

129 15min Lectures graphiques (1)

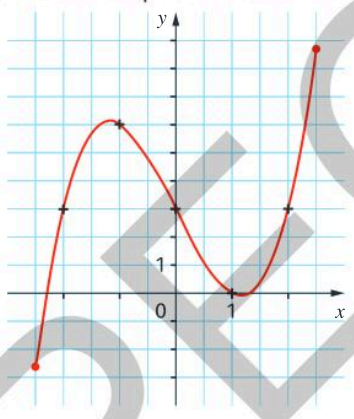
On considère les fonctions f et g représentées ci-contre.



1. Donner l'ensemble de définition de f et g.
2. Déterminer $f(4)$ et $g(1)$.
3. Déterminer les antécédents de 2 par f.
4. Déterminer l'antécédent de -3 par g.
5. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
a. $f(x)=5$ **b.** $f(x)=g(x)$
c. $g(x)\leqslant -1$ **d.** $f(x)<g(x)$
6. Déterminer, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solution(s) de l'équation $f(x)=k$.

130 20min Lectures graphiques (2)

La courbe ci-dessous représente une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $f(-1)$ et de $f(1)$.
3. Résoudre graphiquement :
a. l'équation $f(x)=3$;
b. l'inéquation $f(x)\leqslant 3$.
3. L'expression de $f(x)$ figure parmi les trois expressions suivantes ; laquelle est-ce ? Justifier.
a. $2x^3-3x^2-2x+3$ **b.** x^3-4x+3
c. $3x^3+2x^2-8x+3$
4. Retrouver algébriquement les solutions de l'équation $f(x)=3$.

131 20min Fonction à paramètre

On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=x^2+m$, où m est un réel fixé.
On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.
1. Dans chaque cas, déterminer la valeur de m telle que la condition donnée soit vérifiée.
a. L'image de -1 par f_m est égale à 3.
b. Le point $A(2;10)$ appartient à $\mathscr{C}_m$.
c. 3 est solution de l'équation $f_m(x)=8$.
2. Dans chaque cas, résoudre l'équation $f_m(x)=0$. Interpréter graphiquement les solutions.
a. $m=2$ **b.** $m=-4$ **c.** $m=-2$.

132 20min Étude d'une fonction (1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Calculer l'image de -1 par la fonction f.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -1, de 7 puis de -2 par la fonction f.
4. Déterminer le réel b tel que le point $A(-2;b)$ appartienne à $\mathscr{C}$.
5. Montrer qu'un réel et son opposé ont toujours la même image par f.
6. a. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de f sur l'intervalle $[0\,;2]$, avec un pas de 0,5.
b. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

133 25min Étude d'une fonction (2)

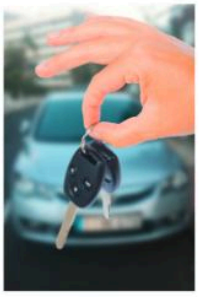
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Calculer $f(-2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Déterminer les antécédents de 3 par f.
3. Le point $A(2;-1)$ appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier.
4. Montrer que les points d'abscisses -1 et 5 de la courbe $\mathscr{C}$ ont la même ordonnée.
5. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$f(x)=(x-1)(x-3)$$
b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
6. a. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de f sur l'intervalle $[-1;5]$, avec un pas de 0,5.
b. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-1;5]$.

134 15min Vrai ou faux ?

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}+2$.
On note $\mathscr{H}$ sa représentation graphique.
1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. L'image de $\frac{3}{2}$ par f est $\frac{4}{3}$.
3. Le point $A\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{3}\right)$ appartient à $\mathscr{H}$.
4. Tous les nombres réels admettent un antécédent par f.

SPECIMEN

135 15min Comparaison de tarifs



Une société de location de voitures propose deux formules A et B.

Formule A : 75 € de forfait fixe et 0,40 € par kilomètre parcouru.

Formule B : pas de forfait mais 0,70 € par kilomètre parcouru.

Pour x kilomètres parcourus, on note $f(x)$ le prix payé avec la formule A et $g(x)$ celui avec la formule B.

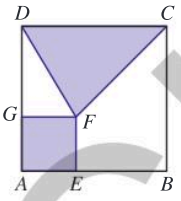
1. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

2. Dans un repère adapté, représenter graphiquement les fonctions f et g.

3. Déterminer graphiquement à partir de combien de kilomètres la formule A est plus avantageuse.

4. Retrouver le résultat de la question **3.** par le calcul.

136 20min Le jardin



Un jardin carré $ABCD$ a pour côté 8 m. Un paysagiste souhaite semer de la pelouse sur deux parties de ce jardin représentées par le carré $AEFG$ et le triangle CDF. Le reste du jardin est réservé à la partie terrasse.

On pose $AE = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie pelouse.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

3. Montrer que $f(x) = (x-2)^2 + 28$.

4. Dans chaque cas, déterminer, si possible, la (ou les) position(s) possible(s) du point E sur le segment $[AB]$ telle(s) que :

a. l'aire de la partie pelouse soit égale au quart de l'aire du jardin ;

b. la partie pelouse et la partie terrasse aient la même aire ;

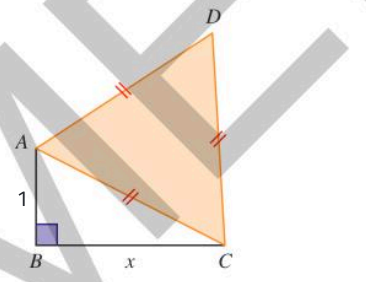
c. l'aire de la partie pelouse soit égale à 28 m^2.

137 15min Périmètre d'un triangle

Le triangle ABC est rectangle en B tel que $AB = 1$.

On construit à partir de l'hypoténuse $[AC]$ le triangle équilatéral ACD.

On pose $BC = x$. Ainsi on a $x \geqslant 0$.



1. a. Exprimer la longueur AC en fonction de x.

b. En déduire l'expression du périmètre $P(x)$ du triangle ACD en fonction de x.

2. Déterminer la valeur du périmètre du triangle ACD lorsque $x = 2$, puis lorsque $x = \sqrt{2}$.

3. Pour quelle valeur de x le périmètre du triangle ACD est-il égal à 12 ?

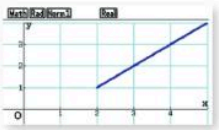
4. Pour quelles valeurs de x le périmètre du triangle ACD est-il strictement supérieur à 15 ?

APPROFONDISSEMENT

138 À la recherche d'une fonction affine

Déterminer toutes les fonctions affines f telles que, pour tout nombre réel x, $f(f(x)) = 4x - 3$.

139 Une demi-droite surprenante !



Anna a représenté sur sa calculatrice la fonction f définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}$$

Elle est surprise d'obtenir une demi-droite.

Montrer que la représentation graphique de f est effectivement une demi-droite.

140 Distance à l'origine

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on considère la droite d d'équation $y = x + 1$.

Pour tout point M d'abscisse x de la droite d, on note $f(x) = OM^2$.

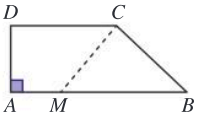
1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$f(x) - 25 = 2(x-a)(x+b)$$

3. Déterminer tous les points M de la droite d qui sont à une distance égale à 5 du point O.

141 À la recherche des dimensions d'un trapèze

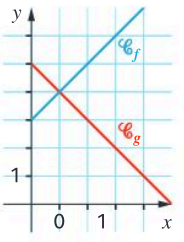


$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et M un point variable du segment $[AB]$.

On pose $AM = x$.

On note $f(x)$ l'aire du trapèze $AMCD$ et $g(x)$ l'aire du triangle BMC. On donne ci-contre les représentations graphiques des fonctions f et g.

Déterminer les longueurs AB, AD et DC.



SPÉCIMEN

142 Un hangar, dont le toit est formé d'une succession d'arches de forme parabolique, a besoin d'être consolidé à l'aide de poutres. On admet que l'équation de l'arche de forme parabolique est :

$$y = -0{,}04x^2 + 64$$

L'unité choisie est le mètre.



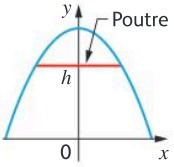
Hangar à dirigeable à Écausseville (Manche)

1. L'arche admet-elle un axe de symétrie ?

2. Quelle est la largeur de la base d'une arche ?

3. Quelle est la hauteur d'une arche ?

4. À quelle hauteur faut-il installer des poutres de 20 m de long pour consolider l'arche ?



5. Pour des raisons de sécurité, une poutre de consolidation doit être placée à une hauteur supérieure à 48 m. Quelle est la longueur maximale de cette poutre ?

Info

La forme parabolique est souvent utilisée en architecture (bâtiments, ponts, barrages…) car elle permet une meilleure répartition des contraintes sur l'ouvrage.

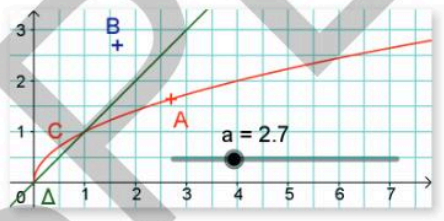
143 **Image de la courbe représentant la fonction racine carrée par une symétrie**

On note f la fonction racine carrée, de courbe $\mathscr{C}$, et Δ la droite d'équation $y = x$.

Pour tout réel $a \geqslant 0$, on note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a et B le symétrique de A par rapport à Δ.

1. Quelle est l'ordonnée de A en fonction de a ?

2. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie en créant un curseur a variant de 0 à 10.



3. Mettre en relation les coordonnées du point A et celles du point B.

En déduire l'expression des coordonnées du point B en fonction de a.

4. Faire afficher la trace du point B et modifier la valeur du curseur a. Quelle semble être l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie par rapport à la droite Δ ?

5. Démontrer la conjecture.

144 **Un raisonnement par « analyse-synthèse »**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Analyse

On suppose ici qu'il existe deux fonctions p et i, définies sur $\mathbb{R}$, telles que :

- pour tout nombre réel x, $f(x) = p(x) + i(x)$
- p est paire et i est impaire, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(-x) = p(x) - i(x)$$

b. Montrer que, pour tout nombre réel x :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

2. Synthèse

On considère maintenant, grâce aux résultats de la question **1.**, les deux fonctions p et i, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

a. Montrer que p est paire et que i est impaire.

b. Pour x réel, calculer $p(x) + i(x)$.

c. Conclusion :

En déduire que toute fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3. Un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

Déterminer l'écriture de f sous la forme de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

145 **Une équation fonctionnelle**

On note E l'ensemble des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous nombres réels x et y, la relation :

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, indiquer si elle appartient à E. Justifier.

a. f est définie par $f(x) = 3x$.

b. g est définie par $g(x) = x^2$.

c. h est définie par $h(x) = -2x + 3$.

2. Soit f une fonction appartenant à E.

a. Montrer que $f(0) = 0$.

b. En remarquant que $x + (-x) = 0$, montrer que, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

c. Montrer que $f(2) = 2 \times f(1)$.

d. On note $a = f(1)$. Exprimer $f(3)$ et $f(4)$ en fonction de a.

e. Exprimer, pour tout entier naturel n, $f(n)$ en fonction de a. Cette expression reste-t-elle valable si n est un entier relatif ? Justifier.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

146 Compréhension d'énoncé

On considère l'énoncé d'exercice suivant.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-0{,}5x^2+6$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
I. Le point $A(-2;4)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
II. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
III. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est égale à 1.

Répondre aux questions suivantes.
1. Parmi les deux égalités suivantes, laquelle doit-on vérifier pour savoir si A appartient à $\mathscr{C}$?

- $f(-2)=4$
- $f(4)=-2$

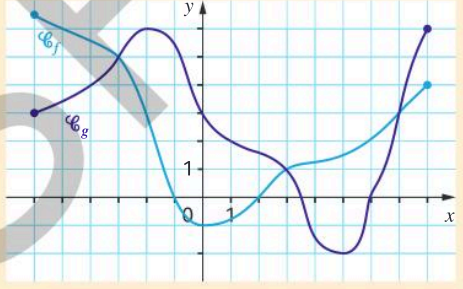
Répondre à la question **I.**
2. Répondre à la question **II.** revient à résoudre l'équation $f(x)=0$.
Résoudre cette équation et répondre à la question **II.**
3. Tous les points de la courbe C ont des coordonnées de la forme $(x;f(x))$, où $x\in\mathbb{R}$. Pour répondre à la question **III**, il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$.

147 Voici une feuille de calcul réalisée avec un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	x	1	2	3	4	5
2	$f(x)$	3	0	-7	-18	-33

Dans la cellule B2, on a saisi la formule `=-2*B1^2+3*B1+2` qui, par recopie vers la droite, a permis de compléter ce tableau.
1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Quelles sont les images de 3 et 0 par f ?
3. Quels sont les antécédents de 2 par f ?

148 Les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont données ci-dessous.



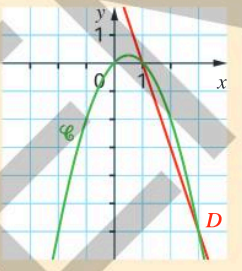
1. Donner l'ensemble de définition D de f et g.
2. Résoudre graphiquement :
a. $f(x)=0$ **b.** $f(x)\geqslant 0$ **c.** $g(x)=3$
d. $g(x)<3$ **e.** $f(x)=g(x)$ **f.** $f(x)<g(x)$

Aller plus loin

149 Résolution d'équation

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-x^2+x \text{ et } g(x)=3(-x+1)$$
On souhaite résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

1. Résolution graphique



a. Justifier que la représentation graphique de g est une droite dont on donnera le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.
b. On a tracé sur le graphique ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite D représentant g.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.

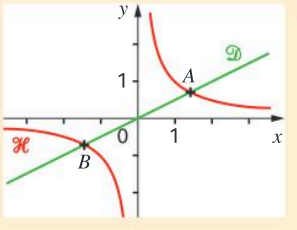
2. Résolution algébrique

a. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x)-g(x)=(-x+1)(x-3)$$
b. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$. Cela confirme-t-il le résultat de la question **1.** ?

150 Choisir une forme adaptée

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=(2x-7)^2-9x^2$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1. Développer puis, factoriser $f(x)$.
2. Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour répondre aux questions suivantes.
a. Calculer l'ordonnée du point A d'abscisse $\sqrt{3}$ de la courbe $\mathscr{C}$.
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
c. En quel point la courbe $\mathscr{C}$ coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?
d. Déterminer les antécédents de 49 par f.

151 PRISE D'INITIATIVES



On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ représentant la fonction inverse et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax$, où $a>0$.
Démontrer que $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}$ se coupent en deux points A et B symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine du repère.

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2071

SPÉCIMEN

TP Pratiquer l'algorithmique et programmer

Approximation de $\sqrt{2}$ par balayage

Objectif
Manipuler une boucle *Tant que*

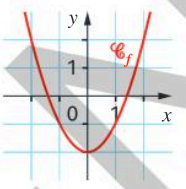
L'objectif de ce TP est d'obtenir un encadrement du nombre $\sqrt{2}$ à une précision donnée en utilisant une méthode numérique : la méthode « par balayage ».

Partie A Définition d'une fonction

La fonction Python ci-contre permet de définir une fonction f.

```
def f(x):
    return x**2-2
```

1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Justifier que $\sqrt{2}$ est l'unique solution positive de l'équation $f(x)=0$.
3. On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f.
À l'aide du graphique, justifier l'encadrement :
$1<\sqrt{2}<2$



Partie B Algorithme de balayage

On complète la fonction précédente par la fonction `balayage` donnée ci-dessous en langage naturel et en Python.

$a \leftarrow 1$
Tant que $f(a)<0$ Faire
  $a \leftarrow a+p$
Fin Tant que
Afficher $(a-p, a)$

```
def balayage(p):
    a=1
    while f(a)<0:
        a=a+p
    print(a-p,a)
```

1. Justifier le choix d'initialiser la variable a à 1.
2. Exécuter l'algorithme à la main pour $p=0{,}1$. À quoi correspond le résultat renvoyé ?
3. Expliquer le rôle de la fonction balayage.
4. Programmer et exécuter cette fonction pour `p=0,01` et `p=0,001`. Interpréter les résultats obtenus.

Info
p est appelé le « pas » du balayage.

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

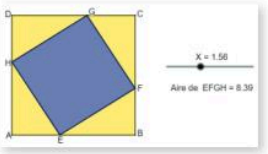
Un carré dans un carré

Objectif
Modéliser une situation géométrique par une fonction.

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. On note E, F, G et H les points appartenant respectivement aux segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AE=BF=CG=DH$. On admet que le quadrilatère $EFGH$ est un carré et on s'intéresse aux problèmes suivants.
Existe-t-il une ou des positions du point E sur le segment $[AB]$ telle(s) que :
Problème 1 : l'aire de $EFGH$ soit égale à 10 cm^2 ?
Problème 2 : l'aire de $EFGH$ soit égale à la moitié de l'aire de $ABCD$?
Problème 3 : l'aire de $EFGH$ soit égale à 7 cm^2 ?

Partie A Expérimentation et conjectures

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- Construire le carré $ABCD$ en plaçant A à l'origine du repère, B sur l'axe des abscisses et D sur l'axe des ordonnées.
- Créer un curseur, nommé X, variant de 0 à 4 avec un incrément de 0,01.
- Dans la barre de saisie, créer les points E=(X,0), F=(4,X), G=(4-X,4) et H=(0,4-X).
- Construire le carré $EFGH$ et afficher son aire.
- Dans la barre de saisie, créer le point M=(X,Aire) et faire afficher sa trace.



En faisant varier le curseur et en observant la trace du point M, conjecturer les réponses aux problèmes.

Partie B Démonstration

On pose $AE=x$, et on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du carré $EFGH$.
1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mathcal{A}(x)=2x^2-8x+16$ puis que $\mathcal{A}(x)=2(x-2)^2+8$.
3. En déduire la démonstration des conjectures formulées à la Partie A.

SPECIMEN

TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Construction géométrique d'une parabole

TRAVAIL DE GROUPE

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point $F\left(0\,;\frac{1}{4}\right)$ et la droite D d'équation $y=-\frac{1}{4}$.

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $MF=MH$, où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite D.

Partie A Expérimentation et conjecture

Soit $M(x\,;y)$ un point appartenant à $\mathscr{P}$.

On note Δ la médiatrice du segment $[FH]$ et d la droite passant par H et perpendiculaire à D.

1. a. Quelles sont les coordonnées du point H ?

b. Justifier que M est le point d'intersection des droites d et Δ.

2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- placer le point F et construire la droite D ;
- créer un curseur, nommé X, variant de -5 à 5 avec un incrément de 0,1 ;
- créer le point H d'abscisse X ;
- construire les droites d et Δ ;
- définir le point M et activer sa trace.

3. Faire varier le curseur et observer la trace du point M. Quelle semble être la nature de l'ensemble $\mathscr{P}$? Donner son équation.

Partie B Démonstration

1. Soit $M(x\,;y)$ un point appartenant à $\mathscr{P}$.

a. Montrer que $MH^2=y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$.

b. Exprimer MF^2 en fonction de x et de y.

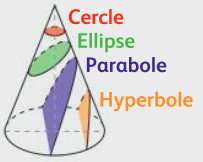
c. En déduire que $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y=x^2$.

2. Décrire un procédé de construction point par point de la parabole $\mathscr{P}$ à la règle et au compas. Effectuer cette construction.

On construit ainsi la parabole $\mathscr{P}$ par « foyer » (le point F) et « directrice » (la droite D).

Info

Les paraboles et les cercles sont des exemples de « coniques », c'est-à-dire d'intersections d'un cône par un plan. Ces coniques ont été étudiées dès la Grèce antique, en particulier par Euclide et Apollonius de Perge.



TP2 Maths dans l'histoire : asymptotes de l'hyperbole

TRAVAIL DE GROUPE

Dans ce TP, on s'intéresse à la notion d'*asymptote*, appliquée au cas particulier de l'hyperbole représentant la fonction inverse.

Partie A Recherches

1. Effectuer des recherches sur le mot « asymptote » (étymologie, définition, etc.).

2. Tracer l'hyperbole représentant la fonction inverse.

Quelles droites pourrait-on qualifier d'« asymptotes de l'hyperbole » ?

3. a. Résoudre l'inéquation $0<\frac{1}{x}<10^{-30}$.

b. Soit un réel $a>0$.

L'inéquation $0<\frac{1}{x}<a$ a-t-elle toujours des solutions, le nombre a étant choisi aussi petit que l'on veut ?

c. Interpréter ce résultat pour l'hyperbole.

4. a. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x}>10^{30}$.

b. Soit un réel $A>0$.

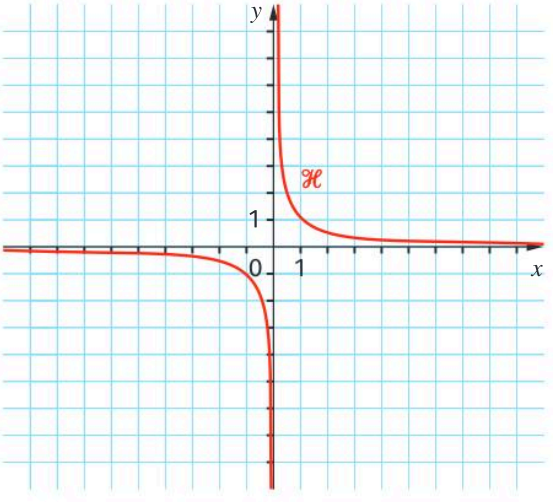
L'inéquation $\frac{1}{x}>A$ a-t-elle toujours des solutions, le nombre A étant choisi aussi grand que l'on veut ?

c. Interpréter ce résultat pour l'hyperbole.

Partie B À l'écrit ou à l'oral

Faire un bilan des recherches et présenter les résultats de façon organisée : description du problème, étude mathématique, conclusion.

On veillera à utiliser un vocabulaire précis.



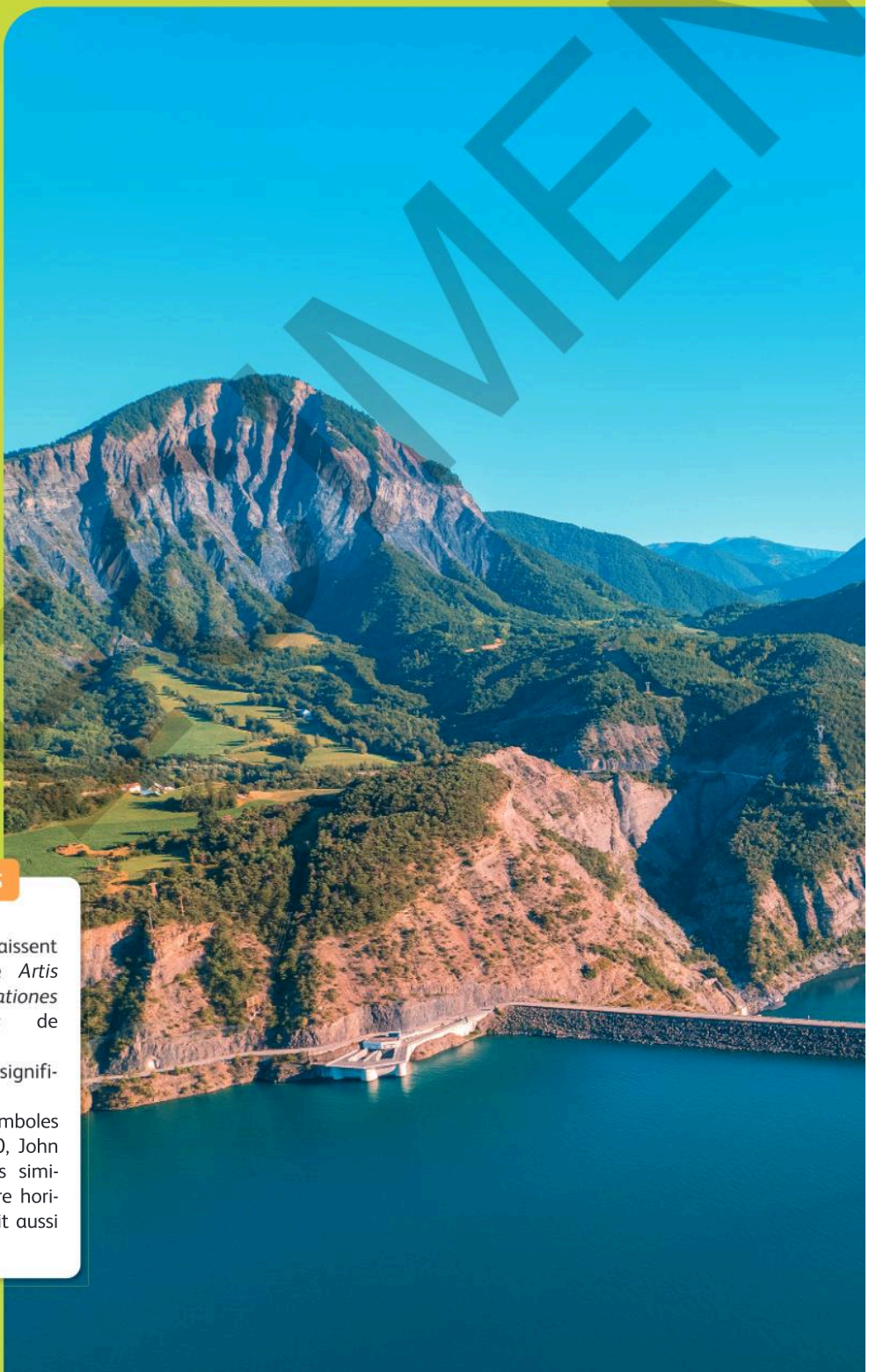
SPECIMEN

CHAPITRE

9 Signe d'une fonction et inéquations

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Étudier le signe d'une fonction
- CAPACITÉ 2 Résoudre algébriquement une inéquation
- CAPACITÉ 3 Étudier le signe d'une fonction à l'aide des fonctions de référence



Au fil du temps

Les symboles $>$ et $<$ apparaissent en 1631 dans l'ouvrage *Artis Analyticae Praxis Ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* de Thomas Harriot :
« signum majoritatis ut a>b significet a majorem quam b »
Pierre Bouguer utilise les symboles $\geqslant$ et $\leqslant$ en 1734. En 1670, John Wallis utilise des symboles similaires avec une unique barre horizontale ($\geqslant$ et $\leqslant$). On lui doit aussi le symbole de l'infini : ∞.

COPIE

Des maths partout !

Les inéquations sont utilisées en « optimisation linéaire », discipline qui conduit à la manipulation de plusieurs inéquations. C'est en recherche opérationnelle qu'elle est le plus utilisée, dans des domaines variés de l'activité humaine : organisation de la production, énergie, transports. La production et l'acheminement de l'électricité en sont un bon exemple.

Le barrage de Serre-Ponçon dans les Hautes Alpes est le plus grand barrage d'Europe. Il permet une production électrique de 380 MW et alimente en eau toute la Provence, jusqu'à Marseille.



RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2072

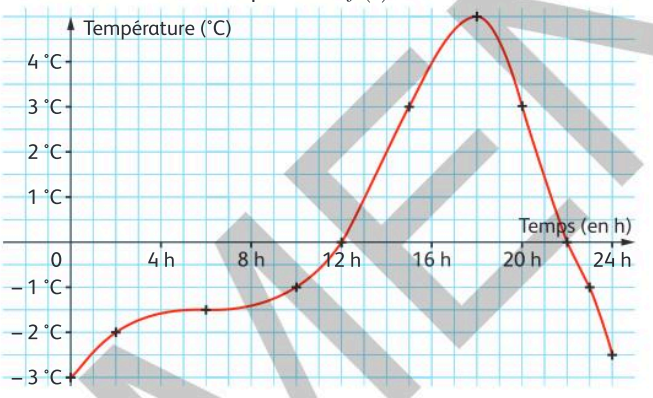
Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Exploiter une représentation graphique

On a relevé les températures à Strasbourg lors d'une journée d'hiver. On note f la fonction qui, à chaque instant t exprimé en heure, associe la température $f(t)$ en °C.



1. a. Sur quel intervalle la température est-elle positive ?

b. Quelle inéquation vient-on de résoudre ?

2. On consigne le signe de $f(t)$ en fonction des valeurs de t à l'aide du **tableau des signes** à compléter ci-dessous.

t	0		12	…	24
Signe de $f(t)$		−	0	0	

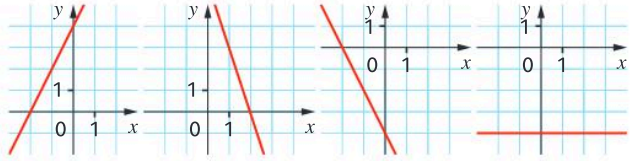
C Représentation graphique d'une fonction affine

Représenter dans un repère les fonctions affines f et g définies, pour tout réel x, par $f(x)=x-3$ et $g(x)=-2x+6$.

D Associations

Associer à chacune des fonctions affines suivantes sa représentation graphique et son tableau de signes.

$f(x)=-4$; $g(x)=-4-2x$; $h(x)=-3x+6$ et $i(x)=2x+4$



x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de …	+	0	−

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de …	−	

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de …	−	0	+

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de …	+	0	−

E Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $3x-4\geqslant 2$ **2.** $-6x-1<2x+15$ **3.** $t-\frac{1}{3}\geqslant\frac{7}{3}+2t$

CNED

automatismes

Automatismes transversaux

1 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les nombres suivants.

1. $A=\left(\frac{3}{5}-\frac{9}{10}\right)\times\frac{15}{4}$ **2.** $B=\frac{36}{25}\times\frac{15}{16}$ **3.** $C=\dfrac{1+\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}}$

2 Écrire les nombres suivants sous la forme d'une unique puissance.

1. $A=3^7\times3^{-2}$ **2.** $B=\frac{5^5}{5^3}$ **3.** $C=2^3\times2^7\times2$

4. $D=\dfrac{3^{-1}\times9}{3^5}$ **5.** $E=\left(\frac{7^2}{7^{-2}}\right)^3$ **6.** $F=\frac{2^5}{16}\times\frac{4^4}{8^2}$

3 Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1. $A=\frac{1}{3}\times\frac{21}{5}+\frac{2}{5}$ **2.** $B=\left(1-\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)$

3. $C=\dfrac{\pi-1}{3}$ **4.** $D=\left(\frac{\sqrt{12}}{6}\right)^2$ **5.** $E=\frac{5^2}{5^3}$

4 Calculer :

1. Le quart de 68. **2.** Le tiers de -72.

3. 40 % de 30. **4.** 75 % de 12.

5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-2x+1$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. L'image de -1 par f est 0.

2. 1 est un antécédent de 0.

3. $f\left(\sqrt{2}\right)=13-2\sqrt{2}$.

4. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;9)$.

6 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A=2x(-3+x)-2x$

2. $B=3(x+1)-8x(x+2)$

3. $C=(x+1)^2-3x+1$

4. $D=(3x-7)^2-(-5x+1)$

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^2=36$ **2.** $2x^2-10=0$ **3.** $x^2+4=0$

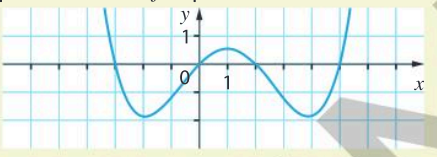
8 **1.** Déterminer les antécédents de 0 ; 1 et 9 par la fonction carré.

2. Déterminer les antécédents de $\frac{1}{2}$; 2 et $-\frac{1}{3}$ par la fonction inverse.

3. Déterminer les antécédents de 0 ; 1 et 4 par la fonction racine carrée.

Automatismes préparatoires au chapitre

9 Par lecture graphique, préciser les antécédents de 0 par la fonction f représentée ci-dessous.



10 Donner l'écriture simplifiée du réel $-\frac{b}{a}$.

1. $a=6$ et $b=4$ **2.** $a=8$ et $b=-4$

3. $a=-5$ et $b=10$ **4.** $a=\frac{1}{3}$ et $b=12$

11 Les expressions suivantes sont de la forme $ax+b$. Identifier les valeurs de a et b.

1. $3x+7$ **2.** $4x-5$ **3.** $9+x$ **4.** $\frac{x}{2}$

12 Les expressions suivantes peuvent s'écrire sous la forme $ax+b$. Identifier les valeurs de a et b.

1. $\dfrac{3x+7}{2}$ **2.** $\dfrac{6x-2}{3}$

3. $-3(1-x)$ **4.** $\frac{1}{5}(10+20x)$

13 Déterminer (en justifiant) le sens de variation des fonctions affines suivantes.

1. $f(x)=11x+9$ **2.** $g(x)=-2{,}5x-5$

3. $h(x)=6-4{,}5x$ **4.** $k(x)=\frac{2}{3}-x$

14 Résoudre les équations suivantes.

1. $5x+9=0$ **2.** $2x-7=0$

3. $3-\frac{1}{3}x=0$ **4.** $\frac{3}{7}-\frac{2}{5}x=0$

15 Réduire au même dénominateur les sommes et différences suivantes, après avoir précisé les valeurs interdites des quotients.

1. $5+\dfrac{2}{3x-1}$ **2.** $4x-\dfrac{2x+1}{x+3}$

3. $\dfrac{3x+1}{x-2}-2x$ **4.** $\dfrac{2}{3-4x}+\dfrac{x}{x-1}$

16 Factoriser les expressions suivantes.

1. $3x^2-5x$

2. $2x(x+3)-5(x+3)$

3. $(2x+1)(3x-5)+8(3x-5)$

4. $25x^2-4$

17 **Vrai ou faux ?**

1. Le produit de deux réels de même signe est positif.

2. Si deux réels ont un produit négatif, ils sont de signes contraires.

3. Si la somme de deux réels est positive, ils sont tous les deux positifs.

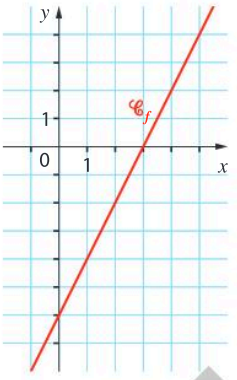
SPÉCIMEN

activités

1 Tableau de signes d'une fonction affine

Objectif
Découvrir le tableau de signes d'une fonction affine.

On considère la fonction f définie par $f(x)=2x-6$.
On a représenté sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre.



1 Résoudre, par lecture graphique, l'inéquation $f(x)>0$.

2 Recopier les phrases en complétant les pointillés par « strictement positif » ou « strictement négatif ».
a. Pour $x\in\,]-\infty\,;3[$, $f(x)$ est … .
b. Pour $x\in\,]3\,;+\infty[$, $f(x)$ est … .

3 Recopier ce **tableau de signes** en complétant les pointillés par le symbole « + » ou « − ».

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $f(x)$	…	0	…

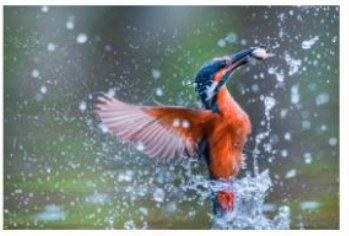
4 On considère les fonctions g et h définies par : $g(x)=-2x+3$ et $h(x)=0{,}5x+1$.
Tracer les courbes représentatives des fonctions g et h dans un repère et construire le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

Rappel
Une fonction affine f admet une expression de la forme $f(x)=ax+b$ avec a et b deux réels.
La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite.
a est son **coefficient directeur**.
b est son **ordonnée à l'origine**.

2 Martin-pêcheur

Objectif
Confronter résolutions graphique et algébrique d'une inéquation ; intérêt d'un tableau de signes.

Il faut environ deux secondes au martin-pêcheur pour quitter son perchoir, plonger, attraper un poisson et revenir à son point de départ !
On modélise le plongeon du martin-pêcheur par la fonction h définie sur $[0\,;2]$ qui donne la hauteur de son vol (en mètre par rapport au niveau de l'eau) en fonction du temps (en seconde) : $h(x)=2x^2-4{,}32x+2{,}073\,6$.
L'objectif de l'exercice est de présenter des méthodes permettant de déterminer le temps pendant lequel le martin-pêcheur est resté sous l'eau.



1 Justifier que l'intervalle de temps passé sous l'eau correspond à l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x)<0$.

2 Méthode graphique
a. Représenter la fonction h à l'aide d'un logiciel.
b. Déterminer le temps passé sous l'eau à l'aide d'une lecture graphique.

3 Méthode algébrique
a. Justifier que $h(x)=(x-0{,}72)(2x-2{,}88)$.
b. Rappeler les règles de calcul permettant de déterminer le signe d'un produit.
c. Résoudre les inéquations suivantes : $x-0{,}72>0$ et $2x-2{,}88>0$.
d. Pour déterminer le signe d'un produit, on a pour habitude de travailler à l'aide d'un **tableau de signes**.
• Compléter les lignes donnant le signe de chaque facteur.
• En déduire le signe de $h(x)$ sur $[0\,;2]$.
• Déterminer le temps (en seconde) pendant lequel le martin-pêcheur est resté sous l'eau.

Aide
Il est plus facile de développer que de factoriser…

x	0	0,72	1,44	2
Signe de $x-0{,}72$		0		
Signe de $2x-2{,}88$			0	
Signe de $h(x)$		0	0	

SPECIMEN

Cours

1 Signe d'une fonction

a Définition et tableau de signes

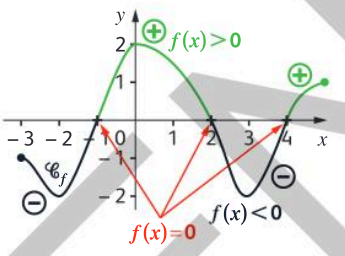
Définition On dit qu'une fonction f est **positive** sur un intervalle D si, pour toute valeur $x \in D$, on a $f(x) \geqslant 0$. De même, on dit que f est **négative** sur un intervalle D si, pour toute valeur $x \in D$, on a $f(x) \leqslant 0$.

Étudier le signe d'une fonction consiste à déterminer les intervalles sur lesquels elle est positive et ceux sur lesquels elle est négative.

On consigne souvent ces informations dans un **tableau de signes**. On peut conjecturer le signe d'une fonction en étudiant la position de sa courbe représentative par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

On considère la fonction f représentée ci-dessous.



f admet pour tableau de signes :

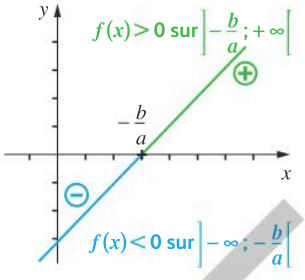
x	-3		-1		2		4		5
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

b Signe d'une expression affine $ax+b$ $(a \neq 0)$

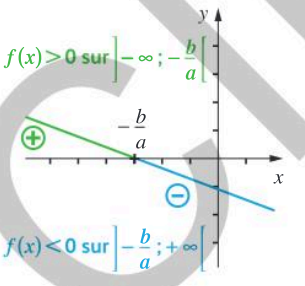
On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax+b$, avec $a \neq 0$.

Propriété Le signe de $f(x) = ax+b$ dépend du signe de a et change autour de la valeur $x = -\dfrac{b}{a}$, unique solution de l'équation $ax+b=0$.

Cas $a > 0$: f est croissante



Cas $a < 0$: f est décroissante



On résume ces informations dans un tableau de signes.

Tableau de signes pour $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-$	0		$+$	

Tableau de signes pour $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{3}x+1$

C'est une fonction affine :
- son expression est de la forme $f(x) = ax+b$;
- le signe de a permet de connaître le sens de variation ;
- elle s'annule pour $x = \dfrac{-b}{a}$

(rappel : $\dfrac{-b}{a} = -\dfrac{b}{a}$).



$f(x) = -\dfrac{1}{3}x+1$; $a = -\dfrac{1}{3} < 0$

et $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{-1}{-\frac{1}{3}} = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Démo

Démonstration algébrique

1er cas : si $a > 0$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax+b > 0$

$\Leftrightarrow ax > -b$ (Retrancher b à chaque membre de l'inégalité.)

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$ (Diviser chaque membre de l'inégalité par a qui est positif : **l'ordre est conservé.**)

2e cas : si $a < 0$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax+b > 0$

$\Leftrightarrow ax > -b$ (Retrancher b à chaque membre de l'inégalité.)

$\Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ (Diviser chaque membre de l'inégalité par a qui est négatif : **l'ordre change.**)

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Étudier le signe d'une fonction

Énoncé

On considère les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+8$ et $g(x)=15-3x$.

1. Construire le tableau de signes de chacune des fonctions f et g.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)\times g(x)=(2x+8)(15-3x)$.
Représenter la fonction h à l'aide de la calculatrice (ou d'un logiciel) et conjecturer son tableau de signes.

Solution rédigée

1. Signe de f

La fonction f est affine : elle peut s'écrire $f(x)=ax+b$ avec $a=2$ et $b=8$. Comme a est positif, sa représentation graphique est une droite « qui monte » et f s'annule en $\frac{-b}{a}=\frac{-8}{2}=-4$.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$



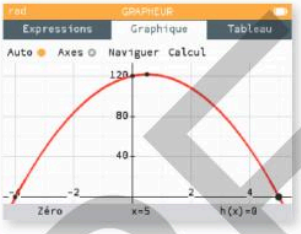
Signe de g

La fonction g est affine : elle peut s'écrire $g(x)=ax+b$ avec $a=-3$ et $b=15$. Comme a est négatif, sa représentation graphique est une droite « qui descend » et g s'annule en $\frac{-b}{a}=\frac{-15}{-3}=5$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$



2. On représente la fonction h dans une fenêtre adaptée afin de lire le signe de la fonction.



x	$-\infty$	-4		5	$+\infty$
Signe de $h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Point méthode

1. Pour trouver la valeur qui annule f, on peut résoudre l'équation $2x+8=0$.

Point méthode

1. Pour étudier le signe d'une fonction affine $x\mapsto ax+b$:
- identifier les valeurs des coefficients a et b ;
- reconnaître le sens de variation à l'aide du signe de a ;
- déterminer la valeur de x qui annule la fonction.

Point méthode

2. Une lecture graphique permet d'émettre une conjecture qu'un raisonnement algébrique permettra de démontrer ou d'infirmer.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 390 Voir exercices similaires nos 32 à 36

18 Construire le tableau de signes de chacune des fonctions affines suivantes.

1. $f : x\mapsto -5x+15$
2. $g : x\mapsto 2x+3$
3. $h : x\mapsto 7x$
4. $i : x\mapsto 5-x$

19 **1.** Représenter graphiquement la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-4x$.
2. Conjecturer alors le tableau de signes de $g(x)$.

20 On donne ci-dessous le tableau de signes d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{3}$		6	$+\infty$
Signe de f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

1. Quel est le signe de $f(0{,}5)$? de $f(-1)$?
2. Déterminer les solutions de l'équation $f(x)=0$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de $f(x)>0$.

SPÉCIMEN

Cours

2 Résolution algébrique d'inéquations

a Signe d'un produit et inéquation-produit

Méthode Pour étudier le signe du produit $A(x)\times B(x)$, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes d'un produit. On construit alors un tableau de signes bilan.

Exemple

On cherche à résoudre dans l'ensemble des réels $(x-6)(-3x-12) > 0$.

• On cherche le signe de $x-6$: pour cela on décide de chercher les valeurs de x telles que $x-6$ soit positif ou nul.

$x-6 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x-6+6 \geqslant 0+6$

$\Leftrightarrow x \geqslant 6$

• On cherche le signe de $-3x-12$: pour cela on décide de chercher les valeurs de x telles que $-3x-12$ soit positif ou nul.

$-3x-12 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -3x-12+12 \geqslant 0+12$

$\Leftrightarrow -3x \geqslant 12$

$\Leftrightarrow -3x\times\frac{1}{-3} \leqslant 12\times\frac{1}{-3}$

$\Leftrightarrow x \leqslant -4$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
Signe de $x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-3x-12$	$+$	0	$-$			$-$	
Signe du produit	$-$	0	$+$		0	$-$	

Donc $(x-6)(-3x+2)$ est strictement positif si et seulement si x appartient à l'intervalle $]-4;6[$.

Rappel

Règle des signes d'un produit
- positif × positif = positif
- positif × négatif = négatif
- négatif × négatif = positif

Remarque

En connaissant toutes les valeurs de x pour lesquelles $x-6$ est positif ou nul, on détermine le signe de $x-6$ immédiatement.
En effet, si une expression n'est pas positive, elle est négative !
Donc déterminer les valeurs de x telle que $x-6 \geqslant 0$ permet de connaître aussi les valeurs de x telles que $x-6<0$.

b Signe d'un quotient et inéquation-quotient

Méthode

Pour étudier le signe du quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$, on déterminer le signe de chaque expression puis on applique la règle des signes d'un quotient.
On présente les résultats à l'aide d'un tableau de signes (attention aux **valeurs interdites** !).

Exemple

Résolution de l'inéquation $\frac{-2x+4}{x-1} \leqslant 0$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+4$	$+$			$+$	0	$-$	
Signe de $x-1$	$-$	0	$+$			$+$	
Signe du quotient	$-$		$+$		0	$-$	

L'ensemble S des solutions est : $S =]-\infty;1[\cup[2;+\infty[$

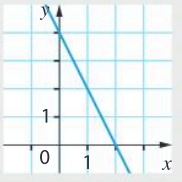
1 est la valeur interdite du quotient : dans le tableau elle est signalée par une double barre et elle est exclue de l'ensemble des solutions.

Remarque

Le numérateur est une fonction affine, on peut déterminer son signe à l'aide d'une lecture graphique.

$-2x+4$ donc $a=-2$

et $\frac{-b}{a}=\frac{-4}{-2}=2$.



SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Résoudre algébriquement une inéquation

Énoncé Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x-1)(x-2) \geqslant -5(3x-1)$ **2.** $\dfrac{x(5-2x)}{4x-8} \leqslant 0$

Solution rédigée

1. On se ramène à l'étude du signe d'un produit en regroupant dans un même membre et en factorisant l'expression.

$(3x-1)(x-2) \geqslant -5(3x-1)$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x-2)+5(3x-1) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)\big((x-2)+5\big) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+3) \geqslant 0$

On étudie le signe de chaque facteur afin de construire le tableau de signes qui permettra de déterminer le signe du produit.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau permet d'affirmer que :

$$(3x-1)(x+3) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-3] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$$

Donc l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S =]-\infty;-3] \cup \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$$

2. Pour déterminer le signe du quotient $\dfrac{x(5-2x)}{4x-8}$, on cherche le signe de x ; de $5-2x$ et de $4x-8$ afin de construire le tableau de signes.

x	$-\infty$		0		2		$2{,}5$	$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$
Signe de $5-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
Signe de $4x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
Signe du quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

Donc $\dfrac{x(5-2x)}{4x-8} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0;2[\cup [2{,}5;+\infty[$.

Point méthode

1. ATTENTION : NE PAS diviser chaque membre de l'inéquation par $(3x-1)$.
En effet, suivant les valeurs de x cette expression peut être nulle (diviser par 0 est interdit), et on ne connaît pas le signe de $(3x-1)$ (si on divise une inégalité par un négatif, l'ordre change).

Point méthode

1. Pour résoudre une telle inéquation :
- se ramener à une étude de signe en transformant en une inéquation équivalente dont le membre de droite est nul ;
- factoriser l'expression du membre de gauche.

Point méthode

1. et **2.** Pour construire le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient :
① trouver les valeurs qui annulent les facteurs et les ranger dans l'ordre croissant dans la première ligne du tableau ;
② étudier le signe de chaque facteur ;
③ utiliser la règle des signes pour compléter la dernière ligne.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 390 Voir exercices similaires nos 42 à 48

21 **1.** Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-4		$\ldots$		$+\infty$
Signe de $-2x+6$					0		
Signe de $3x+12$			0				
Signe du produit $(-2x+6)(3x+12)$			0		0		

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(-2x+6)(3x+12) \geqslant 0$

22 Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes les inéquations suivantes.

1. $(2x+10)(7-x) < 0$

2. $\dfrac{-3x+6}{-2x+1} \leqslant 0$

23 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(3x+1)(2x-2)-3x \leqslant 1$

2. $\dfrac{2x+1}{3-x} \geqslant 5$

SPECIMEN

Cours

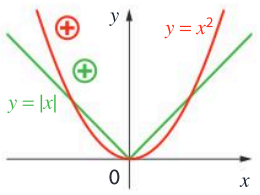
3 Signe des fonctions de référence

La représentation graphique des fonctions de référence permet de visualiser leur signe.

a Les fonctions de référence toujours positives

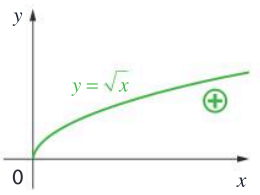
Les fonctions de référence suivantes sont toujours positives sur leur ensemble de définition.

Les fonctions carré et valeur absolue



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\lvert x \rvert$	+	0	+
Signe de x^2	+	0	+

La fonction racine carrée



x	0	$+\infty$
Signe de $\sqrt{x}$	0	+

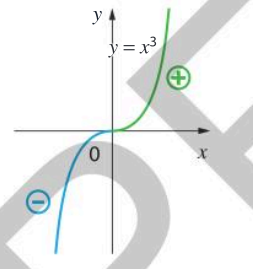
Remarque

Une fonction qui s'annule en 0 ne change pas forcément de signe pour $x = 0$.

b Les fonctions de référence qui changent de signe

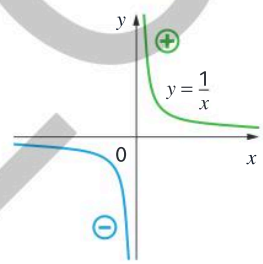
Les fonctions de référence suivantes changent de signe sur leur ensemble de définition.

La fonction cube



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^3	−	0	+

La fonction inverse



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	−	‖	+

Rappel

La fonction inverse n'est pas définie en 0.

Démo

Démonstration

On peut retrouver ces résultats à l'aide d'un tableau de signes.

$f(x) = x^2 = x \times x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x	−	0	+
Signe de x	−	0	+
Signe de x^2	+	0	+

$f(x) = x^3 = x^2 \times x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^2	+	0	+
Signe de x	−	0	+
Signe de x^3	−	0	+

Remarque

Les tableaux de signes des fonctions de référence abordées dans cette page de cours seront considérés comme connus et peuvent être utilisés sans justification.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Étudier le signe d'une fonction à l'aide des fonctions de référence

Énoncé On considère les fonctions :

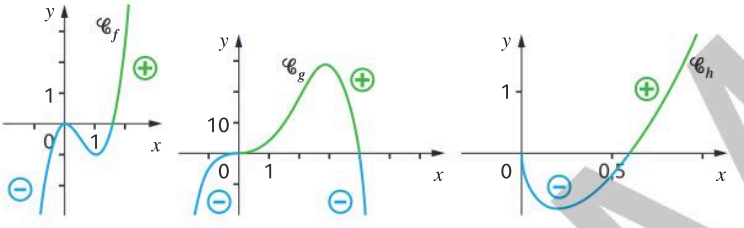
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2$;
- g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4x^3-x^4$;
- h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x)=5x\sqrt{x}-3\sqrt{x}$;

1. Représenter graphiquement f, g et h à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel. Conjecturer leur signe à l'aide d'une lecture graphique.

2. Retrouver les résultats précédents à l'aide de tableaux de signes.

Solution rédigée

1. Une lecture graphique permet de conjecturer le signe des fonctions.



On conjecture que : • $f(x)\leqslant 0$ pour $x\in]-\infty;1,5]$

• $g(x)\geqslant 0$ pour $x\in[0;4]$ • $h(x)\geqslant 0$ pour $x\in[0,6;+\infty[$

Point méthode

1. Penser à vérifier la fenêtre graphique et l'échelle des axes.

2. $f(x)=2x^3-3x^2=x^2(2x-3)$

On sait que la fonction $x\mapsto x^2$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$, donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de $2x-3$ et on a : $f(0)=0$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-3$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x)=4x^3-x^4=x^3(4-x)$

x	$-\infty$		0		4	$+\infty$
Signe de x^3		$-$	0	$+$		$+$
Signe de $4-x$		$+$		$+$	0	$-$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

$h(x)=5x\sqrt{x}-3\sqrt{x}=\sqrt{x}(5x-3)$

On sait que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est toujours positive sur $[0;+\infty[$, donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de $5x-3$.

x	0		$\frac{3}{5}$	$+\infty$
Signe de $\sqrt{x}$	0	$+$		$+$
Signe de $5x-3$		$-$	0	$+$
Signe de $h(x)$	0	$-$	0	$+$

Point méthode

2. Pour déterminer le signe d'une fonction, il est souvent plus facile de travailler sur la forme factorisée.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 391 Voir exercices similaires nos 58 à 62

24 Déterminer le signe des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé.

1. $f(x)=x^2+5$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x)=\frac{1}{x}\times\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$

3. $h(x)=x^3+\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$

25 Construire le tableau de signes des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé.

1. $f(x)=x^3(x^2+2)$ sur $\mathbb{R}$

2. $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x-1}$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

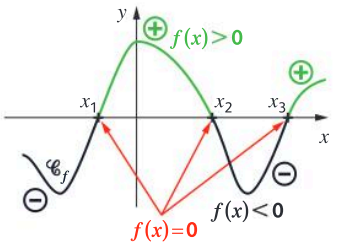
3. $h(x)=\frac{x^3}{1+\sqrt{x}}$ sur $[0;+\infty[$

SPÉCIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

Signe d'une fonction

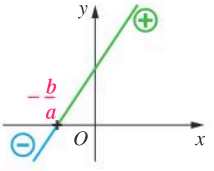


x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Remarque : avec une représentation graphique, on peut conjecturer le signe d'une fonction, et le démontrer ensuite avec un tableau de signes.

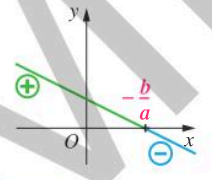
Signe d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$

Cas $a > 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

Cas $a < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

Étude de signes et tableau de signes

Expressions littérales dont le signe est immédiat

- Un carré est toujours positif.
- La somme de deux termes positifs est positive.
- La somme de deux termes négatifs est négative.

Exemples

Pour tout réel x :

- $x^2 + 5$ est strictement positif.
- $-3x^2$ est négatif ou nul.

Expressions littérales se ramenant à un produit ou à un quotient

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $ax+b$		0			
Signe de $cx+d$				0	
Signe de $(ax+b)(cx+d)$		0		0	
Signe de $\frac{ax+b}{cx+d}$		0		||	

Exemple

$A(x) = (3x+4)^2 - (x+1)^2$

Exemple

$B(x) = 4 - \frac{15x}{3x+1}$

On peut montrer que : $A(x) = (2x+3)(4x+5)$ et $B(x) = \frac{-3x+4}{3x+1}$.



Je m'exerce à démontrer

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2073

Comparer les nombres x^2 et $2x$.
x étant un nombre réel quelconque.

SPÉCIMEN

J'évalue mes connaissances

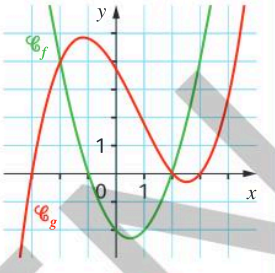
VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2074

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Voir corrigés p. 391

On a représenté ci-contre deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



	a	b	c
1. L'équation $f(x)=0$ admet pour solution :	-2	-1	1
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$ semble être :	$]-2;+\infty[$	$]-1;+\infty[\cup]2;+\infty[$	$]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$
3. L'équation $g(x)=0$ admet :	1 solution	2 solutions	3 solutions
4. L'image de 0 par la fonction f est :	-1	2	-2
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)\leqslant 0$ semble être :	$]-\infty;-3]\cup[-0{,}2;0]$	$[2;3]$	$]-\infty;-3]\cup[2;3]$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(8-2x)+(3+x)\leqslant 0$ est :	$[11;+\infty[$	$]-\infty;-11]$	$]-\infty;11]$
7. L'ensemble des solutions de l'inéquation $(8-2x)(3+x)\geqslant 0$ est :	$[-3;4]$	$]-\infty;-3]$	$[4;+\infty[$
8. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{4x-1}{2x+10}\leqslant 0$ est :	$]-\infty;-5[\cup\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$	$\left]-5;\dfrac{1}{4}\right]$	$\left[-5;\dfrac{1}{4}\right[$
9. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{-2x+3}{x+1}\leqslant 1$ est :	$\left]-1;-\dfrac{2}{3}\right]$	$]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$	$]-\infty;-1[\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

On considère l'inéquation suivante :

$$(4x-1)(3-x)\leqslant(3-x)^2$$

1. Elle est équivalente à l'inéquation suivante :

$$(3-x)(5x-4)\leqslant 0$$

2. Le tableau de signes de $(3-x)(5x-4)$ est :

x	$-\infty$		$0{,}8$		3		$+\infty$
Signe de $(3-x)(5x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=]-\infty;0{,}8]\cup[3;+\infty[$$

Partie B.

1. Pour tout réel x, on a $x^2+1\geqslant 0$.

2. Les inéquations $x(2-x)\leqslant 3x$ et $2-x\leqslant 3$ sont équivalentes.

Partie C.

Soit l'inéquation $\dfrac{2}{3x+1}\leqslant\dfrac{4}{x+1}$ (E).

1. L'inéquation (E) est équivalente à l'inéquation :

$$\frac{-10x-2}{(x+1)(3x+1)}\leqslant 0$$

2. L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]-1;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[-\frac{1}{5};+\infty\right[$$

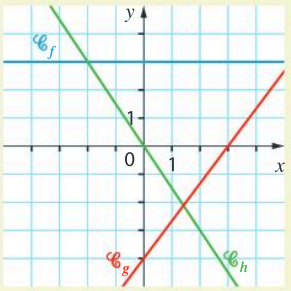
SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2075

Acquérir des automatismes

26 Construire le tableau de signes de chacune des fonctions affines représentées dans le graphique ci-dessous.



27 Compléter le tableau de signes du produit $(2+x)(7-4x)$.

x	$-\infty$	…	…	$+\infty$
Signe de $2+x$	−	0		
Signe de $7-4x$				
Signe du produit		0	0	

28 Le tableau de signes du produit $(5x+7)(3x-12)$ est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$		4	$+\infty$
Signe de $5x+7$	−	0	+		+
Signe de $3x-12$	−		−	0	+
Signe du produit	+	0	−	0	+

Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+7)(3x-12)>0$.

29 Donner les valeurs interdites des quotients suivants.

1. $A=\dfrac{3}{6-x}$ **2.** $B=\dfrac{x+2}{4x+7}$ **3.** $C=\dfrac{x(x+1)}{x+1}$

30 Donner une représentation graphique possible d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;5[\cup]10;20[$$

31 Construire les tableaux de signes des expressions suivantes après les avoir écrites sous forme factorisée.

1. $A=x^2-16$

2. $B=3(x+2)-x(x+2)$

3. $C=x^2-12$

4. $D=(x+4)^2-(5x-2)(x+4)$

Travailler les capacités du chapitre

Étudier le signe d'une fonction

Voir p. 225

32 **1.** Compléter les phrases suivantes.

a. Le produit de deux nombres … est toujours positif.

b. Le produit de deux nombres … est toujours négatif.

2. Existe-t-il des règles des signes concernant la somme ou la différence de deux nombres ? Si oui, énoncer ces règles.

33 **1.** Rappeler les étapes à mener pour construire le tableau de signes d'une fonction affine.

2. Application

Construire le tableau de signes des fonctions affines suivantes.

a. $f(x)=4x+8$ **b.** $g(x)=-5x$

c. $h(x)=21-7x$ **d.** $i(x)=15$

34 Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des expressions suivantes.

1. $2x-10$ **2.** $-3x+9$ **3.** $-5x$ **4.** $3-x$

5. $0{,}5x+4$ **6.** $\frac{2}{3}x+1$ **7.** $-2-\frac{1}{5}x$ **8.** $\frac{3}{4}x$

35 **Lire et exploiter un tableau de signes**

Une fonction f admet le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-3		1		8	$+\infty$
Signe de $f(x)$	−	0	+	0	−	‖	+

1. Déterminer le signe des nombres suivants.

a. $f(-5)$ **b.** $f(12)$ **c.** $f(-2)$

d. $f\left(\sqrt{3}\right)$ **e.** $f\left(10^3\right)$ **f.** $f\left(10^{-4}\right)$

2. a. Préciser les solutions de l'équation $f(x)=0$.

b. Préciser les éventuelles valeurs interdites de f.

3. Compléter les phrases suivantes avec les symboles $<$, $>$, $\geqslant$ ou $\leqslant$.

a. Pour tout $x\in[-3;1]$, on a $f(x)\ldots 0$.

b. Pour tout $x\in\,]8;+\infty[$, on a $f(x)\ldots 0$.

c. Pour tout $x\in\,]-\infty;-3]\cup[1;8[$, on a $f(x)\ldots 0$.

36 Une fonction g admet le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-4		1	$+\infty$
Signe de $g(x)$	−	‖	+	0	−

1. Déterminer le signe des nombres suivants.

a. $g(0)$ **b.** $g(-1)$ **c.** $g\left(\sqrt{5}\right)$

2. Préciser les éventuelles valeurs interdites.

3. Compléter les phrases suivantes.

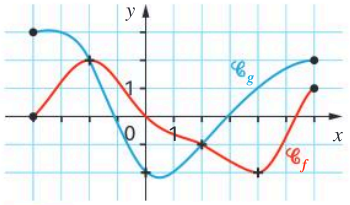
a. Pour tout $x\in\,]-4;1[$, on a $g(x)\ldots 0$.

b. g est strictement négative si et seulement si $x\in\ldots$.

SPECIMEN

Pour les exercices **37** *à* **39** *:*
- *construire le tableau de signes de la fonction f ;*
- *à l'aide d'une lecture graphique, résoudre $g(x) < 0$.*

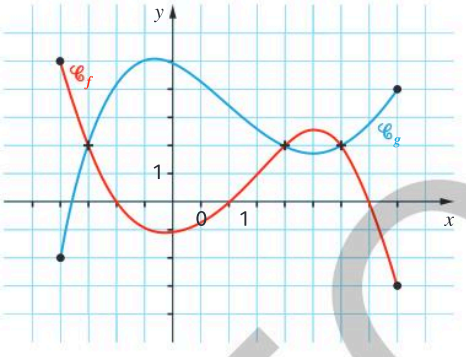
37 On a représenté graphiquement dans un repère deux fonctions f et g définies sur $[-4;6]$.



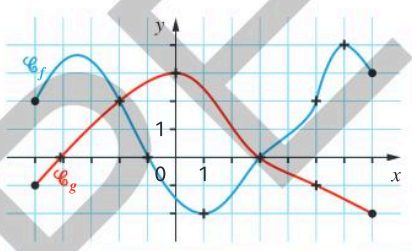


CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2076

38 On considère les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-4;8]$.



39 On considère les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-5\,;\,7]$.



40 **1.** À l'aide de la calculatrice, représenter les fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

2. Pour chacune d'elles :

a. préciser l'intervalle de définition ;

b. construire le tableau de signes.

41 **1.** Dans un repère, donner l'allure possible de la courbe d'une fonction f vérifiant :

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-5] \cup [0\,;+\infty[$$

2. f est-elle nécessairement croissante sur $[2\,;+\infty[$?

3. f peut-elle s'annuler en d'autres valeurs que -5 et 0 ?

CAPACITÉ 2 Résoudre algébriquement une inéquation

Voir p. 227

42 **1.** Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	…	…	$+\infty$
Signe de $-3x+6$			0	
Signe de $x+4$		0		
Signe de $(-3x+6)(x+4)$		0	0	

2. Résoudre alors l'inéquation $(-3x+6)(x+4) > 0$.

43 **1.** Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	…	…	$+\infty$
Signe de $-3x$				
Signe de $4-5x$				
Signe de $\dfrac{-3x}{4-5x}$				

2. Résoudre alors l'inéquation $\dfrac{-3x}{4-5x} \geqslant 0$.

Pour les exercices **44** *à* **46**, *résoudre les inéquations à l'aide d'un tableau de signes.*

44 **1.** $(3x-1)(x+5) \geqslant 0$

2. $\dfrac{2x-8}{x-7} \geqslant 0$

45 **1.** $(2-5x)(2x+6) > 0$

2. $\dfrac{3x}{x+4} < 0$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2077

46 **1.** $4x(2x+7) \leqslant 0$ **2.** $\dfrac{2x+10}{4-x} > 0$

47 On pose $A(x) = x(4-7x)(2x+9)$.
Résoudre $A(x) < 0$ en reproduisant et en complétant le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	…	0	…	$+\infty$
Signe de x					
Signe de $4-7x$					
Signe de $2x+9$					
Signe de $A(x)$					

48 On pose $B(x) = \dfrac{2x+3}{x^2(1-10x)}$.
Résoudre $B(x) > 0$ en reproduisant et en complétant le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	…	…	$\frac{1}{10}$	$+\infty$
Signe de $2x+3$					
Signe de x^2					
Signe de $1-10x$					
Signe de $B(x)$					

SPÉCIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2075

49 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x(x-10)(x+20)$$
1. Représenter la fonction f à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice.
2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est positive ou nulle.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

50 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{8}{5}\right\}$ par :
$$f(x)=\frac{(3-x)(3x-16)}{8-5x}$$
1. Représenter la fonction f à l'aide d'un logiciel (ou de la calculatrice).
2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est positive ou nulle.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)<0$ à l'aide d'un tableau de signes.

51 On considère les fonctions f et g définies par :
$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ pour } x\neq 0 \text{ et } g(x)=x$$
1. Justifier que $f(x)>g(x)\Leftrightarrow \frac{1}{x}-x>0$.
2. Soit $h(x)=\frac{1}{x}-x$. À l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $h(x)>0$.
3. Vérifier que $h(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$.
4. Résoudre l'inéquation $h(x)>0$ à l'aide d'un tableau de signes.

52 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$.
1. Justifier que $f(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow x^2-x\leqslant 0$.
2. Soit $h(x)=x^2-x$. À l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement $h(x)\leqslant 0$.
3. Résoudre l'inéquation $h(x)\leqslant 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

53 Parmi les stratégies suivantes, indiquer la plus pertinente pour résoudre les inéquations proposées.
1. $(2x-3)(x+1)<4x(x+1)$ **2.** $(2x+3)^2\geqslant 9x^2$
3. $16x^2-25>2x(8x-5)$ **4.** $\frac{5x+10}{x-1}<2$

Stratégie ① : développer chaque membre de l'inéquation et isoler l'inconnue.
Stratégie ② : se ramener à un second membre nul, factoriser le membre non nul, puis construire et exploiter un tableau de signes.
Stratégie ③ : se ramener à un second membre nul, réduire au même dénominateur le membre non nul, puis exploiter un tableau de signes.

Pour les exercices 54 et 55 :
- *se ramener à une inégalité équivalente dont le membre de droite est nul ;*
- *écrire le membre de gauche sous forme d'un produit ou d'un quotient ;*
- *résoudre l'inéquation proposée.*

54 **1.** $(2x+3)(x+1)\geqslant 4(x+1)$
2. $(2x+3)^2\leqslant 9x^2$
3. $x(x+2)<x+2$

55 **1.** $\frac{x}{x-5}>2x$
2. $\frac{3}{4+9x}>-7$
3. $\frac{1+x}{x}<\frac{x}{1+x}$

56 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-24x^2+71x-35$$
1. Représenter cette fonction à l'aide de la calculatrice, puis conjecturer l'ensemble des solutions de $f(x)<0$.
2. Montrer que $f(x)=(3x-7)(5-8x)$.
3. Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un tableau de signes.

57 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=36x^2+60x+35$$
1. Représenter cette fonction à l'aide de la calculatrice, puis conjecturer l'ensemble des solutions de $g(x)\geqslant 0$.
2. Montrer que $g(x)=(6x+5)^2+10$.
3. Démontrer la conjecture précédente.

Capacité 3 Étudier le signe d'une fonction à l'aide des fonctions de référence

Voir p. 229

Pour les exercices 58 à 62, résoudre les inéquations à l'aide d'un tableau de signes

58 **1.** $x^2(2x-1)\geqslant 0$ **2.** $\sqrt{x}(-x+6)\geqslant 0$

59 **1.** $x^3(x-2)<0$ **2.** $x^2(3-x)>0$

60 **1.** $|x|(-3x-2)<0$ **2.** $\frac{1}{x}(2x+10)\leqslant 0$

61 **1.** $x^3+x^4<0$ **2.** $x^2-3x^3<0$

62 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-x^4+3x^3-2x^2$$
1. Montrer que pour tout réel x :
$$f(x)=x^2(x-1)(-x+2)$$
2. Construire le tableau de signes de f.

SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Signe d'une fonction

63 **1.** Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Signe de $3x + \ldots$		0	

2. Pour tout réel x, on note $f(x)$ l'expression déterminée dans la question précédente. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

64 **Vrai ou faux ?**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b deux réels et $a \neq 0$.

On suppose que $f(-2) = 0$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si $a < 0$, alors pour $x < -2$, on a $f(x) < 0$.

2. $b = 2a$

3. $f(-1)$ et $f(1)$ sont de signes contraires.

65 **1.** Recopier et compléter le tableau de signes suivant par les nombres et signes qui conviennent.

x	$-\infty$	-2	$\ldots$	$+\infty$
Signe de $2x + \ldots$		0		
Signe de $4 - x$			0	
Signe du produit $(2x + \ldots)(4 - x)$		0	0	

2. Proposer une inéquation que ce tableau de signes permet de résoudre, puis la résoudre.

66 **1.** Recopier et compléter le tableau de signes suivant par les nombres et signes qui conviennent.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
Signe de $2x + \ldots$			0	
Signe de $3x + \ldots$		0		
Signe de $\ldots$		‖	0	

2. Proposer une inéquation que ce tableau de signes permet de résoudre, puis la résoudre.

67 On considère une fonction f admettant le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
Signe de f	$-$	0 $+$	0 $-$	0	$+$

On sait de plus que $f(0) = 3$ et que $f(3) = -2$. Tracer une courbe susceptible de représenter cette fonction f.

68 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = (x+1)(-2x+4)$$

2. Construire le tableau de signes de f.

Pour les exercices **69** *à* **71**, *étudier le signe des expressions sur* $\mathbb{R}$ *en précisant les éventuelles valeurs interdites.*

69 **1.** $(x+1)^2 - 16$

2. $(2x+3)^2 - (x+9)^2$

3. $-x^2 + 5x$

4. $(x+1)(-3x+5) - (x+1)^2$

70 **1.** $2(-3x+1)(x-5)$

2. $(10x-1)(7-2x)^2$

3. $x(x+1)(x+2)$

4. $-5(2-x)(3x-1)(8x-2)$

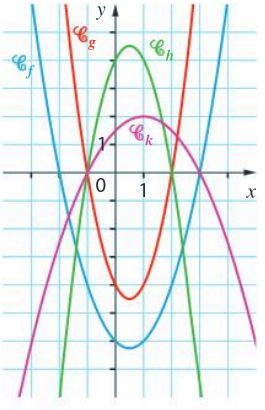
71 **Exercice guidé**

1. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{x+2}$ **2.** $\dfrac{2}{3x-5} + 1$

3. $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1+x}{x}$ **4.** $\dfrac{1}{3x+6} - \dfrac{1}{2x+1}$

Piste de résolution On pourra mettre les expressions au même dénominateur.

72 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de signes de chacune de ces fonctions.

2. Associer chacune des expressions suivantes à la fonction correspondante.

a. $2(x+1)(x-2)$

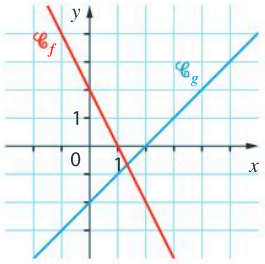
b. $(x+2)(x-3)$

c. $-0{,}5(x-3)(x+1)$

d. $-2(x-2)(x+1)$

SPECIMEN

73 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. Dresser le tableau de signes de chacune de ces fonctions.
2. En déduire le tableau de signes du produit de ces deux fonctions.
3. Déterminer, pour tout réel x, les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
4. Retrouver par le calcul les résultats des questions **1.** et **2.** à l'aide des expressions déterminées à la question **3.**

74 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2+1$$

1. Représenter la courbe de f à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice, puis émettre une conjecture sur le signe de f.
2. Justifier la conjecture.

75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-1$$

1. Représenter la courbe de f à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice, puis émettre une conjecture sur le signe de f.
2. Justifier la conjecture.

76 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^2-16x+17$$

1. Représenter la courbe de f à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice, puis émettre une conjecture sur le signe de f.
2. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x)=(2x-4)^2+1$$

3. Justifier la conjecture émise dans la question **1.**

77 **Un intervalle capricieux**
1. Construire, sur $\mathbb{R}$, le tableau de signes de :

$$(2x+6)(-3x+12)$$

2. Construire, sur $[-3;+\infty[$, le tableau de signes de :

$$(2x+6)(-3x+12)$$

3. Construire, sur $[0;+\infty[$, le tableau de signes de :

$$(2x+6)(-3x+12)$$

78 **1.** Déterminer une expression possible de la fonction f dont le tableau de signes est le suivant.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	

2. Déterminer une expression possible de la fonction g dont le tableau de signes est le suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		−	0	+	

3. Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
Construire le tableau de signes de h.
4. Soit k la fonction définie par $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Construire le tableau de signes de k.

2 Résolution algébrique d'inéquations

79 **1.** Montrer que, pour tout réel x :

$$-2x^2-x+15=(5-2x)(x+3)$$

2. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $-2x^2-x+15\leqslant 0$.

80 À l'aide d'un tableau de signes, résoudre les inéquations suivantes.
1. $-2(x+1)(x-5)>0$ **2.** $\dfrac{5x(3-x)}{2x+8}\leqslant 0$
3. $x^2(3x-1)<0$ **4.** $\dfrac{3x+1}{x-2}\times\dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$

81 Résoudre les inéquations suivantes en développant chaque membre et en isolant l'inconnue.
1. $3x+2(1-4x)\leqslant x+14$
2. $6x^2+3x<2x(3x-1)-5$

82 **1.** Factoriser $(2x-3)(x+1)-x(x+1)$.
2. Montrer que les inéquations suivantes sont équivalentes.

$$(2x-3)(x+1)<x(x+1) \text{ et } (x-3)(x+1)<0$$

3. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre alors l'inéquation $(2x-3)(x+1)<x(x+1)$.

83 **1.** Écrire sous la forme d'un unique quotient :

$$\frac{3x}{2-x}-2$$

En déduire que les inéquations $\dfrac{3x}{2-x}\geqslant 2$ et $\dfrac{5x-4}{2-x}\geqslant 0$ sont équivalentes.
2. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre cette inéquation.

SPÉCIMEN

Compétence Calculer

Pour les exercices **84** *à* **92**, *résoudre les inéquations proposées, après avoir précisé la stratégie la plus adaptée parmi les stratégies possibles. Rappel des stratégies :* Voir exercice 53

84 **1.** $-2x^2+x(2x-7)<-3x+4$
2. $(3x+2)^2-(3x+4)(3x-1)\leqslant 0$

85 **1.** $(2x-1)(3x+7)<(3x+7)(x+1)$
2. $(3x+1)^2\geqslant(5x-2)(3x+1)$

86 **1.** $(x+1)^2\leqslant(5x+3)^2$ **2.** $(6-x)^2>9$

87 **1.** $\dfrac{2x+3}{x+1}-5<0$ **2.** $\dfrac{5}{2x+1}\leqslant 3$

88 **1.** $3x^2+2x>0$ **2.** $\dfrac{1-3x}{4}\leqslant\dfrac{3x-1}{5}$

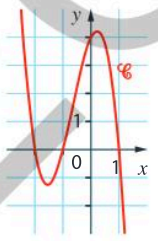
89 **1.** $3x^2-6x<2x(x-3)+16$ **2.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}>0$

90 **1.** $\dfrac{2x^2-x}{x-3}<2x$ **2.** $\dfrac{3x-2}{5-x}\leqslant\dfrac{x-4}{x+10}$

91 **1.** $(x+1)(3x-8)<(5x+2)(x-4)$
2. $\dfrac{x-1}{x}\geqslant\dfrac{4-x}{x^2}$

92 **1.** $\dfrac{x+1}{2x+3}-\dfrac{x+1}{3-x}>0$ **2.** $\dfrac{2x-1}{x+3}+\dfrac{3x}{x-3}\leqslant\dfrac{2x^2+3}{x^2-9}$

93 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-2x^3-4x^2+2x+4$$
Sur le graphique ci-contre est représentée la courbe de f, notée $\mathscr{C}$.



1. Résolution graphique
a. Construire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.
2. Résolution algébrique
a. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x)=(x+1)(-2x+2)(x+2)$$
b. Construire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$ puis résoudre l'inéquation $f(x)>0$.

94 **Un intervalle capricieux (le retour)**
1. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre sur $[0;+\infty[$ l'inéquation $(x-5)(-2x-8)>0$.
2. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre sur $[0;5]$ l'inéquation $(2x-12)(x+1)\geqslant 0$.

95 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=2x^4-9x^3+16x^2-27x+30$$
1. Vérifier que, pour tout réel x, on a :
$$f(x)=(x^2+3)(x-2)(2x-5)$$
2. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

96 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^3-4x$$
On souhaite résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.
1. Représenter la courbe de f à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice, puis conjecturer l'ensemble des solutions de cette inéquation.
2. À l'aide de deux factorisations successives, construire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$, puis résoudre l'inéquation.

Analyse d'un énoncé

97 **Étude des positions relatives**
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=-2x^2+4x+3 \text{ et } g(x)=x^2+2x-2$$
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

› Étudier les positions relatives consiste à indiquer les intervalles sur lesquels la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ et ceux sur lesquels $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$. Enfin, on précise les coordonnées des éventuels points d'intersection ou de contact. Pour cela, on pourra exploiter les fonctionnalités *Trace* et *Intersection* de la calculatrice. Voir pages Calculatrices

2. a. Justifier que, pour tout réel x, on a :
$$f(x)-g(x)=(1+x)(5-3x)$$

› Pour cela, développer et réduire **séparément** chaque membre de cette identité puis conclure.

b. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

› On exploite la forme factorisée obtenue en **2. a.** On pourra alors construire un tableau de signes.

c. Valider et préciser la conjecture graphique.

› On interprète graphiquement l'étude de signes précédente, sachant que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ lorsque $f(x)-g(x)\leqslant 0$. Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f(x)-g(x)\leqslant 0$?
De même, sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_f$ est-elle au-dessus de $\mathscr{C}_g$? La conjecture graphique est-elle validée ?

98 **Application immédiate**
Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-7}{x^2} \text{ et } g(x)=x-1$$
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Par un raisonnement algébrique, valider ou corriger cette conjecture.

99 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-10x+23$ et $g(x)=-2x^2+20x-40$.
Vérifier que, pour tout réel x, on a :
$$f(x)-g(x)=3(x-3)(x-7)$$
puis déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$.

SPÉCIMEN

100 Vrai ou faux ? LOGIQUE

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

On rappelle que deux équations ou deux inéquations sont équivalentes si les ensembles de leurs solutions sont confondus.

1. Les inéquations $x(x+3)>0$ et $x+3>0$ sont équivalentes.

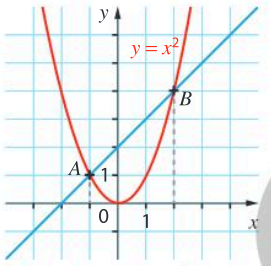
2. Les inéquations $x^2(2x-3)<0$ et $2x-3<0$ sont équivalentes.

3. Les inéquations $\dfrac{x(2-x)}{-1-x^2}\geqslant 0$ et $x(2-x)\leqslant 0$ sont équivalentes.

4. Les inéquations $\dfrac{1}{x}<1$ et $1<x$ sont équivalentes.

101 Compétence Calculer

On a représenté dans le repère ci-dessous la parabole d'équation $y=x^2$ et la droite (AB) où A et B sont deux points de la parabole d'abscisses respectives -1 et 2.



1. Par lecture graphique, déterminer sur quel intervalle la droite est au-dessus de la parabole.

2. Résolution algébrique

On note f la fonction carré et g la fonction affine représentée par la droite (AB).

a. Déterminer les coordonnées de A et B.

b. Justifier que, pour tout réel x, $g(x)=x+2$.

c. Montrer que $g(x)-f(x)=(-x-1)(x-2)$.

d. Retrouver le résultat obtenu à la question **1.** par un raisonnement algébrique.

3. Pour aller plus loin

On considère un point A' d'abscisse a et un point B' d'abscisse b sur la parabole d'équation $y=x^2$ tels que $a<b$. En conservant les mêmes notations que dans la question **2.**, montrer que :

a. $g(x)=(a+b)x-ab$

b. $g(x)-f(x)=(-x+a)(x-b)$

c. sur l'intervalle $[a\,;b]$, la droite $(A'B')$ est au-dessus de la parabole.

Info

On dit que le segment $[AB]$ est une « corde ».
Lorsque la courbe d'une fonction est en-dessous de ses cordes, alors on dit que la fonction est convexe. On vient de démontrer que la fonction carré est convexe.

102 Compétence Modéliser

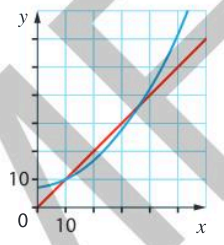


Une entreprise fabrique et vend du parfum. Le coût de production de x litres de parfum est donné, en millier d'euros, par $C(x)=0{,}02x^2+0{,}1x+7$ pour $x\in[0\,;50]$.

La recette, en millier d'euros, engendrée par la vente de x litres de parfum est donnée par $R(x)=x$.

1. Lecture graphique

On a représenté les courbes de C et R ci-dessous.



a. Associer chaque courbe à la fonction correspondante. Justifier.

b. Pour 20 litres de parfum fabriqués et vendus, l'entreprise réalise-t-elle une perte ou un gain ? Donner le montant approximatif.

c. Préciser pour quelles quantités de parfum (en L) la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice positif.

2. Résolution algébrique

La fonction bénéfice est la fonction B définie, pour tout réel x, dans $[0\,;50]$ par :

$$B(x)=R(x)-C(x)$$

Il est positif lorsque l'entreprise gagne de l'argent, ou négatif lorsqu'elle en perd.

a. Retrouver le résultat de la question **1. b.** par le calcul.

b. Vérifier que le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend x litres de parfum est $B(x)=-0{,}02x^2+0{,}9x-7$.

c. Justifier que, pour tout réel $x\in[0\,;50]$, on a :

$$B(x)=-0{,}02(x-10)(x-35)$$

d. Retrouver le résultat de la question **1. c.** par une méthode algébrique.

103 ALGO Exercice guidé

À propos d'entiers consécutifs

Déterminer tous les couples d'entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés est supérieure à 54 000.

Pistes de résolution

En notant n le premier entier naturel, son successeur est $n+1$. Exprimer alors la somme $S(n)$ des carrés de ces deux entiers en fonction de n. On peut ensuite envisager une méthode graphique, algorithmique ou l'usage d un logiciel de calcul formel.

SPECIMEN

104 L'intensité des sons est exprimée en décibel dans une échelle allant de 0 dB(A), seuil de l'audition humaine, à environ 120 dB(A), limite supérieure des bruits usuels de notre environnement. Le seuil de 85 dB(A) est le seuil de danger.



Dans une entreprise, une machine est en marche durant 7 h.
Pour tout réel t de l'intervalle de temps $[0 ; 7]$, l'intensité du son émise par cette machine, exprimée en dB(A), t heure après sa mise en marche, est donnée par :

$$I(t) = t^3 - 17{,}7t^2 + 74{,}7t + 9{,}4$$

On souhaite déterminer le nombre d'heures durant lesquelles la machine a émis un son d'une intensité dépassant le seuil de danger.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer le résultat.

2. Résolution algébrique

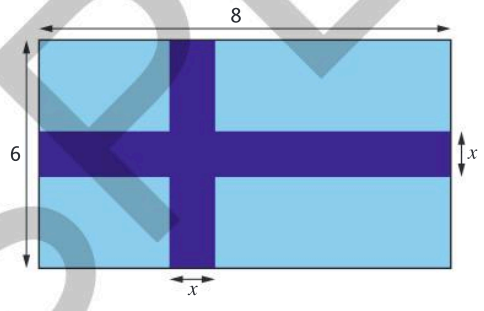
a. Montrer que, pour tout réel t de $[0 ; 7]$:

$$I(t) - 85 = (t - 1{,}5)(t - 4{,}2)(t - 12)$$

b. Par un raisonnement algébrique, valider ou corriger cette conjecture.

105 Exercice guidé

Soit un drapeau de dimensions 6 m × 8 m sur lequel on souhaite tracer une croix comme sur le dessin ci-dessous.



La largeur x de la croix doit au moins être égale à 0,5 m.
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit inférieure ou égale à l'aire restante du drapeau ?

Piste de résolution

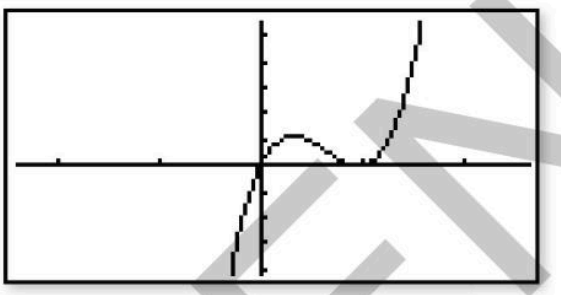
1. On pourra montrer que l'aire de la croix est égale à $14x - x^2$.
2. On pourra développer $(x-2)(x-12)$.

106 Compétence Raisonner

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 9x^3 - 17x^2 + 8x$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient la représentation ci-dessous.



1. Conjecturer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

2. a. Justifier que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x(9x - 8)(x - 1)$$

b. Résoudre alors algébriquement l'inéquation $f(x) < 0$ et confronter cette résolution avec le résultat obtenu à la question **1.**

c. En exploitant les fonctionnalités de la calculatrice, retrouver le résultat obtenu à la question **2. b.**

Voir pages Calculatrices

3 Signes des fonctions de référence

107 Étudier le signe sur l'intervalle I des expressions suivantes :

1. $x^4 + 3x^3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $x^4 - 4x^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $x^3 - 9x$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $\sqrt{x} + x$ sur $I = [0 ; +\infty[$

108 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^3 + 2x$ et $g(x) = x^4 + 2x$

1. Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = x^3(3 - x).$$

2. Construire le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.
3. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

109 On considère les fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 16\sqrt{x}$$

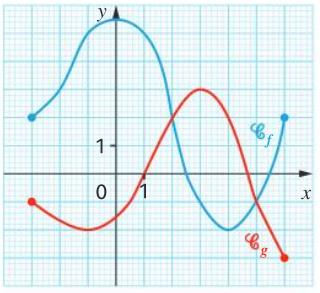
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Par un raisonnement algébrique, valider ou corriger cette conjecture.

SPECIMEN

BILAN

110 20min Résolutions graphiques

On considère deux fonctions f et g représentées ci-contre.



1. Sur quel intervalle les fonctions f et g sont-elles définies ?

2. À l'aide d'une lecture graphique, construire les tableaux de signes des fonctions f et g.

3. En déduire les solutions de l'inéquation :

$$f(x)\times g(x)<0$$

111 25min Tableaux de signes

1. a. Compléter le tableau de signes afin de déterminer le signe du produit $(3x+1)(4-2x)$.

x	$-\infty$	…	…	$+\infty$
Signe de $3x+1$		0		
Signe de $4-2x$			0	
Signe du produit $(3x+1)(4-2x)$		0	0	

b. Résoudre alors l'inéquation suivante :

$$(3x+1)(4-2x)\geqslant 0$$

2. a. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe du quotient $\dfrac{x(3x-6)}{1-x}$.

b. Résoudre alors l'inéquation suivante :

$$\frac{x(3x-6)}{1-x}\leqslant 0$$

112 30min Inéquations

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x-3(x+5)<3x-(2x-3)$

2. $(2x+1)^2>3x(2x+1)$

3. $4x^2\leqslant(2x+3)^2$

113 25min Avec des quotients

1. Montrer que, pour tout réel x distinct de 1 et -2, on a l'identité suivante :

$$\frac{1}{2x+4}-\frac{2}{x-1}=\frac{-3x-9}{(x-1)(2x+4)}$$

2. Résoudre alors l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{2x+4}\geqslant\frac{2}{x-1}$$

114 40min Inéquations et bénéfice

Une entreprise de menuiserie fait une étude sur la fabrication de chaises en bois pour une production comprise entre 5 et 70 chaises par jour.

Le coût de production $C(x)$, exprimé en euro, pour x chaises fabriquées est donné par la formule :

$$C(x)=x^2-10x+500$$

Le prix de vente d'une chaise est de 50 €.

1. a. Calculer le coût de production de 20 chaises.

b. Calculer la recette pour la vente de 20 chaises. En déduire le bénéfice réalisé pour 20 chaises.

2. Exprimer en fonction de x, la recette $R(x)$ réalisée pour la vente de x chaises.

3. a. À l'aide de la calculatrice, représenter, dans une fenêtre adaptée, les fonctions C et R.

b. Conjecturer alors quels sont les nombres de chaises fabriquées et vendues qui permettent à la menuiserie de réaliser un bénéfice.

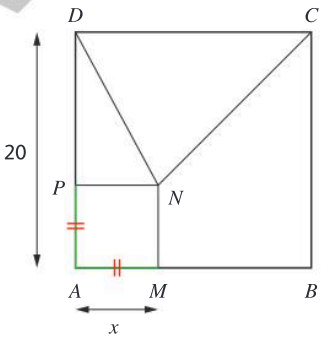
4. Vérifier que les inéquations $R(x)\geqslant C(x)$ et $(50-x)(x-10)\geqslant 0$ sont équivalentes.

Justifier alors la conjecture émise à la question **3. b.**

115 40min Comparaison de deux aires

On considère un carré $ABCD$ de côté 20. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$. On note x la distance AM. Les points P et N sont tels que $AMNP$ soit un carré avec $P\in[AD]$.

On note $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ et $g(x)$ l'aire du triangle DNC.



Partie A. Expression de $f(x)$ et $g(x)$

1. Dans quel intervalle la longueur x peut-elle varier ? On note I cet intervalle dans la suite.

2. Exprimer la longueur DP en fonction de x.

3. Démontrer alors que, pour tout réel x de I, on a :

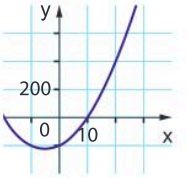
$$f(x)=x^2 \text{ et } g(x)=-10x+200$$

Partie B. Lectures graphiques

On pose $h(x)=f(x)-g(x)$. Le graphique ci-dessous donne la représentation de la fonction h.

1. Donner le tableau de signes de h sur $[0;20]$.

2. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)>g(x)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.



Partie C. Résolution algébrique

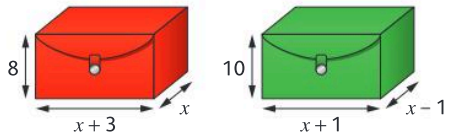
1. Montrer que l'inéquation $f(x)>g(x)$ est équivalente à $(x-10)(x+20)>0$.

2. En déduire les solutions de $f(x)>g(x)$ sur $[0;20]$.

SPECIMEN

116 Des coffres et leurs volumes

Deux coffres ont la forme de parallélépipèdes rectangles et leurs dimensions sont indiquées sur les figures ci-dessous, où x représente un entier supérieur ou égal à 2.



On souhaite déterminer les valeurs de x pour lesquelles le volume du coffre vert est supérieur à celui du rouge. On note $r(x)$ (resp. $v(x)$) le volume du coffre rouge (resp. vert) en fonction de x.

1. Donner l'expression de $r(x)$ et de $v(x)$.

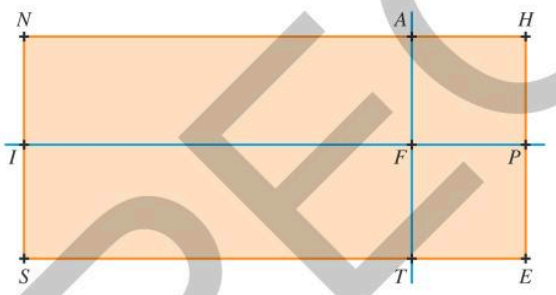
2. Justifier que, pour tout $x \in [2;+\infty[$:

$$v(x) > r(x) \Leftrightarrow 2\left((x-6)^2 - 41\right) > 0$$

3. En déduire la réponse à la question posée en introduction.

117 PRISE D'INITIATIVES Somme d'aires

- $SEHN$ est un rectangle tel que $SE = 12$ et $EH = 8$.
- P est un point mobile sur le segment $[EH]$.
- La droite (TA) est parallèle à la droite (EH) et la droite (PI) à la droite (SE) : elles se coupent en F de sorte que $TEPF$ soit un carré.



1. Vérifier que $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$.

2. Déterminer les positions du point P telles que la somme des aires du carré $TEPF$ et du rectangle $FANI$ soit inférieure aux deux tiers de l'aire du rectangle $SEHN$.

118 Exercice guidé

L'amitié n'a pas de prix

Pour les 18 ans de Sarah, ses amis se sont cotisés pour lui offrir un cadeau dont le prix p, en centaine d'euros, est le plus grand réel positif vérifiant l'inéquation $x + \dfrac{81}{x} \leqslant 18$. Déterminer la valeur de p.

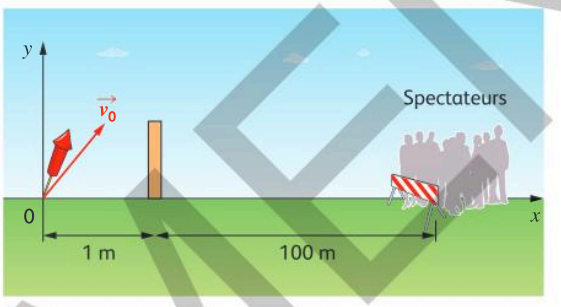
Piste de résolution Factoriser à l'aide d'une identité remarquable.

119 Exercice guidé

Trajectoire parabolique sous contrainte

Lors d'un spectacle, une fusée doit être lancée du sol avec la vitesse initiale v_0 (en m.s^{-1}).

Son aire de lancement est située derrière un mur, de hauteur 2 m, placé à 1 m du point de lancement de la fusée. Les spectateurs sont placés à 100 m du mur, derrière des barrières de sécurité.



1. On admet que la trajectoire de la fusée peut être décrite par $y = \dfrac{-50}{v_0^2} \times x^2 + 3x$ où x et y sont les coordonnées de la fusée.

Quelles sont les vitesses possibles v_0 (en m·s^{-1}) pour que la fusée passe au-dessus du mur, tout en retombant, en cas de non-explosion en l'air, avant les barrières de sécurité ?

On précise pour finir que, pour des raisons techniques, v_0 ne peut dépasser 200 km·h^{-1}.

2. Donner la vitesse minimale et la vitesse maximale en km·h^{-1}.

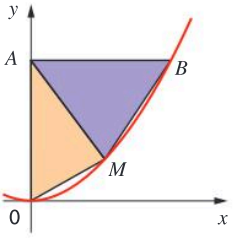
Pistes de résolution

1. • La fusée « passe au-dessus du mur » se traduit par « l'ordonnée au point d'abscisse 1 est supérieure ou égale à 2 ».
• La fusée « retombe avant les barrières de sécurité » se traduit par « pour $x = 101$, il faut $y \leqslant 0$ ».
2. On admettra que ces deux inégalités permettent d'encadrer v_0^2.

120 Exercice guidé

Aires et fonction carré

Les points A et B ont pour coordonnées dans un repère $(O;I;J)$: $A(0;1)$ et $B(1;1)$.



Le point M est un point situé sur la courbe de la fonction carré, sur « l'arc de courbe » entre O et B.

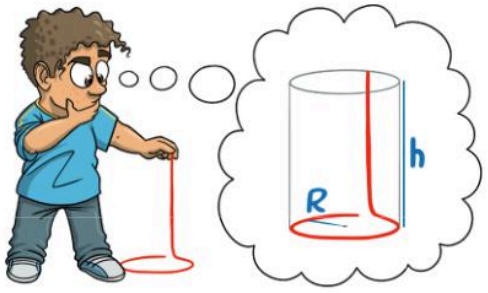
Où doit-on placer le point M si l'on souhaite que le triangle OAM ait une aire supérieure à celle du triangle AMB ?

Piste de résolution Pour chacun des triangles, tracer la hauteur issue de M.

SPECIMEN

121 La ficelle

Samuel joue avec un bout de ficelle de 240 cm : il forme un cercle parfait et tend à la verticale le bout restant (voir image). Il imagine le cylindre ayant pour base le cercle formé (de rayon R) et pour hauteur le bout de ficelle restant (de longueur h).



1. a. Justifier que $h \in [0\,;240]$ et que $R = \dfrac{240-h}{2\pi}$.

b. Démontrer que le volume du cylindre, en fonction de h, est donné par :

$$V(h) = \frac{1}{4\pi} \times h(240-h)^2$$

c. À l'aide d'un logiciel, représenter la fonction V sur $[0\,;240]$ et lire la valeur de h permettant d'obtenir le volume maximal.

2. a. Montrer que, pour tout $h \in [0\,;240]$:

$$h(240-h)^2 - 2\,048\,000 = (h-320)(h-80)^2$$

b. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $h(240-h)^2 - 2\,048\,000$ sur $[0\,;240]$.

c. Montrer que, pour tout $h \in [0\,;240]$:

$$V(h) - V(80) = \frac{1}{4\pi}\left(h(240-h)^2 - 2\,048\,000\right)$$

d. En déduire le signe de $V(h) - V(80)$ sur $[0\,;240]$.

e. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

122 Vitesse moyenne

Louna parcourt les 250 km séparant Québec de Montréal à la vitesse de 60 km.h^{-1}.

1. Au retour, elle roule à 100 km.h^{-1}. Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet (arrondir à l'entier).

2. Zorana, pilote de course, pense arriver à obtenir une vitesse moyenne d'au moins 116 km.h^{-1} sur l'ensemble du trajet (la route lui est alors réservée !).

a. À l'aller, sa vitesse est 60 km.h^{-1}, et on note x sa vitesse au retour. Montrer que sa vitesse moyenne est donnée par : $v(x) = \dfrac{120x}{60+x}$.

b. Résoudre $v(x) \geqslant 116$ et conclure dans le contexte de l'exercice.

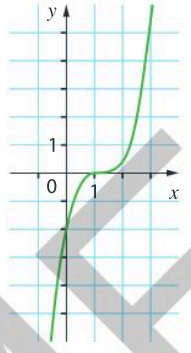
Info

Sur les autoroutes canadiennes, les vitesses minimales et maximales sont respectivement 60 km·h^{-1} et 100 km·h^{-1}

123 Une cubique

Le graphique ci-dessous représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3{,}7x^2 + 4{,}5x - 1{,}8$$



1. À l'aide d'une lecture graphique, que semble-t-on pouvoir conjecturer concernant le sens de variation de f sur $[0\,;3]$?

2. Montrer que, pour tout réel x :

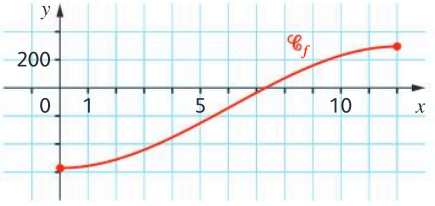
$$f(x) = (x-1)(x-1{,}2)(x-1{,}5)$$

3. Dresser le tableau de signes de f sur $[0\,;3]$.

4. En déduire la validité de la conjecture émise à la question **1.**

124 PYTHON Recherche de solution

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto 18x^2 - x^3 - 576$ pour $x \in [0\,;12]$.



1. À l'aide d'une lecture graphique encadrer par deux entiers la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;12]$.

2. L'algorithme suivant permet d'obtenir, avec une précision de 0,1, la plus grande valeur de x telle que $f(x) < 0$.

Quelle valeur donne-t-il en fin d'exécution ?

```
def f(x):
    return 18 * x**2 - x**3 -576

valeur = 7
while f(valeur)<0:
    valeur = valeur + 0.1
print(valeur)
```

3. Modifier le programme afin d'obtenir une valeur approchée de l'équation $f(x) = 0$ avec une précision de 10^{-4}.

SPECIMEN

exercices — Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

125 Compréhension d'énoncé

On considère l'énoncé d'exercice suivant.

On souhaite résoudre l'inéquation suivante :

$$11x^2 \geqslant 2x^3 + 12x \quad (\mathrm{I})$$

I. En utilisant la calculatrice ou un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer l'ensemble des solutions de cette inéquation.

II. a. Justifier que, pour tout réel x, on a :

$$-2x^3 + 11x^2 - 12x = x(4-x)(2x-3)$$

b. En déduire la résolution de l'inéquation (I).

c. Confronter les deux méthodes.

Répondre aux questions suivantes.

1. Que signifient les verbes surlignés ?

2. Pour justifier l'identité de la question **II. a.**, on peut transformer un membre pour retrouver l'autre.
Quel est le membre le plus simple à transformer ici ? Traiter cette question.

3. Pour résoudre la question **II. b.**, on est invité à utiliser la question **II. a.** Pour cela, transformer l'inéquation (I) en une inéquation équivalente faisant intervenir l'expression $-2x^3 + 11x^2 - 12x$.

4. Terminer la résolution de l'exercice.

126 Analyser une démarche

On demande à Éric de résoudre l'inéquation $\dfrac{3-x}{x+5} \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

Copie d'Éric

$3-x$ s'annule en 3 et $x+5$ s'annule en -5.

x	0		-5		3	$+\infty$
Signe de $3-x$	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+5$	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$		$-$	

L'ensemble solution est donc $[-5\,;3[$.

1. Repérer la ou les erreurs commises par Éric.

2. Proposer une résolution de l'inéquation.

127 Deux incontournables

1. a. Montrer que les inéquations $(3-2x)(x-5) < 0$ et $(3-2x)(5x+1) < (4x+6)(3-2x)$ sont équivalentes.

b. Résoudre l'inéquation :

$$(3-2x)(5x+1) < (4x+6)(3-2x)$$

2. a. Montrer que les inéquations $\dfrac{4x+1}{x-3} \geqslant 5$ et $\dfrac{-x+16}{x-3} \geqslant 0$ sont équivalentes.

b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{4x+1}{x-3} \geqslant 5$.

Aller plus loin

128 Choisir l'écriture la plus adaptée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2-x)(2x-1)$$

On a effectué les calculs ci-contre sur un logiciel de calcul formel.

Calcul formel

1 : f(x):=(2-x)(2x-1) → f(x) := $-2x^2 + 5x - 2$

2 : Développer(f(x)) → $-2x^2 + 5x - 2$

3 : FormeCanonique(f(x)) → $-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

1. Montrer que ces trois expressions de $f(x)$ sont bien égales pour tout réel x.

2. En utilisant l'écriture la plus adaptée de $f(x)$, résoudre les inéquations suivantes.

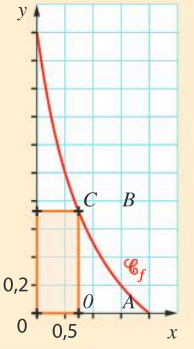
a. $f(x) \geqslant 0$ **b.** $f(x) < -2$ **c.** $f(x) > -\dfrac{7}{8}$

129 PRISE D'INITIATIVES

On a représenté ci-contre l'allure d'une rampe de skateboard de 2 mètres de haut. Celle-ci peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x) = \dfrac{-x+2}{x+1}$.

On construit un panneau d'affichage contre cette rampe. Ce panneau est modélisé par le rectangle $OABC$ avec O l'origine du repère, B un point de la courbe, A et C tels que $OABC$ est un rectangle.

Pour quelles valeurs de x la surface du panneau est supérieure à 0,5 m² ?



COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2078

130 PRISE D'INITIATIVES

1. Déterminer une expression de fonction f dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Déterminer une expression de fonction g dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		0	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$		$-$	

COUP DE POUCE
hachette-clic.fr/26de2079

SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

LOGICIEL GÉOMÉTRIE

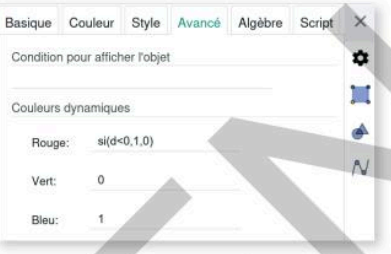
Des inéquations en géométrie

Objectif
Comparer deux expressions en étudiant le signe de leur différence.

Ce TP utilise la propriété d'un point nommée *Couleurs dynamiques* du logiciel GeoGebra. D'après la copie d'écran ci-contre :

- Si la valeur de d est strictement négative, alors les composantes RVB définissant la couleur du point seront $(1;0;1)$, ce qui donne du rose.
- Sinon les composantes RVB seront $(0;0;1)$, ce qui donne du bleu.

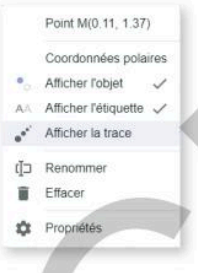
Ainsi, la couleur du point change en fonction du signe de d.



Partie A Préparation

Pour vérifier les conjectures, les calculs seront effectués dans un repère orthonormé d'origine O.

1. Placer les points $A(-1;0)$ et $B(1;0)$.
2. En barre de saisie :
   d = Distance(A, B)
3. Le point M est un point quelconque. Renseigner ses propriétés de *Couleurs dynamiques*. Sélectionner l'option *Afficher la trace*.



4. Déplacer le point M.
5. Expliquer pourquoi il ne change pas de couleur.

Rappel
Dans un repère orthonormé si les points A et M ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x\,;y)$, on a $AM^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$.

Dans la suite, les coordonnées du point M sont $(x\,;y)$.

Partie B Ensemble des points M tels que $AM^2<BM^2$

1. Recherche

a. Saisir d=Distance(A,M)^2-Distance(B,M)^2

b. Déplacer le point M, conjecturer la nature de l'ensemble des points M vérifiant $AM^2<BM^2$.

2. Démonstration

a. Exprimer d en fonction de x.

b. Résoudre l'inéquation $d<0$ et interpréter le résultat.

Partie C Ensemble des points M tels que $AM^2<kBM^2$

1. Choisir une valeur de k positive et différente de 1.
2. Saisir d=Distance(A,M)^2-k*Distance(B,M)^2 (remplacer k par la valeur choisie).
3. Déplacer le point M, conjecturer la nature de l'ensemble des points M vérifiant $AM^2<kBM^2$.

Info
Cette conjecture pourra être démontrée en classe de 1re.

Partie D Ensemble des points M tels que $AM^2+BM^2<4$

1. Recherche

a. Déterminer l'expression de d qui convient pour conjecturer graphiquement la résolution de cette inéquation et la saisir.

b. Déplacer le point M, conjecturer la nature de l'ensemble des points M vérifiant $AM^2+BM^2<4$.

2. Démonstration

a. Donner l'expression de OM^2.

b. Exprimer d en fonction des coordonnées x et y du point M.

c. Résoudre l'inéquation $d<0$ et interpréter le résultat.

3. Reprendre les questions pour déterminer l'ensemble des points M solutions de $AM^2+BM^2<2$.

SPÉCIMEN

TP Mener une recherche

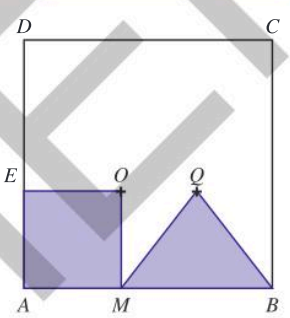
Compétence Chercher et communiquer

TRAVAIL DE GROUPE *Pour résoudre les problèmes de cette page, on pourra mobiliser l'ensemble des outils nécessaires : méthodes du chapitre, calculatrice, outils logiciels (géométrie dynamique, tableur, calcul formel…) et algorithmes. Après une réflexion individuelle, on pourra éventuellement échanger et discuter en groupe, des pistes de résolution envisagées et proposer une solution commune pour chacun des problèmes.*
Enfin, on pourra rendre compte des recherches du groupe via une présentation orale avec un support adapté (diaporama, affiches, etc.).

TP1 Comparaison d'aires

Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 10 cm.
M est un point mobile sur le segment $[AB]$.
On construit, comme sur la figure représentée ci-contre, dans le carré $ABCD$:
① un carré $AMOE$ de côté $[AM]$.
② un triangle isocèle MBQ de base $[MB]$ et dont la hauteur est égale au côté AM du carré.

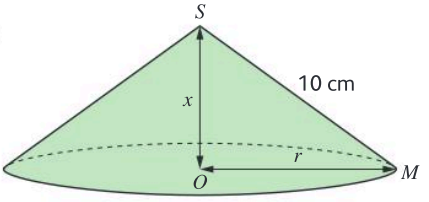
Pour quelles positions du point M l'aire du triangle MBQ est-elle supérieure à celle du carré $AMOE$?



TP2 Chapeau chinois…

On considère un cône de sommet S et de génératrice 10 cm.

Pour quelles valeurs de x le volume de ce cône est-il inférieur à 200 cm^3 ?



TP3 Panneau de signalisation

On souhaite construire un nouveau panneau de signalisation carré de dimensions 50 cm sur 50 cm avec une flèche blanche comme indiqué dans le schéma ci-contre.
Comment choisir les dimensions du petit carré bleu dans le coin supérieur gauche pour que l'aire de la flèche soit supérieure au cinquième de la surface du panneau ?



TP4 Un problème de distance

On considère un carré $ABCD$ de côté 10. E est un point mobile sur le segment $[AB]$.
On place sur la demi-droite $[BC)$ à l'extérieur du segment $[BC]$ le point F tel que $CF = AE$.
La droite (EF) coupe le segment $[DC]$ en G.
Où placer le point E pour que la distance GC soit inférieure à 1,5 ?

SPECIMEN

CHAPITRE

10 Variations d'une fonction – Extremums

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Mettre en relation représentation graphique et tableau de variations
- CAPACITÉ 2 Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction
- CAPACITÉ 3 Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine
- CAPACITÉ 4 Comparer des images
- CAPACITÉ 5 Résoudre un problème d'optimisation



Au fil du temps

La notion intuitive de fonction comme relation entre deux objets date de l'Antiquité. Au XVII^{e} siècle, Pierre de Fermat met en place la notion fondamentale d'équation d'une courbe. En 1673, Gottfried Leibniz utilise pour la première fois le mot *fonction* et en 1718, Jean Bernoulli en donne une première définition. La notation $f(x)$ n'apparaît qu'en 1734 chez Leonhard Euler. C'est lui qui précise la notion de fonction, en donne une nouvelle définition générale et fait du concept des fonctions un concept fondamental des mathématiques.

OFFICIAL

Des maths partout !

L'outil des fonctions numériques est présent dans toutes les sciences. Il permet de réaliser des modélisations dès qu'une quantité varie *en fonction* d'une autre (ou de plusieurs autres…). Par exemple, en plongée sous-marine, la pression hydrostatique est une fonction croissante de la profondeur. Plus on est profond, plus la pression exercée par l'eau est grande.



Récif de corail, mer Rouge d'Égypte.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2080

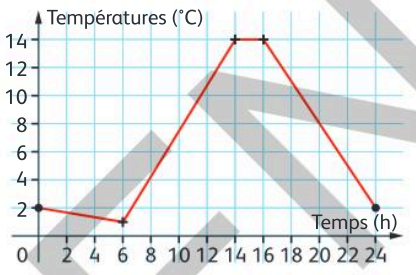
Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Exploiter une représentation graphique

On a représenté ci-contre la fonction numérique donnant l'évolution de la température (en °C) en fonction de l'heure un 28 mars à Charlieu.



1. Quelle était la température à 8 h ?

2. À quelle(s) heure(s) a-t-il fait 8 °C ?

3. À quelles heures a-t-il fait plus de 4 °C ?

4. Comment peut-on décrire l'évolution des températures entre 6 h et 14 h ?

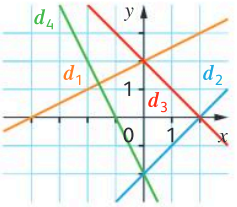
5. Quelle a été la température minimale ? À quelle heure l'a-t-on observée ?

C Revoir les fonctions affines

On considère les fonctions affines f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -2x - 2$; $g(x) = 0{,}5x + 2$

$h(x) = x - 2$; $k(x) = 2 - x$



1. Ces fonctions sont représentées ci-contre. Associer chaque fonction à sa représentation graphique.

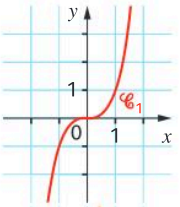
2. Construire les tableaux de signes des fonctions f, g, h et k.

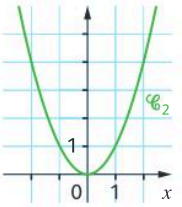
D Fonctions de référence

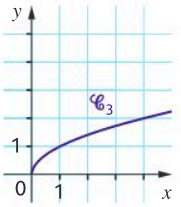
Associer à chacune des fonctions de référence, sa représentation graphique, son domaine de définition et son expression algébrique :

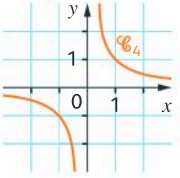
Fonctions de référence : fonction carré, fonction inverse, fonction cube, fonction racine carrée, fonction valeur absolue

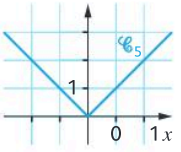
Représentations graphiques :











Ensembles de définition :

$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$.

Expressions algébriques :

- $f(x) = \sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = |x|$
- $i(x) = x^2$
- $k(x) = x^3$

SCOLIEN

automatismes

Automatismes transversaux

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $12x-5=7$ **2.** $7x+2=-3x-7$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x+1\leqslant 2x+7$ **2.** $x+2>5(6+x)$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

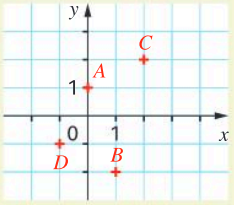
1. $(2x-3)(x+5)=0$ **2.** $x^2-36=0$

4 Factoriser les expressions suivantes.

1. $21u^3-9u^2+6u$ **2.** $4t^2-8t+4$

3. $(x-5)(2x+3)-4x-6$ **4.** $(T+1)(T-3)+T^2-1$

5 On considère le repère orthonormé ci-dessous. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.



6 Écrire sous la forme d'une unique puissance les résultats des calculs suivants.

1. $7^4\times 7^{-12}\times\left(7^8\right)^2$ **2.** $\dfrac{3^3\times 3^{-1}}{3^5}$

3. $\dfrac{9^2\times 9^4}{9^{10}\times 9^{-1}}$ **4.** $\left(2^3\right)^{-4}\times 2^6\times 2^4$

7 Écrire les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}\right)$ **2.** $\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\div 11$

3. $\dfrac{9}{7}\div\dfrac{3}{14}$ **4.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}-1$

8 Dans chaque cas, exprimer la variable R en fonction des autres variables.

1. $U=R\times I$ **2.** $P\times V=n\times R\times T$

9 Dans chaque cas, exprimer la variable x en fonction des autres variables.

1. $3x+1=5y^2$ **2.** $2y^2=y^2-3x+1$

3. $\dfrac{5z}{x}=2$ **4.** $\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{1}{t}$

10 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{5}$ avec $a\in\mathbb{Z}$.

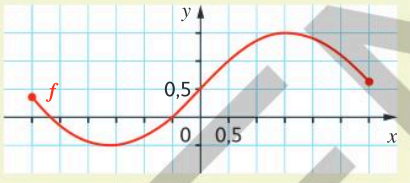
1. $\sqrt{5\times 16\times 36}$ **2.** $3\sqrt{5}+\sqrt{125}-4\sqrt{20}$

3. $\sqrt{80}+2\sqrt{45}-7\sqrt{5}$ **4.** $\dfrac{\sqrt{5\times 8}}{\sqrt{2}}$

Automatismes préparatoires au chapitre

11 **Vrai ou faux ?**

On donne la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



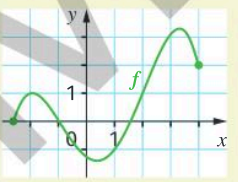
1. Le nombre réel 0 ne possède aucun antécédent.

2. $f(0)=0{,}5$

3. L'équation $f(x)=1$ possède une unique solution.

4. Le seul antécédent de 0,5 est égal à 1.

12 On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Déterminer l'image de -1 par f.

3. Déterminer le (ou les) éventuel(s) antécédent(s) de 2 par f.

4. Donner la valeur de $f(1)$.

5. Donner, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1;4]$, un encadrement de $f(x)$.

6. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0{,}5$?

7. Résoudre l'équation $f(x)=1$.

13 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=9-4x^2$$

1. Déterminer l'image par f de :

a. 2 **b.** -1 **c.** 0

2. Déterminer le ou les éventuel(s) antécédent(s) par f de :

a. 0 **b.** 9 **c.** 12

14 a et b sont des réels tels que $a>0$ et $b<0$. Déterminer le signe des expressions suivantes.

1. ab **2.** $a-b$

3. $2a+b^2$ **4.** $\dfrac{b}{-3}$

15 a et b étant des réels non nuls, justifier que :

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

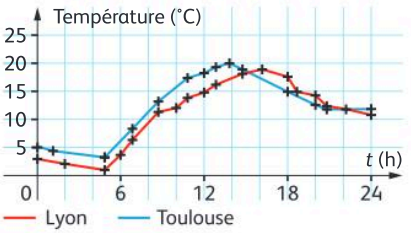
SPECIMEN

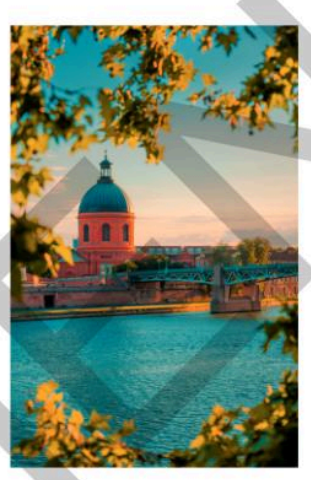
Activités

1 Variations de températures

Objectif
Prendre contact avec les variations et les extremums d'une fonction.

On a reproduit ci-dessous le relevé des températures dans les villes de Lyon et de Toulouse sur la journée du 29 avril 2017. Source : infoclimat.fr





On note f et g les fonctions qui, à chaque instant t (en heure), associent respectivement la température dans la ville de Lyon et de Toulouse, et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

1 **a.** Sur quel intervalle I les fonctions f et g sont-elles définies ?
b. Proposer une plage horaire sur laquelle la température à Lyon augmente constamment.
De même proposer un intervalle sur lequel f est décroissante.
c. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui décrit le comportement de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;24]$.

t	0	5	…	24
$f(t)$	3	↘		1

d. De la même façon, construire le tableau de variations de la fonction g.

2 **a.** Quelle est la température maximale à Toulouse sur la plage horaire $[0\,;24]$? À quelle heure cette température est-elle atteinte ?
b. Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;24]$?

Info
Ce tableau complet est le **tableau de variations** de f.

Info
Ce nombre est le **maximum** de g **sur l'intervalle** $[0\,;24]$.

2 Sens de variation de la fonction carré

Objectif
Étudier les variations d'une fonction de référence.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1 À l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variations de f.

2 On souhaite démontrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
On considère deux nombres réels quelconques a et b tels que $0 \leqslant a < b$.
On souhaite comparer leurs carrés a^2 et b^2.
a. Après avoir factorisé $a^2 - b^2$, déterminer le signe de $a - b$, celui de $a + b$ et en déduire le signe de $a^2 - b^2$.
b. Comparer alors a^2 et b^2 puis conclure.

3 Montrer de même que la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

4 Sans calcul, comparer les nombres suivants.
a. $1{,}7^2$ et $1{,}3^2$ **b.** 4^2 et π^2 **c.** $(-1{,}7)^2$ et $(-2{,}1)^2$ **d.** $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ et $\left(\frac{3}{6}\right)^2$

Info
Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si elle **conserve le sens des inégalités** sur I, autrement dit si : quels que soient les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.

SPECIMEN

Cours

1 Variations d'une fonction, extremums

On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a Variations d'une fonction

Définition La fonction f est :

- **strictement croissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.
- **strictement décroissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

Définition

- La fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle I si f est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.
- La fonction f est **constante** sur l'intervalle I lorsque pour tous nombres a et b de I, on a $f(a) = f(b)$.

Définition

Le **tableau de variations** d'une fonction f schématise les variations de cette fonction. Il est composé de **deux lignes**.

- La première ligne indique les bornes de l'ensemble de définition de f et les valeurs en lesquelles f change de sens de variation.
- La seconde ligne indique par des flèches (montantes ou descendantes) les « sens de variations » de f.

x	a		x_1		x_2		b
$f(x)$	$f(a)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(b)$

On y place les images correspondant aux réels de la 1re ligne.

Remarque

Étudier les variations d'une fonction, c'est donner les intervalles sur lesquels elle est croissante, et ceux sur lesquels elle est décroissante. En dressant par exemple un tableau de variations.

b Extremums d'une fonction

Définition

- Le **minimum** m de la fonction f sur l'intervalle I (lorsqu'il existe) est égal à la **plus petite image possible** par f pour un nombre appartenant à I.

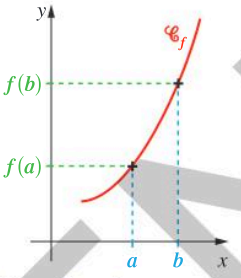
Dans ce cas, pour tout nombre x de I, on a $f(x) \geqslant m$.

- Le **maximum** M de la fonction f sur l'intervalle I (lorsqu'il existe) est égal à la **plus grande image** possible par f pour un nombre appartenant à I.

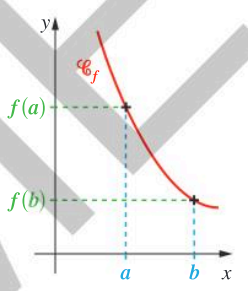
Dans ce cas, pour tout nombre x de I, on a $f(x) \leqslant M$.

Remarque

Rechercher les **extremums** de la fonction f sur un intervalle I, c'est déterminer le minimum et le maximum de f sur I (lorsqu'ils existent).



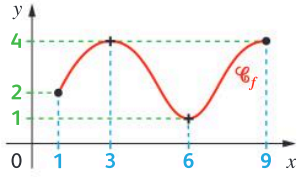
Fonction croissante : quand x augmente, $f(x)$ augmente aussi.



Fonction décroissante : quand x augmente, $f(x)$ diminue.

Exemple

On a tracé ci-dessous la courbe représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[1;9]$.



Le tableau de variations de f est :

x	1		3		6		9
$f(x)$	2	↗	4	↘	1	↗	4

- Le **minimum** de f est égal à **1**, il est atteint en $x = 6$.
- Le **maximum** de f est égal à **4**, il est atteint en $x = 3$ et en $x = 9$.

Ainsi, pour tout réel x de $[1;9]$, on a :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 4$$

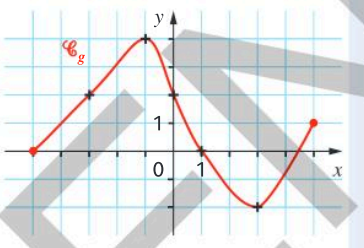
SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Mettre en relation représentation graphique et tableau de variations
CAPACITÉ 2 Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction

Énoncé On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f et la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g ci-contre.

x	-3		0		1		3		4
$f(x)$	1	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	1



1. Donner trois arguments pour lesquels le tableau de variations de f ne peut pas décrire les variations de g.
2. Construire le tableau de variations de la fonction g.
3. Dans un repère, construire une courbe possible pour la fonction f.
4. Quel est le maximum de f sur l'intervalle $[-3;4]$?
Préciser en quel réel il est atteint.

Solution rédigée

1. On propose trois arguments possibles parmi d'autres :
• l'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-3;4]$ alors que celui de la fonction g est $[-5;5]$.
• la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-3;0]$ alors que la fonction g ne l'est pas.
• par exemple, $f(-3)=1$ alors que $g(-3)=2$.

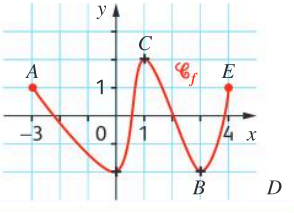
Point méthode
1. L'ensemble de définition est formé des abscisses de tous les points de la courbe.

2. Le tableau de variations de la fonction g est composé de deux lignes :
• première ligne (valeurs situées en abscisses), les bornes de l'ensemble de définition de g et les valeurs, dans l'ordre croissant, en lesquelles g change de sens de variation.
• deuxième ligne, les flèches correspondant aux variations.
On place au bout de ces flèches les images correspondantes.

x	-5		-1		3		5
$g(x)$	0	↗	4	↘	-2	↗	1

Point méthode
2. Une **flèche qui monte** traduit une **fonction croissante**.
Une **flèche qui descend** traduit une **fonction décroissante**.

3. Dans un repère, on commence par placer les cinq points issus du tableau de variations de la fonction f : $A(-3;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;2)$, $D(3;-2)$ et $E(4;1)$. On les relie par une courbe en respectant les sens de variation indiqués dans le tableau. Une courbe pour f (parmi une infinité possible) est donnée ci-contre.

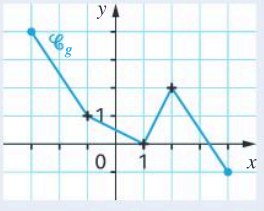


4. Le maximum de f sur $[-3;4]$ est 2 : c'est l'ordonnée la plus grande possible des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'image la plus grande possible dans la 2e ligne du tableau de variation de f. Il est atteint en $x=1$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 392 Voir exercices similaires nos 36, 41, 43 et 47

16 On représente une fonction g.



1. Dresser son tableau de variations.
2. Préciser ses extremums.

17 On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f.

x	-5		-1		3		4
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↘	-3

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses extremums. En quelles valeurs sont-ils atteints ?
3. Construire une courbe représentative possible pour f.

SPÉCIMEN

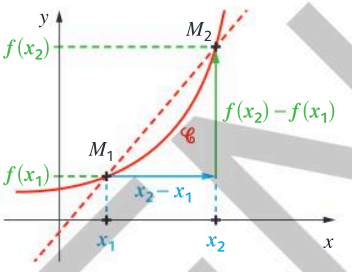
Cours

2 Étude des fonctions affines

a Taux d'accroissement d'une fonction affine

Définition Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

Pour tous nombres réels x_1 et x_2 distincts dans I, on appelle **taux d'accroissement** de f entre x_1 et x_2 le quotient $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.



Commentaire

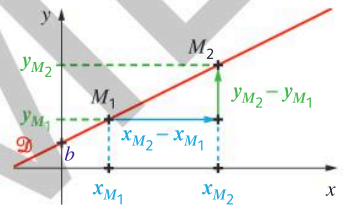
En notant $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, et M_1 et M_2 les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x_1 et x_2, alors le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est égal à :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_{M_2}-y_{M_1}}{x_{M_2}-x_{M_1}}$$

C'est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).

Propriété Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont des réels fixés.

Alors pour tous nombres réels x_1 et x_2 distincts, le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est égal à a. a est le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine** de la droite $\mathscr{D}$ représentant f.



Voir Démo exercice 92

b Sens de variation d'une fonction affine

Propriété Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont des réels fixés.

Le sens de variation de f ne dépend que du **signe de a** :

- si $a>0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- si $a<0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a>0$

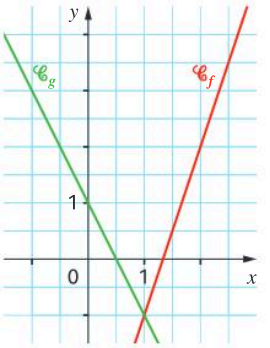
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		↗

Si $a<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		↘

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto 3x-4$ est croissante sur $\mathbb{R}$ en effet $a=3$ est strictement positif.
- La fonction $g : x \mapsto -2x+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ en effet $a=-2$ est strictement négatif.



Démo

Démonstration

Soient deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $x_1<x_2$. On doit comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, c'est-à-dire déterminer si $f(x_2)-f(x_1)>0$ ou si $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Or $f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=ax_2-ax_1=a(x_2-x_1)$.

On sait de plus que $x_1<x_2$.

Donc $x_2-x_1>0$.

On en déduit que $f(x_2)-f(x_1)$ est du signe de a.

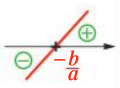
Ainsi par exemple, si $a>0$, $f(x_2)-f(x_1)>0$, donc $f(x_2)>f(x_1)$.

La fonction f est alors croissante sur $\mathbb{R}$.

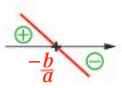
c Retour sur le signe d'une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$

Le sens de variation de $f : x \mapsto ax+b$ permet de « visualiser » le tableau de signes de f.

Si $a>0$: la droite est « montante ».
Donc f est d'abord négative, puis positive.



Si $a<0$: la droite est « descendante ».
Donc f est d'abord positive, puis négative.



Exemple

La fonction $h : x \mapsto -3x+6$ s'annule en 2 et est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Son tableau de signes est donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	+	0	−

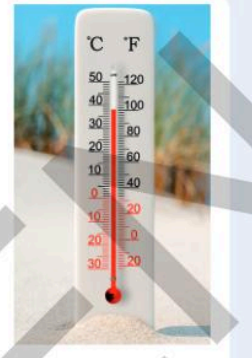
Voir Chapitre 09

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine

Énoncé Les Américains utilisent le degré Fahrenheit comme unité de mesure de température, alors qu'en France on utilise le degré Celsius.
La température T_F en degré Fahrenheit s'exprime en fonction de la température T_C en degré Celsius de la manière suivante : $T_F = 1{,}8T_C + 32$.
On appelle f la fonction associée à cette relation.
Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$ par $T_F = f(T_C) = 1{,}8T_C + 32$.
Et on note $\mathscr{D}$ la droite représentant la fonction affine f dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.



1. Préciser le coefficient directeur de $\mathscr{D}$. Interpréter le résultat en termes d'accroissement.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. Construire le tableau de signes de f.
4. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et vérifier les résultats précédents.

Solution rédigée

1. Le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ est égal à 1,8. Cela signifie que toute augmentation de 1°C entraîne une augmentation de 1,8°F.
2. Le coefficient 1,8 est **positif**. Donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f s'annule en la solution de l'équation $1{,}8x + 32 = 0$.

Or $1{,}8x + 32 = 0 \Leftrightarrow 1{,}8x = -32 \Leftrightarrow x = -\dfrac{32}{1{,}8} = -\dfrac{160}{9}$.

On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ traverse l'axe des abscisses en $-\dfrac{160}{9}$.

Comme f est croissante, on a le schéma ci-contre.
On en déduit le tableau de signes de f ci-dessous.

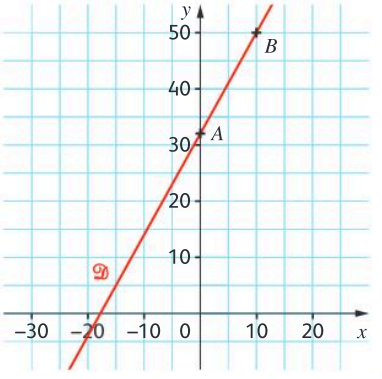


T_C	$-\infty$		$-\frac{160}{9}$		$+\infty$
$f(T_C)$		$-$	0	$+$	

4. L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}$ est égale à 32.
Donc le point $A(0 ; 32)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.
De plus $f(10) = 1{,}8 \times 10 + 32 = 50$.
Donc le point $B(10 ; 50)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.
La droite $\mathscr{D}$ est donc la droite (AB).
La fonction f est croissante : la droite $\mathscr{D}$ est « montante ».
La fonction f s'annule en $-\dfrac{160}{9}$, soit environ $-17{,}78$.
Ainsi le graphique confirme les résultats précédents.

Point méthode
2. C'est le signe du coefficient a qui détermine le sens de variation de la fonction : $f : x \mapsto ax + b$

Point méthode
4. Pour tracer une droite, on détermine deux points en choisissant deux réels et en calculant leurs images.



J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 393 Voir exercices similaires nos 55, 61 et 63

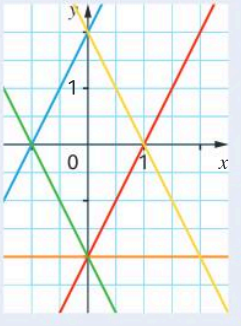
18 Déterminer le sens de variation et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 3x - 2$ **2.** $g(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$
3. $h(x) = \dfrac{3}{4}x - 3$ **4.** $i(x) = -0{,}5x + 4$

19 Dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ des fonctions affines suivantes.

1. $f(x) = 2x + 4$ **2.** $g(x) = -4x + 12$
3. $h(x) = -x + 8$ **4.** $i(x) = -5 + 3x$

20 On considère les fonctions f, g, h, i et j définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2$; $g(x) = -2x + 2$; $h(x) = 2x - 2$; $i(x) = -2x - 2$ et $j(x) = 2x + 2$
Associer chaque fonction à sa courbe représentative puis dresser son tableau de variations et son tableau de signes.



SPÉCIMEN

Cours

3 Étude des fonctions de référence

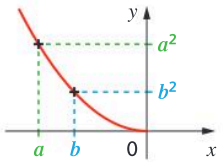
a Fonction carré

Propriété La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Elle admet 0 comme minimum, atteint en 0.

Démonstration
Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On doit comparer a^2 et b^2.
On a $b^2 - a^2 = (b-a)(a+b)$.
On sait que $a < b$ donc le facteur $(b-a)$ est strictement positif.
• Si a et b appartiennent à $]-\infty ; 0]$, alors le facteur $(a+b)$, somme de deux réels négatifs, est négatif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que $b^2 - a^2 < 0$, c'est-à-dire que $a^2 > b^2$.
• Si a et b appartiennent à $[0 ; +\infty[$, alors le facteur $(a+b)$, somme de deux réels positifs, est positif et non nul. Par la règle des signes d'un produit, on obtient que $b^2 - a^2 > 0$, c'est-à-dire que $a^2 < b^2$.

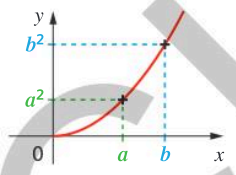
Conséquence
La fonction carré **conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$** et **change l'ordre sur $]-\infty ; 0]$** :

Carrés de réels négatifs

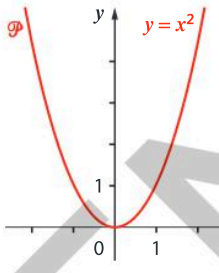


Si $a < b \leqslant 0$, alors $a^2 > b^2$.

Carrés de réels positifs



Si $0 \leqslant a < b$, alors $a^2 < b^2$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Conséquences
• Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
• Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans des ordres contraires.

Exemples
• Puisque $0 \leqslant 2 < \pi$ alors $2^2 < \pi^2$ c'est-à-dire $4 < \pi^2$
• Puisque $-4 < -2 \leqslant 0$ alors $(-4)^2 > (-2)^2$.

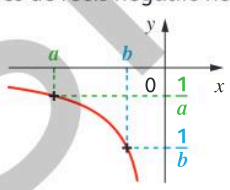
b Fonction inverse

Propriété La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

Démonstration
Voir exercice 106

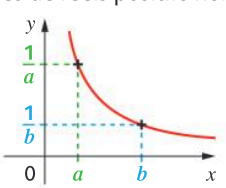
Conséquence
La fonction inverse **change l'ordre sur $]-\infty ; 0]$** et **change l'ordre sur $]0 ; +\infty[$** :

Inverses de réels négatifs non nuls



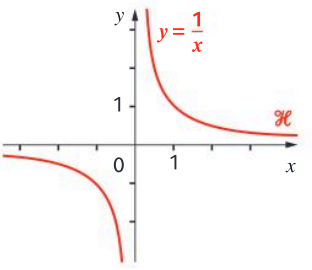
Si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Inverses de réels positifs non nuls



Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Remarque
Il est faux de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, donc on ne peut pas y parler de fonction « croissante » ou « décroissante ». Par ailleurs : $2 > -2$ et $\frac{1}{2} > \frac{1}{-2}$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

La double barre en dessous de 0 signifie que la fonction n'est pas définie en 0 : il y a une « coupure » en 0.

Conséquence
Deux nombres non nuls et de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.

Exemples
• Puisque $0 < 2 < \pi$ alors $\frac{1}{2} > \frac{1}{\pi}$
• Puisque $-3 < -2$ alors $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$.

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 4 Comparer des images

Énoncé **1.** Dans chaque cas, comparer les nombres A et B sans utiliser la calculatrice. Confirmer ensuite la comparaison obtenue à l'aide de la calculatrice.

a. $A=\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ et $B=\left(-\frac{5}{3}\right)^2$ **b.** $A=\frac{1}{2}$ et $B=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **c.** $A=0{,}8^2$ et $B=0{,}8^3$

2. Dans chaque cas, on donne un encadrement de x. Déterminer un encadrement de y en justifiant la réponse.

a. $0\leqslant x\leqslant 5$ et $y=x^3$ **b.** $-3\leqslant x\leqslant -1$ et $y=x^2$ **c.** $1\leqslant x\leqslant 2$ et $y=\frac{1}{x}$

Solution rédigée

1. a. On a $-\frac{5}{3}<-1$ et $-1<-\frac{3}{5}$ donc $-\frac{5}{3}<-\frac{3}{5}\leqslant 0$. La fonction carré étant strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, elle change le sens des inégalités ainsi : $\left(-\frac{5}{3}\right)^2>\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ soit $A<B$. Numériquement, on a $A=0{,}36$ et $B\simeq 2{,}78$ ce qui confirme $A<B$.

b. On a $0<\sqrt{2}<2$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, elle change le sens des inégalités ainsi : $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$ donc $A<B$. De plus : $\frac{1}{\sqrt{2}}\simeq 0{,}71$ et $\frac{1}{2}=0{,}5$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$.

Autre méthode :

$A=\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}$ et $B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ donc en en appliquant la fonction racine carrée croissante sur $\mathbb{R}^+$ on a : $\sqrt{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}}$ donc $A<B$.

c. On a $0<0{,}8<1$. En utilisant la position relative des courbes représentatives des fonctions carré et cube sur $[0;1]$, on obtient : $0{,}8^2>0{,}8^3$ soit $A>B$. De plus : $0{,}8^2=0{,}64$ et $0{,}8^3=0{,}512$ donc $0{,}8^2>0{,}8^3$.

2. a. La fonction cube étant croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve l'ordre, ainsi $0^3\leqslant x^3\leqslant 5^3$ c'est-à-dire $0\leqslant y\leqslant 125$.

b. La fonction carré étant strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, elle change l'ordre, ainsi $(-3)^2\geqslant x^2\geqslant(-1)^2$ c'est-à-dire $1\leqslant y\leqslant 9$.

c. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, elle change l'ordre, ainsi $\frac{1}{1}\geqslant\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

Point méthode

1. et **2.** On fait le lien entre les comparaisons demandées et le sens de variation des fonctions de référence associées.

Point méthode

1. b. Pour transformer une expression avec racine carrée, on utilise les règles suivantes.

- Pour tout $a\geqslant 0$, $\sqrt{a}^2=a$.
- Pour tous $a\geqslant 0$ et $b>0$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Point méthode

1. c. Pour comparer x, x^2 et x^3 pour x positif, on s'interroge sur les deux cas de figures possibles : a-t-on $x\in[0;1]$ ou $x\in[1;+\infty[$?

En effet, comme on le voit dans le f p. 256, l'ordre dans lequel sont rangés x, x^2 et x^3 change selon que x appartient à l'un ou l'autre de ces intervalles.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 393 Voir exercices similaires nos 66 à 69 et 72

21 Comparer les nombres suivants.

1. $1{,}01^2$ et $1{,}009^2$ **2.** $(-2{,}5)^2$ et $(-2{,}49)^2$

3. $\frac{1}{4}$ et $0{,}12^2$ **4.** $-5{,}2^2$ et $(-5{,}2)^2$

22 Comparer les nombres suivants.

1. $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{7}$ **2.** $-\frac{1}{0{,}02}$ et $-\frac{1}{0{,}001}$

3. 10^{-2} et 10^{-3} **4.** $\frac{1}{13}$ et $-\frac{1}{5}$

23 Comparer les nombres suivants.

1. $\sqrt{6}$ et 3 **2.** $\sqrt{20}$ et 4 **3.** $\sqrt{15}$ et 4

4. $1{,}2^3$ et $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ **5.** $(-0{,}001)^3$ et $(-0{,}09)^3$

24 Comparer les nombres suivants.

1. $1{,}4$; $1{,}4^2$ et $1{,}4^3$ **2.** $0{,}2$; $0{,}2^2$ et $0{,}2^3$

3. π, π^2 et π^3 **4.** $\sqrt{2}$; 2 et $2\sqrt{2}$

25 Une production, initialement de 100 tonnes, diminue chaque année de 5 %.

1. Déterminer les coefficients multiplicateurs CM_1, CM_2 et CM_3 associés respectivement à la diminution sur une année, sur deux années, puis sur trois années.

2. Comparer les coefficients CM_1, CM_2 et CM_3 sans utiliser la calculatrice

3. Mettre en relation cette comparaison avec la diminution de la production chaque année.

SPÉCIMEN

Cours

c Fonction cube

Propriété La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

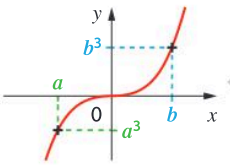
Démonstration

Voir exercice 128

Conséquence

Deux nombres réels et leurs cubes sont rangés dans le même ordre autrement dit, pour tous réels a et b :

si $a < b$ alors $a^3 < b^3$



Exemple

$3 < \pi < 4$ donc $3^3 < \pi^3 < 4^3$
c'est-à-dire $27 < \pi^3 < 64$
Numériquement, $\pi^3 \simeq 31$ ce qui valide la comparaison

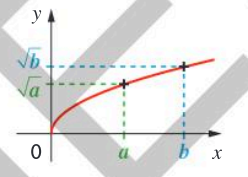
d Fonction racine carrée

Propriété La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Démonstration en ligne

Conséquence

Deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre ; pour tous réels a et b **positifs** : si $0 \leqslant a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.



x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

Exemple

$9 < 10 < 16$
Donc $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$,
c'est-à-dire $3 < \sqrt{10} < 4$.

e Fonction valeur absolue

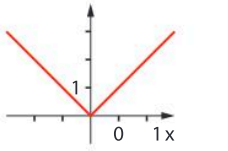
Propriété La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Elle admet 0 comme minimum, il est atteint en 0.

Démonstration en ligne

Conséquence

Deux nombres positifs (resp. négatifs) et leurs valeurs absolues sont rangées dans le même ordre (resp. des ordres contraires).

si $a < b \leqslant 0$ alors $|a| > |b|$ et si $0 \leqslant a < b$ alors $|a| < |b|$



x	$-\infty$	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	↘	0 ↗

Exemple

Si $-4 < x < -3$ alors
$|-4| > |x| > |-3|$ soit $3 < |x| < 4$.

f Comparaison de x, x^2 et x^3 pour x positif

Propriété On note $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

- Sur $[0 ; 1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.

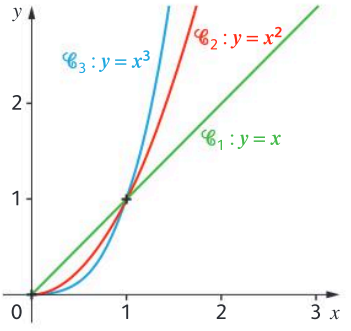
Autrement dit, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$ on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.

- Sur $[1 ; +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même en dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.

Autrement dit, pour tout réel $x \geqslant 1$ on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Démonstration

Soit x un réel tel que $x \geqslant 1$. En multipliant chaque membre de cette inégalité par x qui est strictement positif, on obtient que $x^2 \geqslant x$ et en itérant le procédé $x^3 \geqslant x^2$; d'où $x^3 \geqslant x^2 \geqslant x$.
On démontre de manière analogue le résultat pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.



Exemples

- Puisque $\pi > 1$ on a alors : $\pi < \pi^2 < \pi^3$
- Puisque $0 < 0{,}5 < 1$ on a alors : $0{,}5 > 0{,}5^2 > 0{,}5^3$

SPÉCIMEN

méthode

CAPACITÉ 5 Résoudre un problème d'optimisation

Énoncé

On a filmé en chronophotographie le saut d'un skieur.

À l'aide d'un logiciel, on modélise la courbe suivie par le skieur dans les airs par celle de la fonction définie sur $[0;7]$ par $f(x)=-0{,}5x^2+3{,}5x$.

x désigne la distance parcourue (en mètre) par rapport à la position initiale et $f(x)$ désigne la hauteur atteinte par le skieur (en mètre).

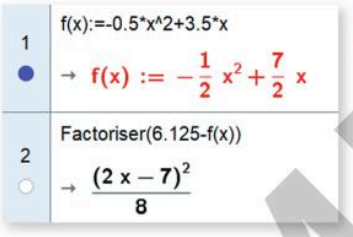


1. a. Tracer la courbe représentative de f à la calculatrice.

b. En déduire le tableau de variations de f.

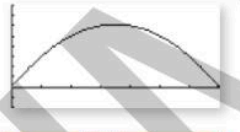
c. Quelle semble être la hauteur maximale du saut ?

2. Démontrer le résultat de la question **1. c.** en admettant les résultats du logiciel de calcul formel donnés ci-contre.

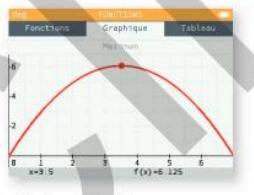


Solution rédigée

1. a. On obtient la courbe ci-contre, où les axes sont gradués de 1 en 1.



b. En utilisant l'instruction « Maximum », la fonction f paraît croissante sur $[0;3{,}5]$, puis décroissante sur $[3{,}5;7]$. On obtient alors le tableau de variations suivant de f.



x	0	3,5	7
$f(x)$	0	6,125	0

On y indique les images par f de 0, de 3,5 et de 7 dans la 2e ligne.

c. Le maximum de f sur $[0;7]$ semble être 6,125.

Donc la hauteur du saut semble être 6,125 mètres.

2. On sait que $f(3{,}5)=-0{,}5\times3{,}5^2+3{,}5\times3{,}5=6{,}125$. En utilisant les résultats du logiciel, on a pour tout réel $x\in[0;7]$:

$$6{,}125-f(x)=\frac{1}{8}(2x-7)^2$$

Un carré étant positif, on obtient que pour tout réel $x\in[0;7]$, $6{,}125-f(x)\geqslant0$, c'est-à-dire $f(x)\leqslant6{,}125$.

Finalement, le maximum de f sur $[0;7]$ est bien 6,125.

Remarque

Les résultats du logiciel peuvent être démontrés en développant l'expression $\frac{1}{8}(2x-7)^2$.

Point méthode

1. b. La calculatrice ou un logiciel permettent de visualiser la courbe représentative d'une fonction f.

Les instructions « Trace », « Minimum » ou « Maximum » permettent de conjecturer son tableau de variations.

Voir pages Calculatrices

Point méthode

2. Pour montrer que M est le maximum d'une fonction f sur un intervalle I, il faut trouver un réel c de I tel que $f(c)=M$, et montrer que pour tout réel x de I, on a :

$f(x)\leqslant M$, soit $M-f(x)\geqslant0$

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 394 Voir exercices similaires nos 75 et 76

26 À l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-1;3]$ par :

$$f(x)=x^2(3-x)$$

27 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I=[0;4]$ par $g(x)=x^3-3x+8$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur du minimum de la fonction g.

2. a. Justifier que, pour tout $x\in I$, on a :

$$g(x)-6=(x-1)^2(x+2)$$

b. Démontrer alors la conjecture émise en **1.**

28 Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+2x-3$$

admet un maximum à préciser. Préciser la valeur de x en laquelle ce maximum est atteint.

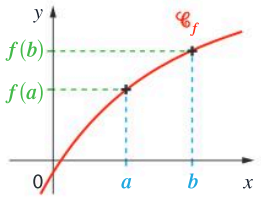
SPÉCIMEN

Je fais le point

Je revois mon cours

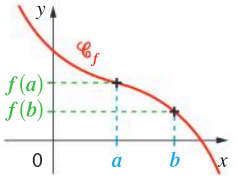
Sens de variation d'une fonction

Fonction croissante sur un intervalle I



$f(a)$ et $f(b)$ sont **dans le même ordre** que a et b.

Fonction décroissante sur un intervalle I



$f(a)$ et $f(b)$ sont **dans l'ordre contraire** de a et b.

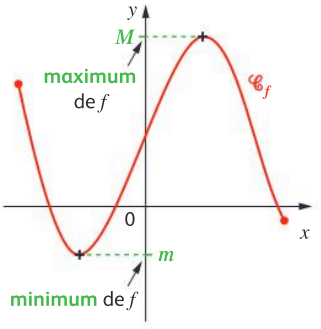
Tableau de variations

Dans l'ordre croissant, les bornes de D et les valeurs en lesquelles f change de sens de variation.

x	a	x_1	x_2	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	$f(x_1)$ ↗	$f(x_2)$ ↘	$f(b)$

Images associées

Minimum et maximum

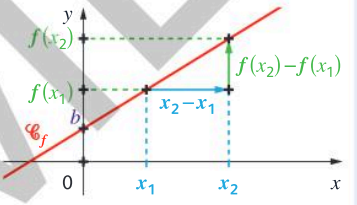


Cas des fonctions affines

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$

Pour tous $x_1 \neq x_2$, on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$		↗

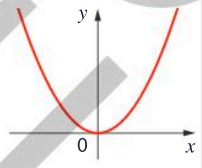
Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$		↘

Fonctions de référence

Fonction carré

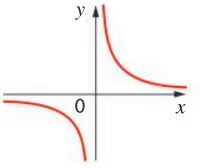
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	



- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$.
- Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$.

Fonction inverse

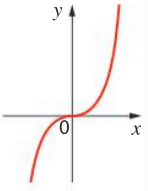
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		‖	



- Si $0 < a \leqslant b$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.
- Si $a \leqslant b < 0$ alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.

Fonction cube

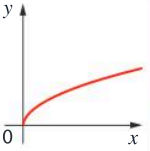
x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		↗



- Si $a \leqslant b$ alors $a^3 \leqslant b^3$.

Fonction racine carrée

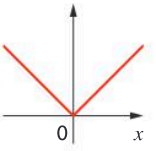
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗



- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

Fonction valeur absolue

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	↘	0	↗



- si $a < b \leqslant 0$ alors $|a| > |b|$
et si $0 \leqslant a < b$ alors $|a| < |b|$



Je m'exerce à démontrer

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2081

SPÉCIMEN

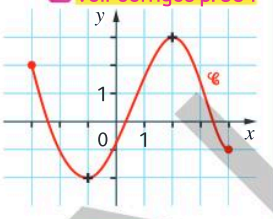
J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2082

QCM

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).
Pour les questions **1.** à **3.**, on considère la fonction f définie par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre.

Voir corrigés p. 394



	a	b	c
1. La fonction f est croissante sur :	$[-3;4]$	$[-1;2]$	$[0;1]$
2. Le maximum de f sur $[-3;4]$ est :	2	3	4
3. Le tableau de variations de f est :	x : 2 -2 3 -1 ; $f(x)$: -3 ↘ 0 ↗ 3 ↘ 1	x : -3 -2 3 4 ; $f(x)$: 2 ↘ -1 ↗ 2 ↘ -1	x : -3 -1 2 4 ; $f(x)$: 2 ↘ -2 ↗ 3 ↘ -1
4. Si g est une fonction croissante sur l'intervalle $[-2;6]$, alors :	on peut affirmer que $g(0) \leqslant g(3)$	on peut affirmer que $g(1) \geqslant g(4)$	on ne peut pas comparer de façon certaine $g(2)$ et $g(5)$
5. Si 15 est le maximum d'une fonction h définie sur un intervalle I, alors :	pour tout réel $x \in$ I, on a $h(x) \leqslant 15$	pour tout réel $x \in$ I, on a $h(x) \geqslant 15$	il existe (au moins) un réel a de I tel que $h(a) = 15$
6. p est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2. Alors :	le coefficient directeur de la droite représentant p est égal à 2.	l'ordonnée à l'origine de la droite représentant p vaut 2.	x : $-\infty$ 2 $+\infty$; $p(x)$: + 0 −
7. On a :	$(-2)^2 > \left(-\frac{9}{4}\right)^2$	$\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$	$\sqrt{3} < \sqrt{\pi}$
8. Pour tout réel x, avec $-10 < x < -5$, on a :	$x^3 \in]125;1\,000[$	$25 < x^2 < 100$	$5 < \lvert x \rvert < 10$
9. On a :	$0{,}2^3 > 0{,}2^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 > \frac{4}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{3}$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. La fonction $f : x \mapsto 4 - 3x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g : x \mapsto x^2 + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction carré admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -4x + 1$ est d'abord positive puis négative et s'annule en 0,25.
5. Pour tous réels a et b, si $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
6. Pour tous réels a et b, si $a < b$ alors $|a| < |b|$.
7. Pour tous réels non nuls a et b, si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
8. Pour tous réels réel x, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Partie B.

Une fonction g admet ce tableau de variations :

x	-3		-1		5
$g(x)$	2	↘	-3	↗	0

1. On a $g(-3) = 2$.
2. 5 est le maximum de g sur $[-3;5]$.
3. On a $g(-2{,}5) < g(-1{,}5)$.
4. On a $g(2) < g(3)$.
5. Si $x \in [-3;5]$ alors $g(x) \in [-3;2]$.

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2083

Acquérir des automatismes

29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 5x - 3$
Déterminer l'image par f de :
1. 1 **2.** -2 **3.** 5

30 Déterminer les fonctions affines parmi les fonctions suivantes.
1. $f(x) = -5x - 7$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{x} + 5$
3. $h(x) = \dfrac{2 - 4x}{3}$ **4.** $k(x) = 2x^2 + 3$

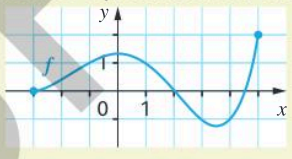
31 Représenter graphiquement les fonctions affines suivantes dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1. $f(x) = -2x + 4$ **2.** $g(x) = x + 1$
3. $h(x) = 5$ **4.** $i(x) = -3x$

32 Pour chacune des fonctions affines suivantes, préciser si elle est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.
1. $f(x) = 7x - 8$ **2.** $g(x) = -x + 5$
3. $h(x) = 2x$ **4.** $j(x) = -5$
5. $k(x) = 6 - 5x$ **6.** $m(x) = -3 + x$

33 Étudier le signe des fonctions affines suivantes.
1. $f(x) = 3x - 12$ **2.** $g(x) = -2x + 1$
3. $h(x) = 5x$ **4.** $i(x) = -3$

34 Tracer une esquisse à main levée et le tableau de variations des courbes représentatives de chacune des fonctions de référence : carré, inverse, cube, racine carrée et valeur absolue.

35 QCM
Pour chacune des questions, indiquer la ou les bonne(s) réponse(s).
On donne la courbe représentative d'une fonction f.



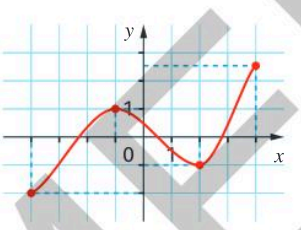
1. L'image de 2 par f est :
a. 0 **b.** $f(2)$ **c.** 5
2. $f(1)$ est égal à :
a. -1 et 1 **b.** -1 **c.** 1
3. Le (ou les) éventuel(s) antécédent(s) de -1 sont :
a. Il n'y en a pas. **b.** 1 **c.** 3 et 4
4. Le maximum de la fonction f :
a. n'existe pas **b.** est égal à 5 **c.** est égal à 2

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Mettre en relation représentation graphique et tableau de variations

Voir p. 251

36 Vrai ou faux ?
On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[-4;4]$.

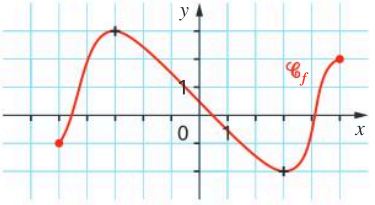


Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
1. L'image de -1 par la fonction f est 2.
2. 4 est un antécédent de 2,5 par la fonction f.
3. f est croissante sur $[-2;1]$.
4. f est décroissante sur $[-1;2]$.
5. Pour tout $x \in [-4;4]$, on a $f(x) \geqslant -2$.

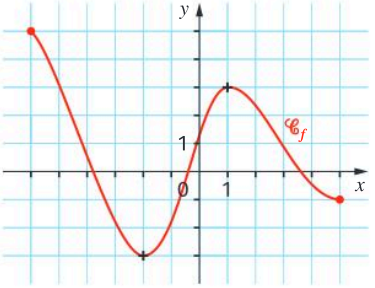
37 Dresser le tableau de variations de la fonction f de l'exercice **36**.

Pour les exercices **38** *à* **40**, *on a représenté une fonction. Dresser son tableau de variations.*

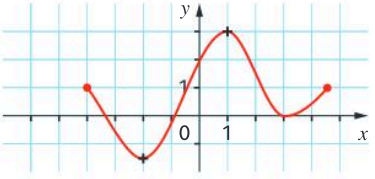
38



39



40



SPECIMEN

41 On considère une fonction f dont on donne ci-dessous le tableau de variations.

x	-2		0		1		4
$f(x)$	0	↘	-3	↗	2	↘	-1

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de 0 par f ?
3. Préciser les intervalles sur lesquels f est croissante, puis ceux sur lesquels f est décroissante.
4. Tracer une représentation graphique possible pour la fonction f.

42 Une fonction f est définie sur $[0;5]$.
On suppose que f est croissante sur $[0;2]$ et sur $[4;5]$, décroissante sur $[2;4]$ et que :
- $f(0)=1$
- $f(2)=3$
- $f(3)=f(5)=0$
- $f(4)=-1$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer une représentation graphique possible pour la fonction f.
3. L'équation $f(x)=4$ admet-elle des solutions ? Justifier.
4. Préciser sur quel(s) intervalle(s) les images $f(x)$ sont négatives.

Pour les exercices 43 à 45, tracer une représentation graphique possible pour la fonction f à partir de son tableau de variations et des renseignements donnés.

43 f est définie sur $[-3;2,5]$.

x	-3		0		1		$2,5$
$f(x)$	$2,5$	↘	1	↗	2	↘	$-1,5$


CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2084

44 f est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(-4)=-3$, $f(1)=2$ et $f(4)=3$. De plus, pour tout $x>2$, $f(x)>0$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	1	↗	4	↘	

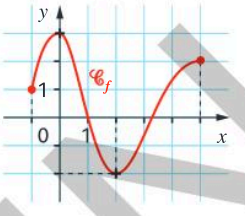
45 f est définie sur $\mathbb{R}$. 0 admet pour image 1 et 6 est un antécédent de -1. De plus, pour tout réel x, a $f(x)>-2$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	→	0	↘	

info
La flèche horizontale exprime le fait que la fonction f est constante sur l'intervalle [1 ; 5].

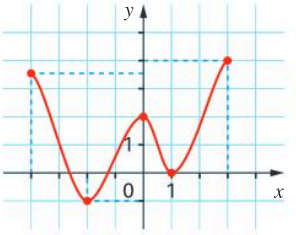
CAPACITÉ 2 Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction
Voir p. 251

46 QCM
On a représenté ci-contre la fonction f sur son ensemble de définition.
Pour chaque question, déterminer la réponse correcte parmi les réponses proposées.



1. L'ensemble de définition de la fonction f est :
a. $I=[-2;3]$ **b.** $I=[1;2]$ **c.** $I=[-1;5]$
2. Le maximum de f sur I est égal à :
a. 5 **b.** 3 **c.** 2
3. Le maximum de f sur I est atteint en :
a. 0 **b.** 5 **c.** 3
4. Le minimum de f sur I est égal à :
a. -2 **b.** -1 **c.** 2
5. Si $x\in I$, alors $f(x)$ vérifie l'encadrement :
a. $-2\leqslant f(x)\leqslant 3$ **b.** $-1\leqslant f(x)\leqslant 5$ **c.** $1\leqslant f(x)\leqslant 2$

47 On considère la fonction g définie sur $[-4;3]$ et représentée ci-contre.



1. Quel est le maximum de g sur l'intervalle $[-4;3]$? En quelle(s) valeur(s) ce maximum est-il atteint ?
2. Quel est le minimum de g sur l'intervalle $[-4;3]$? En quelle(s) valeur(s) ce minimum est-il atteint ?
3. Quel est le maximum de g sur l'intervalle $[-2;1]$? sur l'intervalle $[-4;1]$?
4. Donner un encadrement de $g(x)$ dans chacun des cas suivants :
a. $x\in[-4;0]$ **b.** $x\in[-4;3]$ **c.** $x\in[0;3]$

48 Pour chaque courbe des exercices 38 à 40, indiquer la valeur du maximum et du minimum de la fonction représentée et préciser les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

49 Soit le tableau de variations d'une fonction f.

x	-1		1		3		4
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-2	↗	2

1. Quelle est l'image de 3 par f ? Et celle de -1 ?
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.
3. a. Quel est le maximum de f ?
Préciser en quel réel il est atteint.
b. Même question pour le minimum.

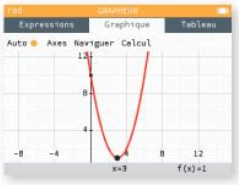
SPÉCIMEN

exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2083

50 Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ et vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes :
- f admet 2 pour maximum sur $[-3;5]$ et ce maximum est atteint en -3 et 4 ; -2 est le minimum de f sur $[-3;5]$ et il est atteint en 2 ;
- l'image de 0 par f est 1 et $f(5)=1{,}5$;
- 0 admet trois antécédents par f : -1 ; 1 et 3.

51 Sur une calculatrice, on a tracé la courbe de la fonction f définie par $f(x)=(x-3)^2+1$.



1. En utilisant les informations données à l'écran, conjecturer le minimum de f et la valeur de x en laquelle il semble atteint.
2. Justifier que $f(x)\geqslant f(3)$ pour tout réel x. Que peut-on en conclure ?

Pour les exercices **52** *à* **54**, *conjecturer, en utilisant la calculatrice graphique, les extremums de la fonction f sur l'intervalle I indiqué en précisant les valeurs en lesquelles ils semblent atteints.*

52 $f(x)=x^2+2x-4$ sur $I=[-5;3]$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2085

53 $f(x)=x^3-3x^2+6$ sur $I=[-0{,}5;2{,}5]$

54 $f(x)=\dfrac{-2}{x^2+1}$ sur $I=[-3;3]$

Voir pages Calculatrices

CAPACITÉ 3 Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine

Voir p. 253

Pour les exercices **55** *à* **57**, *déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction affine puis les représenter graphiquement.*

55 **1.** $f:x\mapsto -2x-1$ **2.** $g:x\mapsto -8x$
3. $h:x\mapsto x-3$ **4.** $i:x\mapsto 2$

56 **1.** $f:x\mapsto 2-x$ **2.** $g:x\mapsto 2x$
3. $h:x\mapsto -3$ **4.** $i:x\mapsto 3x-4$

57 **1.** $f:x\mapsto 1{,}5x-0{,}5$ **2.** $g:x\mapsto -x+0{,}5$
3. $h:x\mapsto 2-\dfrac{1}{3}x$ **4.** $i:x\mapsto \dfrac{7}{5}x$

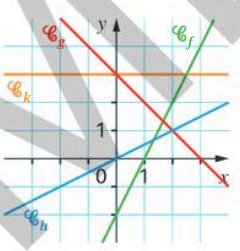
Pour les exercices **58** *à* **60**, *déterminer si elles sont affines ou non. Pour celles qui sont affines, préciser leur sens de variation sur $\mathbb{R}$.*

58 **1.** $f(x)=-5x+1$ **2.** $g(x)=2x^2-3$
3. $h(x)=3+\dfrac{x}{2}$ **4.** $i(x)=\dfrac{2x-1}{5}$

59 **1.** $f(x)=3-\dfrac{2}{x}$ **2.** $g(x)=-0{,}5x$
3. $h(x)=1$ **4.** $i(x)=\sqrt{x+2}$

60 **1.** $f(x)=x^3-1$ **2.** $g(x)=3x-\sqrt{2}$
3. $h:x\mapsto 2-\dfrac{x}{3}$ **4.** $i:x\mapsto \dfrac{3}{x}+2$

61 Les fonctions affines f, g, h et k sont représentées ci-dessous.



1. Préciser le sens de variation de f, g, h puis k sur $\mathbb{R}$.
2. Construire le tableau de signes de chacune des quatre fonctions affines.

62 La fonction affine f admet le tableau de signes ci-dessous. Quel est son sens de variation ?

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Pour les exercices **63** *à* **65**, *construire le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction affine.*

63 **1.** $f(x)=3x-12$ **2.** $g(x)=4x$
3. $h(x)=-2x+4$ **4.** $i(x)=2$



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2086

64 **1.** $f(x)=2-3x$ **2.** $g(x)=5x-7$
3. $h(x)=-2x$ **4.** $i(x)=-\dfrac{8}{3}$

65 **1.** $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}x$ **2.** $g(x)=-x+\dfrac{1}{3}$
3. $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{5}$ **4.** $i(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{18}$

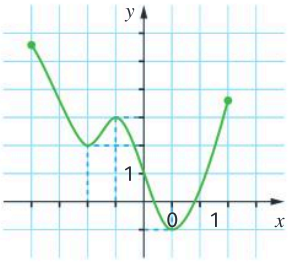
SPÉCIMEN

CAPACITÉ 4 Comparer des images

Voir p. 255

66 **Vrai ou faux ?**

On a représenté la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4;3]$.



Indiquer pour chacune des inégalités suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. $f(-1) > f(0)$
2. $f(2) < f(3)$
3. $f(-2{,}5) < f(-3)$
4. $f(-1{,}9) < f(-1{,}5)$

67 Voici le tableau de variations d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-5;4]$.

x	-5		-2		$\frac{1}{2}$		4
$h(x)$	1	↘	0	↗	3	↘	0

1. Indiquer le maximum et le minimum de cette fonction sur son ensemble de définition. Préciser les valeurs de la variable où ils sont atteints.
2. Recopier et compléter dans chaque cas en utilisant l'un des symboles $>$, $<$ ou $=$.

a. $h(-1)\ldots h(0)$ b. $h(-2)\ldots h(-1)$
c. $h(2)\ldots h(4)$ d. $h(-2)\ldots h(4)$

68 **QCM**

Pour chaque question, déterminer la (ou les) réponse(s) correcte(s) parmi les réponses proposées.

1. Si $x \geqslant 3$ alors :

a. $x^3 \geqslant 27$ b. $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{3}$ c. $x^2 \geqslant x^3$

2. Si $x < -4$ alors :

a. $x^2 < 16$ b. $-16 < x^2 < 16$ c. $x^2 > 16$

3. Si $0 < x < 1$ alors :

a. $\sqrt{x} < 1$ b. $x^3 > x^2$ c. $x^2 < x$

Pour les exercices **69** *à* **71**, *comparer, dans chaque cas, les réels A et B.*

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2087



69
1. $A = 3{,}1^2$ et $B = 2{,}9^2$
2. $A = (-1{,}7)^2$ et $B = (-1{,}4)^2$
3. $A = (-5)^2$ et $B = -5^2$
4. $A = (-6{,}72)^2$ et $B = (-3{,}21)^2$

70
1. $A = 3^2$ et $B = \pi^2$
2. $A = (-3)^2$ et $B = (-2{,}9)^2$
3. $A = 2{,}21^3$ et $B = 3{,}5^3$
4. $A = \sqrt{6{,}5}$ et $B = \sqrt{8{,}3}$

71
1. $A = 9$ et $B = \sqrt{95}$
2. $A = \left(-\frac{4}{3}\right)^2$ et $B = \left(-\frac{3}{4}\right)^2$
3. $A = |-\pi|$ et $B = |-3|$
4. $A = \sqrt{18}$ et $B = 4$

Pour les exercices **72** *et* **73**, *comparer, dans chaque cas, les réels a et b puis leurs inverses.*

72
1. $a = 2$ et $b = 2{,}05$
2. $a = -3{,}8$ et $b = -3$
3. $a = -5{,}2$ et $b = -6$
4. $a = -\frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{\pi}$

73
1. $a = -7$ et $b = -7{,}01$
2. $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{3}{8{,}1}$
3. $a = \frac{-5}{3}$ et $b = -\frac{13}{6}$
4. $a = -\frac{5}{4}$ et $b = -\frac{6}{7}$

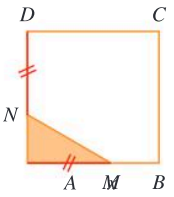
74 Dans chaque cas, on donne un encadrement de x. Déterminer un encadrement de y.

1. $-3 \leqslant x \leqslant -2$ et $y = x^2$
2. $-2 \leqslant x \leqslant 3$ et $y = x^3$
3. $4 \leqslant x \leqslant 10$ et $y = \frac{1}{x}$
4. $-5 \leqslant x \leqslant -1$ et $y = |x|$

CAPACITÉ 5 Résoudre un problème d'optimisation

Voir p. 257

75 $ABCD$ est un carré de côté 10. Un point M est mobile sur le segment $[AB]$.



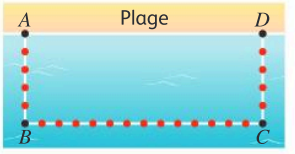
Le point N appartient au segment $[AD]$ et vérifie $AM = ND$.
On pose $x = AM = ND$.

1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 10$.
2. Justifier que l'aire $f(x)$ du triangle AMN est :

$$f(x) = 5x - \frac{x^2}{2}$$

3. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position du point M sur le segment $[AD]$ de sorte que l'aire du triangle AMN soit maximale.

76 **Aire de baignade**



Sur une plage, un surveillant de baignade dispose d'une ligne de nage de 200 mètres de longueur ainsi que de quatre bouées A, B, C et D.
Il souhaite la déployer à partir de la plage pour obtenir la zone de baignade rectangulaire la plus grande possible, c'est-à-dire ayant la plus grande aire.
On pose $x = AB = CD$ et on note $A(x)$ l'aire de la zone de baignade c'est-à-dire l'aire du rectangle $ABCD$.

1. Dans quel intervalle I la variable x varie-t-elle ?
2. a. On rappelle que la ligne de nage est de 200 mètres. Exprimer alors BC en fonction de x.
   b. En déduire que $A(x) = -2x^2 + 200x$.
   c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer une réponse au problème posé.
3. Après avoir justifié que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a :

$$A(x) = 5\,000 - 2(x - 50)^2$$

justifier la conjecture précédente.

SPECIMEN

exercices Entraînement

1 Variations d'une fonction, extremums

77 On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations suivant.

x	-7		-1		3		7		10
$f(x)$	5	↘	-3	↗	3	↘		↘	-5

Recopier et compléter les phrases suivantes.
1. L'ensemble de définition de f est … .
2. La fonction f est croissante sur … .
3. La fonction f est décroissante sur … .
4. Un antécédent de -3 par f est … .
5. Le nombre … n'admet pas d'image par f.

78 Associer à chaque tableau de variations la représentation graphique correspondante.

a.

x	-1		0		2
$f(x)$	-1	↗	1	↘	0

b.

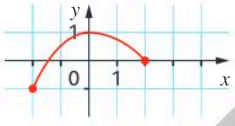
x	-1		0		2
$f(x)$	1	↘	-1	↗	0

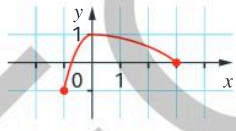
c.

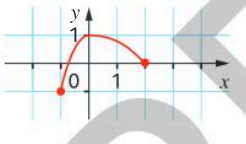
x	-1		0		3
$f(x)$	-1	↗	1	↘	0

d.

x	-2		1		2
$f(x)$	-1	↗	1	↘	0

1. 

2. 

3. 

4. 

79 Soit la fonction f définie sur $[0;9]$ telle que :
- f est croissante sur $[0;3]$ et $[5;7]$, et décroissante sur $[3;5]$ et $[7;9]$;
- la courbe représentative de f passe par l'origine ;
- 6 possède deux antécédents : 3 et 7 ;
- l'image de 5 est 2 et $f(9)=-3$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. a. Déterminer les extremums de f.
b. Pour quelle(s) valeur(s) sont-ils atteints ?

80 Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;3]$ telle que : f est croissante sur $[-5;0]$, décroissante sur $[0;3]$, $f(-5)=1$, $f(0)=5$ et $f(3)=-2$.
1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a. $f(-3)\geqslant 1$ b. $f(2)=-5$ c. $-2\leqslant f(1)\leqslant 5$

Analyse d'un énoncé

81 Exercice commenté

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]$.

x	-4		-2		1		4
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-1	↗	2

1. Déterminer le nombre d'antécédent(s) de zéro.

Le tableau permet de connaître le nombre d'antécédents d'une valeur. Pour cela, il faut s'intéresser aux images de part et d'autre des flèches.

2. Tracer une courbe représentative possible de f.

Le tableau permet de placer les points d'abscisse -4, -2, 1 et 4. Il donne aussi des indications pour relier ces points : le sens de variation de la fonction.

3. Comparer $f(-1)$ et $f(0)$, puis $f(2)$ et $f(3)$.

Pour comparer deux images, on s'aide du tableau pour connaître le sens de variation de la fonction entre ces deux images.

82 Application immédiate

On définit sur l'intervalle $[-6;3]$, la fonction f dont on donne le tableau de variations suivant.

x	-6		0		3
$f(x)$	4	↘	1	↗	4

1. Tracer une courbe représentative possible de f.
2. Comparer $f(-3)$ et $f(0)$.
3. a. Déterminer le nombre d'antécédent(s) de 4.
b. Proposer un réel k qui admet exactement deux antécédents par f.
c. Existe-t-il un réel m tel que l'équation $f(x)=m$ admette exactement trois solutions ?

83 On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations suivant.

x	-5		-1		4		8		12
$f(x)$	7	↘	-4	↗	-1	↘	-6	↗	5

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les extremums de f.
3. Donner l'image de -1 par f.
4. Comparer si possible les nombres suivants.
a. $f(-1)$ et $f(2)$ b. $f(2)$ et $f(6)$
c. $f(-4)$ et $f(-2)$ d. $f(5)$ et $f(7)$

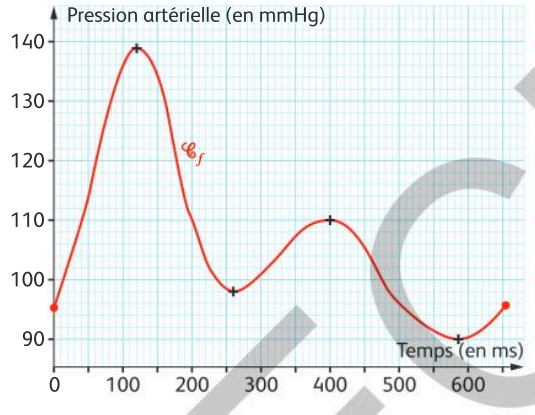
SPECIMEN

84 On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations suivant.

x	-3		0		4		8
$f(x)$	3	↗	5	↘	-2	↗	0

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les extremums de f et préciser les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.
3. Comparer si possible les nombres suivants.
a. $f(-1)$ et $f(-3)$ **b.** $f(0)$ et $f(5)$
c. $f(-3)$ et $f(2)$ **d.** $f(-2)$ et $f(6)$

85 La tonométrie artérielle est un examen permettant d'obtenir une mesure continue de la pression artérielle. On note f la fonction qui, pour un patient donné, associe à chaque instant t en milliseconde (ms) la pression artérielle radiale au repos $f(t)$ exprimée en millimètre de mercure (mmHg). Cette fonction est représentée ci-dessous sur l'intervalle [0 ; 650].



1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Résoudre l'inéquation $f(t) \geqslant 130$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. a. Déterminer la valeur systolique mesurée c'est-à-dire la valeur maximale de la pression artérielle chez ce patient.
b. Déterminer la valeur diastolique mesurée c'est-à-dire la valeur minimale de la pression artérielle chez ce patient.
c. Un patient est en hypertension artérielle lorsque la pression systolique est supérieure ou égale à 140 mmHg ou que la pression diastolique est supérieure ou égale à 90 mmHg. Ce patient est-il en hypertension ? Justifier.

86 **Vrai ou faux ?**
On considère le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-6;13]$.

x	-6		-1		3		7		13
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↘	-5	↗	-1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
1. 0 possède au moins deux antécédents.
2. L'image de 0 est 3.
3. $f(0) \leqslant f(10)$
4. Le minimum de f est -5.
5. Le maximum de f sur $[7;13]$ est -1.
6. f est croissante sur $[-2;3]$.
7. Si $x \in [-1;3]$, alors $f(x) \geqslant 0$.
8. Si $f(x) \geqslant 0$, alors $x \in [-1;3]$.

87 Pour chaque tableau de variations, déterminer les éventuels extremums des fonctions associées. Préciser alors les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

2.

x	$-\infty$		-7		0		11
$g(x)$		↗	10	↘	-2	↗	3

3.

x	0		3		7		12
$k(x)$	8	↘	-3	↗	8	↘	0

4.

x	$-\infty$		-5		10		$+\infty$
$h(x)$		↗	9	↘	0	↗	

88 **Hauteur maximale d'une balle**
Joé lance une balle en hauteur. La hauteur de la balle (en mètre) peut être modélisée par la fonction f définie par :
$$f(t) = -5t^2 + 15t + 2$$
où t est le temps écoulé depuis le lancer (en seconde) et $f(t)$ la hauteur de la balle (en mètre).
1. Calculer $f(0)$. Interpréter ce résultat.
2. Représenter graphiquement la courbe de f sur la calculatrice puis conjecturer :
a. l'instant t_{max} où la balle atteint sa hauteur maximale, préciser cette hauteur maximale ;
b. l'instant t_0 où la balle retombe sur le sol.
3. a. Montrer que, pour tout réel $t \in [0;t_0]$, on a :
$$f(t) = 13{,}25 - 5(t-1{,}5)^2$$
b. Justifier alors les deux conjectures précédentes.

89 On définit sur $[-8;5]$, la fonction f dont on donne le tableau de variations suivant.

x	-8		-3		2		5
$f(x)$	-3	↗	11	↘	-2	↗	-1

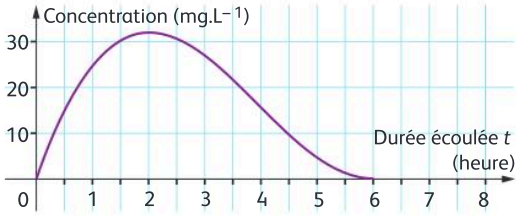
1. Combien 0 possède-t-il d'antécédent(s) ?
2. a. On sait de plus que $f(1) = 0$ et $f(-5) = 0$. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
b. En déduire le tableau de signes de f.
3. Donner un encadrement des images suivantes :
a. $f(-1{,}2)$ **b.** $f\left(-\sqrt{8}\right)$ **c.** $f(3{,}8)$
4. Dans chacun des cas, déterminer un encadrement de $f(x)$ le plus précis possible :
a. $x \in [-8;5]$ **b.** $-3 \leqslant x \leqslant 5$ **c.** $x \geqslant 1$

SPECIMEN

90 On administre à un patient un médicament antalgique. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heure associe la concentration $f(x)$ exprimée en mg/L.



1. La fonction f est représentée sur $[1;6]$ par la courbe ci-dessous.



a. Au bout de combien de temps la concentration du produit est-elle maximale ? Estimer cette concentration maximale à 1 mg/L près.

b. Le médicament est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure à 5 mg/L. Déterminer la durée d'efficacité de ce médicament.

2. On admet que f est définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(x)=x^3-12x^2+36x$.

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir la factorisation ci-contre.

Calcul formel

1 Factoriser(f(x)-32)

→ $(x-8)(x-2)^2$

En utilisant ce résultat, justifier la conjecture graphique émise à la question **1. a.**

91 **Exercice guidé**

Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle de périmètre 24 cm de sorte que son aire soit maximale.

Pistes de résolution

On pourra tout d'abord exprimer la longueur L du rectangle en fonction de sa largeur l puis exprimer l'aire du rectangle en fonction de l. Utiliser ensuite la calculatrice pour émettre une conjecture quant au problème posé puis la démontrer.

2 Étude des fonctions affines

Démo

92 Étant donné deux constantes réelles a et b, on considère la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$.

1. Soient x_1 et x_2 deux réels distincts.

Montrer que $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$.

2. Application

On donne ci-dessous le tableau de valeurs d'une fonction affine f.

x	1	3	5	…	−1	…
$f(x)$	−1	−5	…	−17	…	1

a. En utilisant la « proportionnalité des accroissements », compléter le tableau de valeurs précédent. Détailler la démarche.

b. Déterminer l'expression de $f(x)$.

93 Voici le tableau de valeurs d'une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$:

x	1	3
$f(x)$	3	−1

1. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 3. En déduire la valeur du coefficient a.

2. En exploitant le fait que $f(1)=3$, justifier que $a+b=3$. En déduire la valeur du coefficient b.

3. Déterminer l'image de −2 par la fonction f.

4. Déterminer l'antécédent de 10 par f.

Pour les exercices **94** *à* **97**, *on donne le tableau de valeurs d'une fonction affine f. Déterminer son sens de variation puis l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.*

94

x	2	5
$f(x)$	1	10

95

x	−3	1
$f(x)$	12	−3

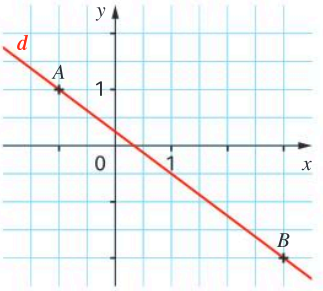
96

x	4	−2
$f(x)$	17	2

97

x	3	−6
$f(x)$	−1	−7

98 Dans le repère ci-contre, on a représenté la fonction affine $f : x \mapsto ax+b$.



1. Justifier que :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

En déduire la valeur de a.

2. Que vaut $f(-1)$?

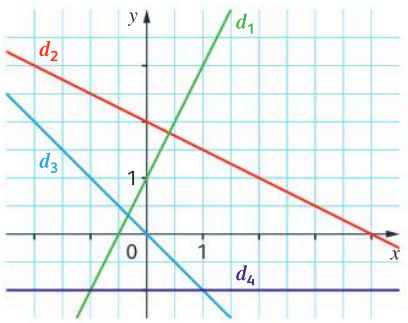
En déduire que $-a+b=1$ puis la valeur de b.

3. Déduire alors l'expression de la fonction f.

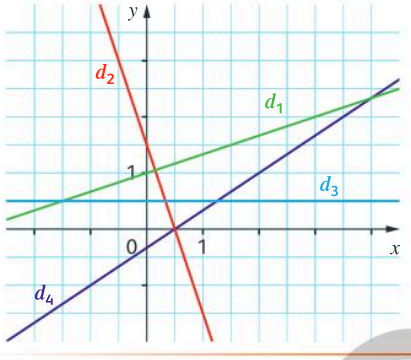
SPECIMEN

Pour les exercices **99** *et* **100**, *déterminer l'expression de chacune des quatre fonctions affines représentées.*

99



100



101 On donne le tableau de variations de la fonction affine définie par $f(x)=ax+b$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		0	

1. Quel est le signe de a ?
2. Déterminer le signe de b.
3. Expliquer pourquoi le tableau permet d'écrire :
$$2a+b=0$$
4. Déterminer a et b sachant que la droite représentative de f passe par le point de coordonnées (0 ; 6).

102 Déterminer le sens de variation de la fonction linéaire g dont la droite représentative passe par le point $A(-3;2)$.

103 PYTHON Benjamin souhaite créer un programme Python qui lui donnera le signe d'une fonction affine de la forme $f(x)=ax+b$ où a et b sont des constantes réelles avec $a\neq 0$.
Compléter son programme :

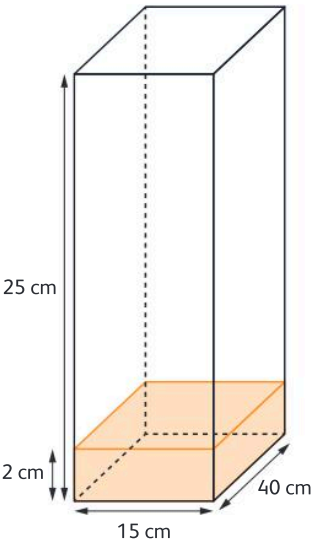
```
def signe(a,b):
    x0 = ...
    print("La fonction est : ")
    if ... :
        print("positive sur ]-inf;",x0,"]")
        print("puis négative sur [",x0,";+inf[")
    else:
        print(...)
        print(...)
```

104 Un devoir surveillé est composé d'un exercice et d'un QCM, chacun noté sur 10 points. Le QCM est noté de telle sorte que :
– chaque bonne réponse rapporte un point ;
– chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point.



On suppose que les élèves répondent à toutes les questions du QCM. On note f la fonction qui associe au nombre de mauvaises réponses x, la note obtenue à ce QCM.
1. a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
b. Quelle est la note minimale et la note maximale qu'un élève peut obtenir à ce QCM ?
2. a. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
b. Que peut-on en déduire dans le contexte de l'exercice ?
3. Un élève a obtenu la note de 2,5. Combien a-t-il eu de bonnes réponses ?

105 Valentin achète un aquarium de base rectangulaire de côtés 15 et 40 cm et de hauteur 25 cm. Il remplit le fond de sable sur une hauteur de deux centimètres puis ajoute de l'eau en gardant en tête qu'il doit laisser au moins 3 cm entre l'eau et le couvercle.
On note x la hauteur d'eau ajoutée et $V(x)$ le volume total occupé par le sable et l'eau.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction V.
2. a. Exprimer la fonction V en fonction de x.
b. En déduire le sens de variation de la fonction V sur son ensemble de définition.
3. Quelle est la hauteur d'eau ajoutée si le volume total occupé est de 12 360 cm^3 ?

SPÉCIMEN

3 Étude des fonctions de référence

Démo **106** **Étude des variations de la fonction inverse**

On souhaite montrer que la fonction inverse f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Pour cela, on considère deux réels a et b tels que $0<a<b$.

On souhaite comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

1. Justifier que montrer la décroissance de f revient à montrer que $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}<0$.

2. a. Vérifier que $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$.

b. Quel est le signe de $a-b$? celui de ab ?

c. En utilisant la règle des signes, en déduire le signe de $\frac{a-b}{ab}$. Conclure.

3. De manière analogue, montrer que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

107 **1.** Comparer les aires :

a. des carrés de côtés $\frac{5}{3}$ et 2 ;

b. des disques de diamètres 2 et $\sqrt{5}$.

2. Comparer les volumes :

a. des cubes d'arêtes $\frac{1}{3}$ et 0,33 ;

b. des boules de rayons $\sqrt{2}$ et 1,5.

3. On considère deux rectangles d'aire égale à 20. L'un a pour largeur 3,27 et l'autre a pour largeur 4,1. Comparer les longueurs de ces deux rectangles.

108 Une population de 1 000 bactéries augmente chaque semaine de 20 %.



1. Justifier que pour obtenir la population au bout d'une semaine, de deux semaines et de trois semaines, on multiplie 1 000 respectivement par 1,2, par $1{,}2^2$ et par $1{,}2^3$.

2. Comparer ces coefficients multiplicateurs sans utiliser la calculatrice.

3. Mettre en relation cette comparaison avec l'augmentation de la population chaque jour.

109 **1.** Soient deux réels a et b vérifiant $5\leqslant a\leqslant b$. Dans chaque cas, comparer les nombres A et B.

a. $A=a^2$ et $B=b^2$ **b.** $A=\frac{1}{a}$ et $B=\frac{1}{b}$

c. $A=a^3$ et $B=b^3$ **d.** $A=\frac{1}{a^2}$ et $B=\frac{1}{b^2}$

2. Reprendre les questions précédentes en supposant cette fois que $a\leqslant b\leqslant -2$.

110 Compétence Modéliser **Sécurité routière**

Sur une route sèche et horizontale, la distance de freinage D, en mètre, d'une voiture à partir de l'instant où le conducteur appuie sur le frein est donnée par la formule $D=\frac{v^2}{2\times g\times c}$, où :

- v est la vitesse à l'instant du freinage, en m/s ;
- $g=9{,}81\text{m/s}^2$ (accélération de la pesanteur) ;
- c est le « coefficient de frottement longitudinal », dépendant de la nature et de la qualité du revêtement. Ici, on prendra $c=0{,}7$.

1. a. Justifier que lorsque la vitesse à l'instant du freinage est de 50 km/h, la distance de freinage vaut environ 14 m.

b. Quelle est la distance de freinage lorsque la vitesse à l'instant du freinage est de 110 km/h ?

2. Étudier les variations de la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f:v\mapsto D$. Interpréter pour la situation étudiée.

3. La distance de freinage D est-elle proportionnelle à la vitesse v ?

111 Dans chaque cas, on donne une inégalité vérifiée par x. Déterminer une inégalité vérifiée par y.

1. a. $x\leqslant -3$ et $y=x^2$ **b.** $x>5$ et $y=x^2$

2. a. $x<-2$ et $y=\frac{1}{x}$ **b.** $x\geqslant -5$ et $y=x^3$

3. a. $1\leqslant x\leqslant 4$ et $y=\frac{1}{x}$ **b.** $x\in]-6;4[$ et $y=x^2$

112 Soit un réel x vérifiant $-3\leqslant x\leqslant -1$.

1. Déterminer un encadrement vérifié par x^2.

2. En déduire que $-18\leqslant -2x^2\leqslant -2$, puis donner un encadrement de $4-2x^2$.

3. Soit y un réel vérifiant $1\leqslant y\leqslant 4$.

Encadrer au mieux $4y^2$, $2-y^3$ et $-3\sqrt{y}$.

113 Soit un réel x vérifiant $1\leqslant x\leqslant 4$.

1. Déterminer un encadrement vérifié par $\frac{1}{x}$.

2. En déduire que $-3\leqslant\frac{-3}{x}\leqslant -\frac{3}{4}$. En déduire un encadrement de $1-\frac{3}{x}$.

3. Soit y un réel vérifiant $-3\leqslant y\leqslant -1$.

Encadrer au mieux $\frac{2}{y}$, $-\frac{4}{y}+4$ et $\frac{1}{y^2}$.

114 Dans chaque cas, on donne une inégalité vérifiée par x. Déterminer une inégalité vérifiée par y.

1. $5\leqslant x\leqslant 17$ et $y=3\sqrt{x-1}$ **2.** $-5\leqslant x\leqslant -3$ et $y=|2x|$

3. $-2<x<-\frac{3}{2}$ et $y=-2(x+1)^2+1$

4. $x>2$ et $y=-\frac{1}{x-2}$ **5.** $1\leqslant x\leqslant 3$ et $y=2-4(x-5)^3$

SPÉCIMEN

115 **Variations d'une fonction du 2d degré**

On souhaite étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-2(x-3)^2-4$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variations de la fonction f.

2. Pour démontrer sa conjecture, voici un extrait d'une copie d'élève.

Sens de variation de f sur $]-\infty;3]$

On considère deux réels a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty;3]$ tels que $a<b$.

On a alors, en soustrayant 3 à chaque membre :

$$a-\ldots<b-3\leqslant\ldots$$

Or, puisque la fonction carré est … sur $]-\infty;0]$, alors :

$$(a-\ldots)^2\ \ldots\ (b-3)^2$$

Et donc, en …, on obtient alors :

$$-2(a-\ldots)^2\ \ldots\ -2(b-3)^2$$

puis finalement, en … :

$$-2(a-\ldots)^2-4\ \ldots\ -2(b-3)^2-4$$

c'est-à-dire $f(a)\ldots f(b)$. Donc la fonction f est … sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Recopier son raisonnement en complétant les éléments manquants.

3. De manière analogue, étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[3;+\infty[$.

116 **Variations d'une fonction du 2d degré (bis)**

On souhaite étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+6x+4$ en utilisant deux méthodes différentes.

Soient a et b deux réels tels que $a<b\leqslant-3$.

1. Méthode A : étude du signe de la différence $f(a)-f(b)$

a. Justifier que :

$$f(a)-f(b)=(a-b)(a+b+6)$$

b. Quel est le signe de $a-b$? celui de $a+b+6$? En déduire le signe de $f(a)-f(b)$.

c. Conclure.

2. Méthode B : étude des inégalités et du sens de variation des fonctions de référence

a. Justifier que, pour tout réel x :

$$f(x)=(x+3)^2-5$$

b. En utilisant une méthode analogue à celle de l'exercice **115**, comparer $f(a)$ et $f(b)$ et conclure.

117 **1.** Quel est le sens de variation de la fonction cube sur l'intervalle $[0;+\infty[$?

2. En déduire le sens de variation de la fonction qui au rayon d'une boule associe son volume.

3. a. Une boule a un rayon compris entre 10 et 15 cm. Encadrer le plus précisément possible son volume.

b. Encadrer entre deux entiers consécutifs le rayon d'une boule de volume 1 000 cm^3.

118 **Compétence** Raisonner **Exercice guidé**

L'objectif de l'exercice est de comparer les réels x, x^2 et $\sqrt{x}$, pour $x\geqslant0$.

1. a. Tracer les courbes représentatives des fonctions carré et racine carrée et la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$y=x$$

b. Observer leurs positions relatives.

En déduire une conjecture sur la comparaison des réels x, x^2 et $\sqrt{x}$ pour $x\geqslant0$.

2. Démontrer la conjecture émise.

Pistes de résolution

1. Les courbes obtenues permettent de distinguer deux cas, selon les valeurs de x.

2. Mettre en relation les résultats souhaités avec les inégalités sur x : enchaîner des fonctions de référence, utiliser un résultat du cours, etc.

119 Une étoile de température T (en Kelvin K) émet une lumière dont le spectre présente un maximum d'intensité, atteint pour la longueur d'onde λ_{max} (en mètre).

La loi de Wien relie ces deux grandeurs par la relation :

$$\lambda_{max}=\frac{2{,}898\times10^{-3}}{T}$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f:T\mapsto\lambda_{max}$.

2. Deux étoiles A et B ont des longueurs d'onde maximale λ_A et λ_B telles que $\lambda_A<\lambda_B$.

Comparer leurs températures.

3. Encadrer les longueurs d'onde maximales des étoiles jaunes comme le soleil.

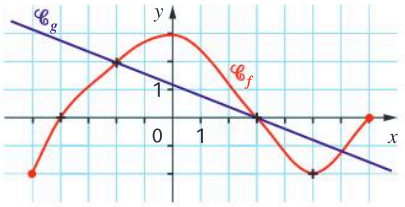
Classe	Température	Couleur
O	> 25 000 K	bleue
B	10 000 – 25 000 K	bleue-blanche
A	7 500 – 10 000 K	blanche
F	6 000 – 7 500 K	jaune-blanche
G	5 000 – 6 000 K	jaune (comme le soleil)
K	3 500 – 5 000 K	jaune-orange
M	< 3 500 K	rouge

SPÉCIMEN

BILAN

120 15min Courbes et variations

On considère les fonctions f et g représentées ci-dessous.



1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction f. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur I en précisant les valeurs où ils sont atteints.
3. Comparer les nombres suivants.
a. $f(-3{,}5)$ et $f(-0{,}9)$ **b.** $f(1{,}5)$ et $f(4{,}1)$
c. $f(-4)$ et $f(6)$ **d.** $f(5{,}3)$ et $f(6{,}2)$
4. Dans chacun des cas suivants, donner le meilleur encadrement de $f(x)$ possible.
a. $-5 \leqslant x \leqslant -2$ **b.** $3 < x < 5$
5. La fonction g est affine. Déterminer son expression puis son tableau de signes.

121 15min Exploiter un tableau de variations

La fonction f admet pour tableau de variations :

x	-2		3		8		11		15
$f(x)$	-1	↘	-5	↗	0	↗	7	↘	1

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Décrire en une phrase les variations de la fonction f.
3. a. Déterminer l'image de 3 par f.
b. Combien d'antécédents 2 admet-il par f ?
4. Comparer, si possible :
a. $f(-1)$ et $f(0)$ **b.** $f(-2)$ et $f(11)$
c. $f(1)$ et $f(5)$ **d.** $f(1)$ et $f(12)$
5. Dans chaque cas, donner un encadrement de $f(x)$ aussi petit que possible.
a. Pour tout réel $x \in [8;15]$, on a $\ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots$.
b. Pour tout réel $x \in [-2;15]$, on a $\ldots \leqslant f(x) \leqslant \ldots$.
6. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

122 15min Deux triangles dans un rectangle

On considère un rectangle $ABCD$, tel que $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. Le point M est un point du segment $[AB]$. On note f et g les fonctions qui donnent respectivement l'aire des triangles AMD et BCM en fonction de la longueur AM. On pose $x = AM$.
1. Faire un schéma de la situation.
2. Déterminer les variations des fonctions f et g.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x les aires de ces triangles sont-elles égales ?

123 10min Comparaisons de nombres

Dans chaque cas, comparer les nombres donnés en justifiant la réponse.
1. $3{,}1^2$ et $5{,}2^2$ **2.** $1{,}9^3$ et $2{,}1^3$
3. $\dfrac{1}{4{,}2}$ et $\dfrac{1}{5{,}3}$ **4.** $(-5{,}3)^2$ et $(-4{,}9)^2$
5. $\sqrt{5}$ et $\sqrt{\pi}$ **6.** $0{,}812^2$ et $0{,}812^3$

124 10min Courbe sous contraintes

Soit la fonction f définie sur $[-5;12]$ telle que :
• f est croissante sur l'intervalle $[-5;3]$ et sur l'intervalle $[8;12]$; elle est décroissante sinon ;
• le maximum de f sur $[3;8]$ vaut 10 ;
• $f(-5) = -1$ et $f(8) = 3$;
• l'image de 12 par f vaut 8 ;
• la courbe de f passe par le point $(5;5)$;
• la courbe de f coupe l'axe des abscisses en -3, et l'axe des ordonnées en 8.
1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer une courbe possible représentant f.

125 30min À propos d'encadrements

1. Dans chaque cas, encadrer au mieux les nombres $A = \dfrac{1}{x}$; $B = -\dfrac{3}{x} + 2$ et $C = 3x^2 - 1$.
a. $x \in [1;3]$ **b.** $-8 \leqslant x \leqslant -1$
c. $-5 \leqslant x < -\dfrac{3}{2}$ **d.** $10^2 \leqslant x < 10^5$
2. Soit y un réel tel que $-5 \leqslant y < 1$. Déterminer un encadrement de $y - 3$, en déduire un encadrement de $(y-3)^2$ puis de $\dfrac{1}{(y-3)^2}$.
3. Donner un encadrement de $|1 - 2x|$ pour $3 < x < 5$.

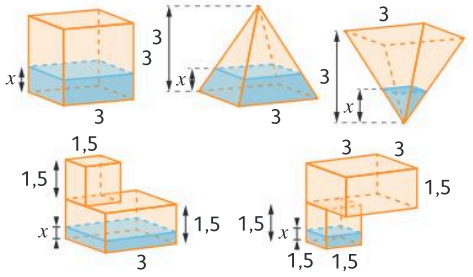
126 35min Aire variable et optimisation

On considère un carré $ABCD$ de côté 12 cm. M est un point mobile sur le segment $[AB]$. F est le point du segment $[AD]$ et H est le point du segment $[BC]$ tels que $AM = AF = CH$.
On note x la longueur AF et $f(x)$ désigne la somme des aires du triangle MBH et du carré $AMEF$, E appartenant à $[AC]$.
1. Faire une figure.
2. a. Dans quel intervalle x varie-t-il ? On note I cet intervalle dans la suite.
b. Montrer que $f(x) = 1{,}5x^2 - 12x + 72$.
c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de x pour laquelle la somme des aires est minimale.
3. Vérifier que, pour tout réel $x \in$ I, on a :
$$f(x) - 48 = 1{,}5(x-4)^2$$
Justifier alors la conjecture précédente.

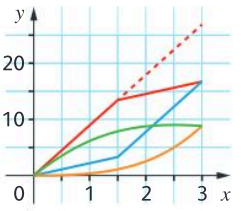
SPÉCIMEN

127 PRISE D'INITIATIVES À propos de volumes

Chaque solide représente un récipient à base carrée de côté 3. On les remplit d'eau.



Pour chacun des solides, on s'intéresse à la fonction qui, à la hauteur x d'eau, associe le volume d'eau dans le solide. On a représenté graphiquement ces cinq fonctions. Associer chaque courbe à un solide, en argumentant.



Démo

128 Étude des variations de la fonction cube

On souhaite montrer que la fonction cube f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on considère deux réels a et b tels que $a < b$. On veut comparer a^3 et b^3 en étudiant le signe de la différence $a^3 - b^3$.

1. Justifier que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. Quel est le signe de $a-b$?

3. Étude du signe de a^2+ab+b^2

a. À l'aide d'un tableur, conjecturer le signe de a^2+ab+b^2 pour a, b de signes quelconques.

b. Après avoir justifié que :

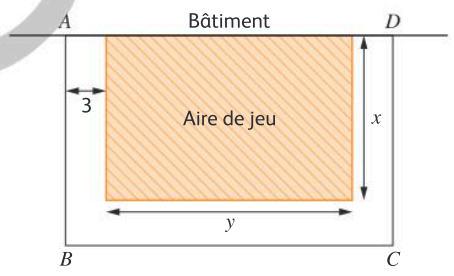
$$a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

démontrer alors la conjecture émise en **3. a.**

4. Conclure quant au signe de a^3-b^3 et au sens de variation de la fonction cube.

129 Aire de jeu

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2. Celle-ci est entourée par une clôture sur trois côtés et d'une allée de 3 m de large.



De plus, on souhaite que la longueur et la largeur de l'aire de jeu soient supérieures ou égales à 10 m.

On recherche les dimensions de l'aire de jeu de façon à ce que la longueur de clôture soit la plus petite possible. x et y sont les dimensions de l'aire de jeu indiquées sur le croquis et L la longueur de la clôture avec $L = AB + BC + CD$.

On admet dans la suite que $x \in [10;45]$.

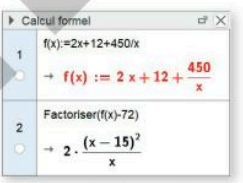
1. a. Exprimer la longueur y en fonction de x.

b. En déduire que $L = 2x + 12 + \dfrac{450}{x}$.

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $I = [10;45]$ par $f(x) = 2x + 12 + \dfrac{450}{x}$.

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de x pour laquelle la longueur de la clôture semble minimale. *On pourra exploiter la fonctionnalité Minimum de la calculatrice.*

b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient le résultat ci-contre. Justifier alors la conjecture émise précédemment.



c. En déduire les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Que vaut alors cette longueur ?

130 En lien avec la chimie

Un TP de chimie consiste à mettre en relation le volume et la pression d'un gaz, à température ambiante. Voici les résultats obtenus :

V (en mL)	50	46	42	34	30	26	22
P (en kPa)	58	63	68	83	95	108	127

1. Construire le nuage de points associé au tableau.

2. On cherche à déterminer une fonction qui au volume du gaz associe la pression. Laquelle de ces trois propositions semble la plus adaptée ?

a. $f(x) = -2x + 151$ **b.** $g(x) = -1{,}25x + 120$

c. $h(x) = \dfrac{2840}{x}$

3. Utiliser la réponse précédente pour déterminer :

a. le volume occupé par le gaz lorsque la pression vaut 150 000 Pa ;

b. la pression du gaz lorsque son volume vaut 0,5 L.

4. Recopier et compléter la phrase suivante, en argumentant :

« Lorsque le volume d'un gaz augmente, sa pression … »

Info

La loi de Boyle-Mariotte : « le produit $P \times V$ est constant à température constante », date du milieu du XVII^e siècle. Elle a de très nombreuses applications, notamment en plongée sous-marine.

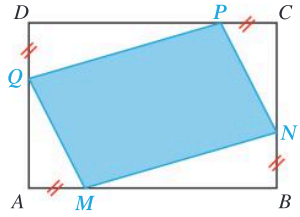
SPECIMEN

131 $ABCD$ est un rectangle tel que :

$$AB = 10 \text{ et } AD = 6$$

Pour tout réel a de l'intervalle $[0;6]$, on considère les points M, N, P et Q respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ tels que :

$$AM = BN = CP = DQ = a$$



1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur a variant de 0 à 6, puis réaliser la figure et afficher l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

b. Conjecturer la valeur de a pour que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit minimale et préciser la valeur de ce minimum.

2. Soit un réel $a \in [0;6]$.

a. Montrer que l'aire du quadrilatère $MNPQ$, en fonction de a, est égale à $2a^2 - 16a + 60$.

b. Justifier que $2a^2 - 16a + 60 = 2(a-4)^2 + 28$.

c. Démontrer la conjecture émise à la question **1. b.**

3. Un peu de géométrie ! En utilisant le calcul vectoriel, démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

132 **Variations d'une fonction rationnelle**

On souhaite étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x^2+1}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variations de f.

2. La fonction f peut s'écrire comme un enchaînement de fonctions de référence :

$$x \xmapsto{\bullet^2} x^2 \xmapsto{\bullet+1} x^2+1 \xmapsto{1\div\bullet} \frac{1}{x^2+1} \xmapsto{\bullet\times(-2)} -\frac{2}{x^2+1}$$

On considère deux réels a et b tels que $b < a \leqslant 0$. En appliquant successivement les fonctions de références du schéma précédent, recopier et compléter les étapes du raisonnement suivant par des inégalités en justifiant chaque étape.

a. On a $0 \ldots a^2 \ldots b^2$ car ….

b. D'où $1 \ldots a^2+1 \ldots b^2+1$ car ….

c. Et donc $1 \ldots \dfrac{1}{a^2+1} \ldots \dfrac{1}{1+b^2}$ car ….

d. D'où $-2 \ldots f(a) \ldots f(b)$ car ….

e. La fonction f est donc … sur l'intervalle ….

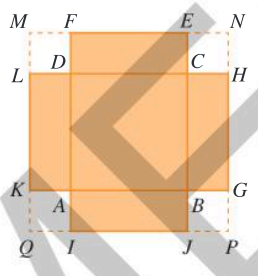
3. De la même façon, étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

133 **Obtenir un volume maximal**

On dispose d'un carton carré de côté 12 cm.

Dans les quatre coins, on découpe des petits carrés identiques, de manière à pouvoir replier le carton et fabriquer une boîte (sans couvercle) en forme de pavé droit.

On appelle x la longueur du côté des carrés découpés et $f(x)$ le volume de la boîte obtenue.



1. Justifier que $0 \leqslant x \leqslant 6$.

2. Exprimer les dimensions (longueur, largeur et hauteur) de la boîte en fonction de x.

En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer la valeur du maximum M de la fonction f.

4. Démontrer que $f(x) - 128 = 4(x-8)(x-2)^2$.

5. Comment doit-on découper le grand carton pour que le volume de la boîte soit maximal ?

134 **Optimisation d'un bénéfice**

Une entreprise fabrique et vend de la pâte à papier. Le coût de production de q tonnes de pâte à papier est donné, en millier d'euros par :

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 0{,}1q + 9 \text{ pour } q \in [0;80]$$

1. Chaque tonne de papier est vendue 1 200 euros. En déduire l'expression de la recette $R(q)$, exprimée en millier d'euros, engendrée par la vente de q tonnes de pâte à papier.

2. Vérifier que le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend q tonnes de pâte à papier est égal à :

$$B(q) = -0{,}02q^2 + 1{,}1q - 9$$

3. À l'aide de la calculatrice, conjecturer :

a. le nombre de tonnes de pâte à papier que doit produire l'entreprise pour que la production soit rentable, c'est-à-dire qu'elle permette un bénéfice positif ;

b. le bénéfice maximal que peut dégager cette entreprise.

4. a. Justifier que, pour tout $x \in [0;80]$, on a :

$$B(q) = 0{,}02(45-q)(q-10)$$

et $B(q) = 6{,}125 - 0{,}005(2q-55)^2$

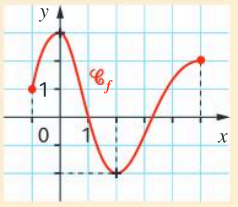
b. En utilisant ces égalités, valider les conjectures émises dans la question **3.**

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

135 Voici la représentation graphique de la fonction f.



1. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer ses extremums.

136 **Extraire et analyser des informations**
On considère une fonction f définie sur $[-2;5]$ dont on donne ci-dessous le tableau de valeurs et le tableau de variations.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	-3	0	1	4	5,5	2

x	-2		0		$3,5$		5
$f(x)$	4	↘	-3	↗	6	↘	2

1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ? Justifier.
a. Le maximum de f sur $[-2;5]$ est 5,5.
b. $f(1{,}5) < f(2{,}5)$
c. L'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions : -2 et 3.
d. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions : -1 et 2.
e. Le minimum de f sur $[-2;5]$ est -3.
2. Tracer une courbe représentative possible de f.
3. La courbe tracée à la question **2.** est-elle unique ?

137 **Extremum d'une fonction du 2nd degré**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'existence d'un extremum pour f.
2. Montrer que $f(x) = -(x-1)^2 + 2$.
3. Justifier alors la conjecture précédente en précisant pour quelle(s) valeur(s) cet extremum est atteint.

138 Une commune souhaite réaménager une aire de jeux rectangulaire sur un terrain lui aussi rectangulaire de 30 m par 10 m, avec la contrainte de créer un chemin d'un à deux mètres de large tout autour.
Encadrer le périmètre puis l'aire possible de cette aire de jeux.

139 On considère la fonction affine, dont la droite représentative passe par le point de coordonnées $(4;6)$ et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -4.
1. Dresser son tableau de signes.
2. Déterminer son expression algébrique.

Aller plus loin

140 PRISE D'INITIATIVES

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2088

Le tableau suivant donne la part (en %) des énergies renouvelables dans la consommation d'énergie en France sur 12 années, de 2011 à 2022.

2011	2012	2013	2014	2015	2016
12,7	13,3	13,9	14,4	14,9	15,5

2017	2018	2019	2020	2021	2022
15,9	16,4	17,2	19,2	19,4	20,7

Ainsi, par exemple, 15,5 % de l'énergie consommée en France en 2016 était renouvelable.
1. Construire sur un graphique le nuage de points correspondant à ce tableau ; on pourra prendre pour unité 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.
2. a. En observant le nuage de points, on décide de modéliser l'évolution de la part des énergies renouvelables dans la consommation annuelle d'énergie en France par une fonction affine. Proposer une telle fonction et tracer la droite qui la représente.
b. À l'aide de cette fonction, à combien peut-on estimer la part des énergies renouvelables dans la consommation d'énergie en France en 2030 ?
c. À l'aide de cette fonction, en quelle année cette part pourrait-elle s'élever à 40 % ?

141 PRISE D'INITIATIVES

Somme de carrés
La somme des carrés de trois entiers consécutifs est comprise entre 2 018 et 2 108.
Quels sont ces entiers ?

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2089

142 **À quelle distance se trouve l'orage ?**
On estime qu'un son se propage dans l'air à la vitesse $v = 20 \times \sqrt{273 + T}$, en m/s, où T est la température de l'air en °C.
1. Lorsque la température augmente, le son se propage-t-il plus vite ou moins vite ?
2. Il fait 30 °C un jour d'orage. On observe qu'il s'écoule 10 secondes entre l'éclair et le coup de tonnerre.
En supposant que la propagation de la lumière est instantanée, à quelle distance de l'observateur la foudre est-elle tombée ?

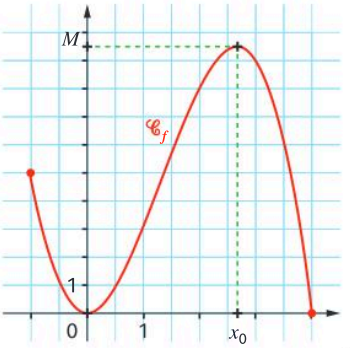
SPÉCIMEN

TP Pratiquer l'algorithmique et programmer

Recherche de maximum

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[-1;4]$ par $f(x)=4x^2-x^3$.
Le but de ce TP est de déterminer des valeurs approchées du maximum M de f sur I et du réel x_0 en lequel il est atteint.
Pour cela, on commence par définir la fonction f en langage Python :

```
def f(x):
    return 4*x**2-x**3
```



Objectif PYTHON
Manipuler des fonctions, des boucles *Tant que* et l'instruction *Si*.

Partie A Manipuler un algorithme

On considère la fonction parcours suivante, traduite en langage Python, où la variable p est un réel strictement positif.

Langage naturel

Fonction parcours(p)
  $x \leftarrow -1$
  Tant que $x \leqslant 4$ Faire
    Afficher $(x ; f(x))$
    $x \leftarrow x+p$
  Fin Tant que

Python

```
def parcours(p):
    x=-1
    while x<=4:
        print(x,f(x))
        x=x+p
```

1. Exécuter à la main la fonction « parcours(1) ».
2. Programmer et vérifier le résultat de la question 1.
3. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Info
L'instruction Python « x=x+p » n'est pas une égalité mathématique : x n'est pas « égal à » $(x+p)$.
Il s'agit d'une **affectation** : la variable x reçoit la valeur du calcul $(x+p)$, ce dernier x étant la valeur avant affectation.

Voir Chap. Algo. p. 350

Partie B Comprendre le fonctionnement d'un algorithme

On considère la fonction maximum suivante, traduite en langage Python, où la variable p est un réel strictement positif.

Langage naturel

Fonction maximum(p)
  $x \leftarrow -1$
  $x_0 \leftarrow -1$
  Tant que $x \leqslant 4$ Faire
    Si $f(x) > f(x_0)$ Faire
      $x_0 \leftarrow x$
    Fin Si
    $x \leftarrow x+p$
  Fin Tant que
  Renvoyer $(x_0 ; f(x_0))$

Python

```
def maximum(p):
    x=-1
    x0=-1
    while x<=4:
        if f(x)>f(x0):
            x0=x
        x=x+p
    return (x0,f(x0))
```

1. a. On exécute la fonction « maximum(1) ».
Justifier que le résultat renvoyé est $(3;9)$.

b. Le maximum de f sur I est-il égal à 9 ?
Est-il atteint en 3 ?

2. a. Programmer et exécuter la fonction « maximum(0.1) ». Vérifier que le premier argument renvoyé est 2,7.

b. Peut-on affirmer que $x_0 \approx 2{,}7$ à 0,1 près ?

c. Le deuxième argument renvoyé est $f(2{,}7)$. Est-il, de façon certaine, une valeur approchée de M à 0,1 près ?

3. a. Que permet de faire le bloc suivant ?

```
Si f(x)>f(x0) Faire
    x0 ← x
Fin Si
```

b. Expliquer pourquoi la fonction maximum(p) renvoie des valeurs approchées de x_0 et de M, celle de x_0 étant affichée par excès à p près.

Partie C Modifier un algorithme

On s'inspirera de l'algorithme de la Partie B, que l'on modifiera, pour répondre aux questions suivantes.

1. Programmer une fonction maximum_inf qui prend en argument un réel p strictement positif et qui renvoie une valeur approchée de x_0 par défaut à p près.

2. Programmer une fonction maximum_intervalle qui prend en argument trois réels a, b et p (où $a<b$ et $p>0$) et qui renvoie des valeurs approchées du maximum de f sur $[a;b]$ et du réel en lequel il est atteint.

3. Programmer une fonction minimum qui prend en argument un réel p strictement positif et qui renvoie des valeurs approchées du minimum m de f sur l'intervalle I et d'un réel x_1 en lequel il est atteint.
Le réel x_1 sera affiché par excès à p près.

4. Vérifier les résultats obtenus par ces fonctions en les comparant avec les résultats obtenus par une calculatrice graphique en parcourant la courbe représentative de f.

SPECIMEN

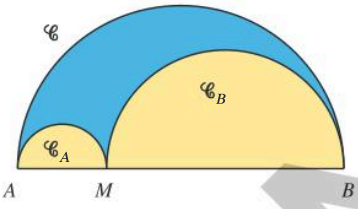
TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Aire entre trois demi-cercles

TRAVAIL DE GROUPE

On considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ où $AB = 10$.
Pour tout point M du segment $[AB]$, on construit, à l'intérieur de $\mathscr{C}$, les demi-cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$.
On s'intéresse aux variations de l'aire du domaine coloré en bleu compris entre les demi-cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ lorsque M parcourt le segment $[AB]$.
On pose $x = AM$ et $f(x)$ l'aire du domaine bleu.



Partie A Recherches

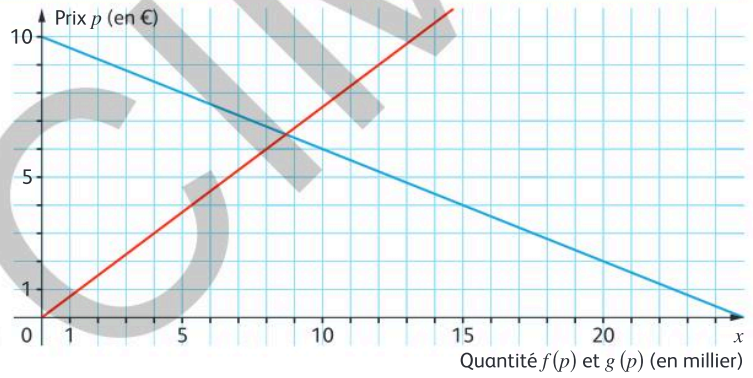
1. À quel intervalle I la variable x appartient-elle ?
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, estimer le maximum M de f sur l'intervalle I et factoriser l'expression $f(x) - M$.
4. Déterminer, en argumentant, les variations de f sur l'intervalle I.

Partie B À l'écrit ou à l'oral
Faire un bilan des recherches et présenter les résultats des recherches : description du problème, étude mathématique, conclusion.
On veillera à utiliser un vocabulaire précis.

TP2 Offre et demande en économie

En économie :
- l'**offre** est la quantité de biens que les producteurs sont prêts à vendre à un prix donné ;
- la **demande** est la quantité de biens que les consommateurs sont prêts à acheter pour un prix donné.

Traditionnellement, les fonctions d'offre et de demande sont représentées de la façon suivante :
- en abscisse, on place les quantités ;
- en ordonnée, on place les prix.



Lors du lancement d'un jouet sur le marché, une étude a permis d'obtenir les courbes d'offre et de demande ci-dessus.

Partie A Étude graphique

1. Identifier les courbes d'offre et de demande, en justifiant le choix fait.
2. Lorsque le prix du jouet est de 5 €, quelle est la quantité approximative de jouets :
a. qu'est prête à vendre l'entreprise ?
b. que sont prêts à acheter les consommateurs ?
3. Le marché offre-demande est **à l'équilibre** lorsque pour un même prix, la quantité offerte par les producteurs est égale à la quantité demandée par les consommateurs.
Avec la précision permise par le graphique, déterminer ce prix d'équilibre et la quantité à laquelle il correspond.

Partie B Étude algébrique

Pour un prix p (en euro), on note $f(p)$ la quantité offerte par les producteurs (en millier) et $g(p)$ la quantité demandée par les consommateurs (en millier).
Ainsi on a $0 \leqslant p \leqslant 10$.
On suppose que f et g sont des fonctions affines.
1. Déterminer les expressions algébriques des fonctions f et g.
2. Déterminer algébriquement le prix d'équilibre.
Comparer avec le résultat obtenu à la question **A. 3.**

info

Le **prix d'équilibre** d'un produit optimise le nombre d'échanges.
- Pour un prix inférieur, la quantité demandée par les consommateurs est supérieure à la quantité offerte par les vendeurs : il y a des acheteurs potentiels privés du produit.
- Pour un prix supérieur, la quantité demandée par les consommateurs est inférieure à la quantité offerte par les vendeurs : une certaine quantité du produit n'est pas vendue.

SPECIMEN

CHAPITRE

11 Statistique descriptive et information chiffrée

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Comparer deux séries statistiques
- CAPACITÉ 2 Calculer la moyenne, déterminer la classe médiane et estimer la médiane dans le cas d'une série regroupée par classes
- CAPACITÉ 3 Mettre en relation effectifs, proportions et pourcentages
- CAPACITÉ 4 Manipuler des valeurs successives et leur taux d'évolution
- CAPACITÉ 5 Compléter un tableau croisé d'effectifs, calculer des fréquences conditionnelles et marginales
- CAPACITÉ 6 Manipuler les pourcentages de pourcentages
- CAPACITÉ 7 Calculer un taux d'évolution global et réciproque



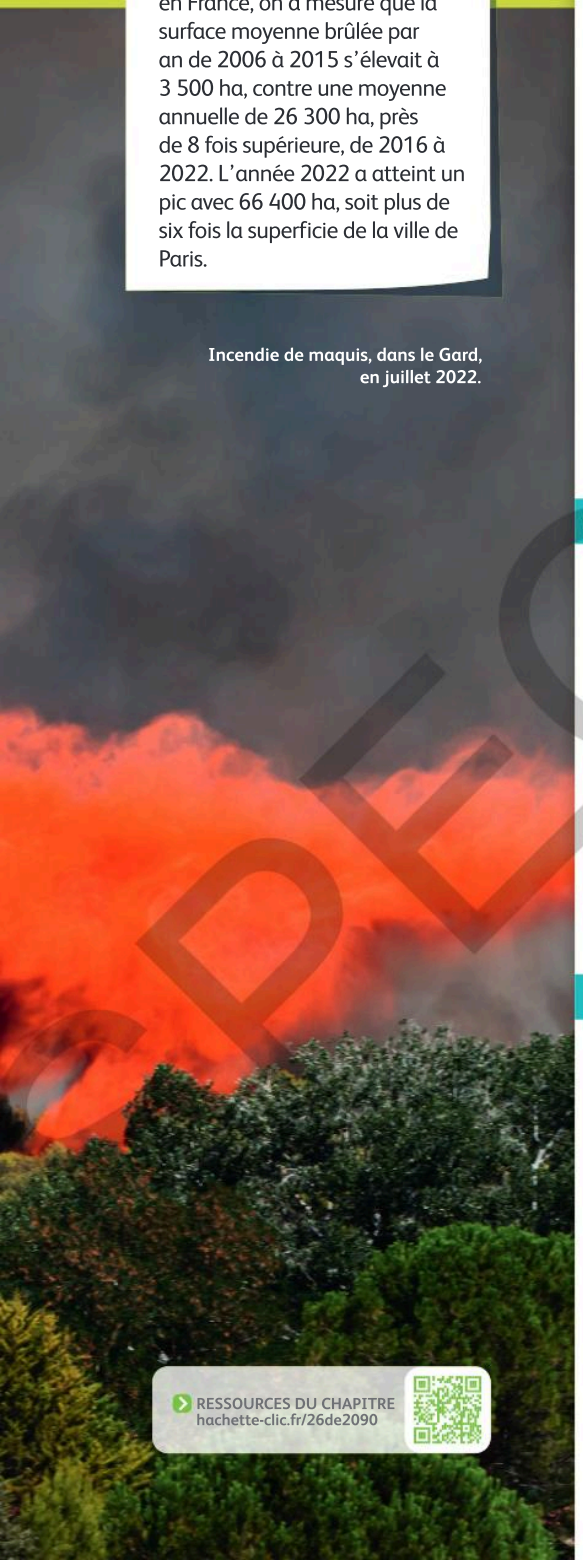
Au fil du temps

Le nom de *statistique* est assez récent, mais l'activité humaine correspondante est très ancienne : on trouve des traces de recensement du bétail, de suivi du cours des céréales, de comptage de la population humaine, etc., depuis la Chine du XIII^e siècle av. J.-C. ! L'exploitation des statistiques à des fins de prévision date pour sa part du XVIII^e siècle, avec les premières tables de mortalité. En 1746, Antoine Deparcieux écrit *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* […]. Les grands noms du développement des statistiques sont J. Bernoulli au XVII^e siècle, Nicolas de Condorcet au XVIII^e, Pierre-Simon de Laplace et Adolphe Quételet au XIX^e ; on peut citer Andreï Kolmogorov pour le XX^e siècle.

EXTRAIT

Des maths partout !

Les statistiques sont utilisées dans de très nombreux domaines de l'activité humaine, comme dans l'observation des phénomènes naturels. Elles permettent de rendre compte de données chiffrées nombreuses et variées. Ainsi, dans l'étude des incendies en France, on a mesuré que la surface moyenne brûlée par an de 2006 à 2015 s'élevait à 3 500 ha, contre une moyenne annuelle de 26 300 ha, près de 8 fois supérieure, de 2016 à 2022. L'année 2022 a atteint un pic avec 66 400 ha, soit plus de six fois la superficie de la ville de Paris.



Incendie de maquis, dans le Gard, en juillet 2022.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2090

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Redéfinir le vocabulaire d'une série statistique

Dans le cadre d'une campagne de prévention, on a interrogé des personnes sur une plage pour leur demander combien de fois ils s'appliquent de la crème solaire en une journée.
Les réponses obtenues sont les suivantes.

0	1	1	1	2	0	0	0	2	1
1	3	1	2	2	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	2	1	0	1

1. Compléter le tableau d'effectif ci-dessous.

Nombre d'applications	0	1	2	3
Effectif	9			

2. Quel pourcentage de la population interrogée s'applique-t-elle au moins deux fois par jour de la crème solaire ?

3. Quelle est la moyenne de cette série statistique ?

C Calculer avec des proportions

Pour chaque question, utiliser une proportion pour calculer le résultat demandé.

1. Trois quarts d'une classe de 36 élèves souhaitent choisir les mathématiques comme enseignement de spécialité.
Combien d'élèves sont concernés ?

2. 20 % des 1 080 salades vendues ce mois-ci dans un restaurant ont été accompagnées d'une sauce allégée.
Combien de sauces allégées ont été vendues ?

3. Dans un QCM, le taux de mauvaises réponses à la première question a été de 0,46. Sachant que 250 candidats ont passé ce test, combien ont répondu correctement à la 1re question ?

D Manipuler proportion et évolution

Un glacier propose six parfums de glaces, trois sont « classiques » (vanille, chocolat, fraise) et trois « exotiques » (litchi, coco, mangue).
Au cours d'une semaine, sur un total de 500 ventes, 110 étaient des glaces à la vanille, 90 au chocolat et 140 à la fraise.

1. Quelle est la proportion de glaces à la vanille vendues ?

2. Quelle est la proportion de glaces au chocolat ou à la fraise vendues ?

3. Peut-on dire qu'au moins un tiers des parfums vendus sont des parfums exotiques ?

4. Les glaces au litchi coûtent 20 % plus cher que les autres parfums. Déterminer le prix de ces glaces, sachant que les autres parfums coûtent 1,50 €.

SPÉCIMEN

automatismes

Automatismes transversaux

1 Résoudre les équations suivantes.

1. $4x(x+1)-5=-5$ 2. $x(16x+4)=0$

2 Résoudre les équations suivantes.

1. $2x+7=5$
2. $x-11=3x+5$

3 Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2=36$ 2. $4x^2=16$
3. $x^2+1=0$ 4. $\sqrt{x}=2$

4 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $3x-8<10$
2. $x-4\leqslant 5x+24$

5 Développer les expressions suivantes.

1. $4x(x+1)+(x-1)^2$
2. $(x+6)(x-4)-2x(3x+1)$

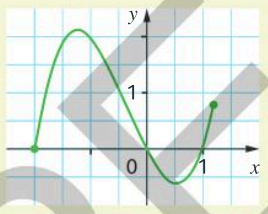
6 Factoriser les expressions suivantes.

1. $49x^2-16$
2. $x(3x+4)-(2x-3)(3x+4)$

7 Effectuer les calculs suivants.

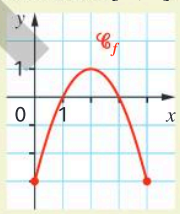
1. $2\times\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$ 2. $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{5}-1\right)$

8 Lire graphiquement :



1. le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ;
2. l'image de -1 par f.

9 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;4]$.



Par lecture graphique :

1. résoudre l'équation $f(x)=0$;
2. résoudre l'inéquation $f(x)<0$;
3. dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0\,;4]$;
4. dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;4]$.

Automatismes préparatoires au chapitre

10 Calculer la moyenne des séries suivantes.

1. 5 ; 6 ; 8 ; 5 ; 7 ; 2 ; 5 ; 9 ; 2 ; 1
2. 34 ; 36 ; 41 ; 39 ; 41 ; 40
3.

Valeur	0	1	2	3
Effectif	3	1	4	2

11 Léo a obtenu les notes de 14 et 15 coefficient 1, les notes de 12 et 13 coefficient 3 et la note 8 coefficient 2. Calculer la moyenne de Léo.

12 Déterminer la médiane des séries suivantes.

1. 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 14
2. 2 ; 4 ; 9 ; 11 ; 11 ; 15 ; 16
3. 5 ; 15 ; 2 ; 8 ; 4 ; 10 ; 7 ; 8 ; 12

13 Dans chaque cas, déterminer la quatrième proportionnelle.

1.

12	24
18	

2.

40	55
	22

3.

	18
70	60

4.

	30
24	12

14 Effectuer les calculs suivants.

1. $\frac{1}{2}\times 15$ 2. $\frac{1}{5}\times 60$ 3. $\frac{1}{10}\times 125$

15 Effectuer les calculs suivants.

1. $0{,}8\times 20$ 2. $0{,}2\times 50$ 3. $1{,}5\times 40$

16 Recopier et compléter le tableau.

20 % de 50	…
50 % de …	80
$\frac{1}{3}$ de 93	…
… de 120	12

17 Recopier et compléter le tableau.

80 % de 200	…
20 % de …	30
$\frac{1}{4}$ de 56	…
… de 50	30

18 Recopier et compléter le tableau suivant.

Fractionnaire	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{5}$		
Décimale				0,75	
Pourcentage		25 %			20 %

SPECIMEN

activités

1 Comment « agir » sur la moyenne et sur la médiane ?

Objectif
Calculer une moyenne et une médiane.

Voici une série de 9 notes : 7 ; 5 ; 9 ; 13 ; 14 ; 17 ; 12 ; 10 ; 12.

1 a. Calculer la moyenne de cette série.
b. Modifier deux notes sans changer la moyenne.
c. Modifier une note de telle sorte que la moyenne augmente de 1.
d. Supprimer une note de telle sorte que la moyenne augmente, mais le moins possible.

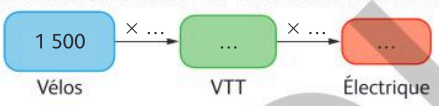
2 a. Calculer la médiane de cette série.
b. Peut-on modifier une note de façon à augmenter la médiane de 1 ?
c. Peut-on modifier une note de façon à augmenter la médiane de 2 ?

3 Proposer une série de 8 notes entières de moyenne 11 et de médiane 10,5.

2 Gestion d'un stock

Objectif
Calculer un pourcentage de pourcentage.

Un magasin, spécialisé dans la vente de vélos, possède un stock de 1 500 vélos. 60 % des vélos sont des VTT et 15 % de ces VTT sont électriques.
On représente les différents stocks à l'aide du schéma suivant :



Info
Pour manipuler les pourcentages, la méthode des « coefficients multiplicateurs » est rapide et efficace

1 a. Combien de VTT sont présents dans le stock du magasin ?
b. Compléter les premières flèche et case du schéma.

2 a. Combien de VTT sont électriques dans le stock du magasin ?
b. Compléter les deuxièmes flèche et case du schéma.

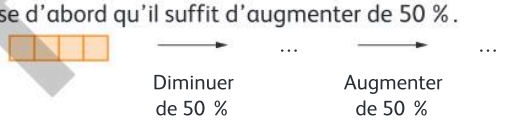
3 a. Déterminer la proportion, en pourcentage, des VTT électriques parmi l'ensemble du stock du magasin.
b. Comparer le résultat obtenu avec $0{,}6 \times 0{,}15$. En déduire une autre façon de calculer la proportion de la question **3.** a.

3 Retour à la situation initiale

Objectif
Trouver un taux réciproque.

Un prix a baissé de 50 %. Lola se demande quel taux d'augmentation appliquer au nouveau prix pour retrouver le prix initial.

1 Elle pense d'abord qu'il suffit d'augmenter de 50 %.



Recopier et compléter le schéma ci-dessus. Lola a-t-elle raison ?

Vocabulaire
Le taux qui neutralise une évolution s'appelle un **taux réciproque**.

2 Lola se souvient qu'au collège elle a écrit :
• « Baisser de 50 % revient à multiplier par … »
• « Diviser par un nombre revient à … »
a. Compléter ces propriétés.
b. Recopier et compléter le graphique ci-dessous.



c. Aider Lola à répondre à sa question.

SPECIMEN

Cours

1 Résumés statistiques

a Moyenne et écart type

Définition La moyenne d'une série, notée $\bar{x}$, est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série par l'effectif total.

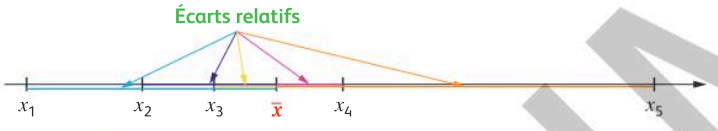
Si une série est donnée par son tableau d'effectifs, on a $\bar{x} = \dfrac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \ldots + x_p \times n_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.

Valeurs	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

Propriété On considère une série de moyenne $\bar{x}$.

- Si on multiplie toutes les valeurs de la série par un nombre a alors la moyenne $\bar{x}$ est multipliée par a.
- Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs de la série alors cette valeur b s'ajoute à la moyenne $\bar{x}$.

Pour mesurer la dispersion des valeurs d'une série par rapport à la moyenne, on prend en compte l'écart relatif de chaque valeur à la moyenne.



Définition Soit la série de N valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de moyenne $\bar{x}$.

- La variance V de la série est la moyenne des carrés des écarts des valeurs avec la moyenne : $V = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots + (x_N-\bar{x})^2}{N}$
- L'écart type σ de la série est la racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque

Le couple $(\bar{x}, \sigma)$ permet de résumer une série.
Il a l'avantage d'utiliser toutes les valeurs de la série, en ce sens il est représentatif de la série. Il a l'inconvénient d'être « sensible » aux valeurs extrêmes.

Exemple

On donne la série suivante.

Valeur	5	8	10
Eff.	1	2	2

La moyenne $\bar{x}$ est égale à :

$$\bar{x} = \frac{5\times1+8\times2+10\times2}{1+2+2} = 8{,}2$$

On multiplie toutes les valeurs de série par 2 et on ajoute 1.
La série devient :

Valeur	11	17	21
Eff.	1	2	2

La nouvelle moyenne $\bar{x'}$ vaut :

$$\bar{x'} = 2\times\bar{x}+1 = 17{,}4$$

Exemple

Soit la série 5 ; 8 ; 8 ; 10 ; 10 de moyenne 8,2.
La variance V est égale à :

$$\frac{(5-8{,}2)^2+(8-8{,}2)^2+\ldots+(10-8{,}2)^2}{5}$$

$$= 3{,}36$$

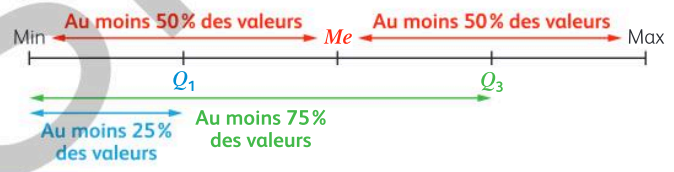
L'écart type est égal à :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3{,}36} \approx 1{,}83$$

b Médiane et écart interquartile

La médiane Me permet de partager en deux une série rangée dans l'ordre croissant. Pour la partager en quatre, on utilise les quartiles.

Définition Le premier quartile (resp. le troisième) de la série, noté Q_1 (resp. Q_3), est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % (resp. 75 %) des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.



Propriété On appelle écart interquartile, le nombre $Q_3 - Q_1$.

Remarque

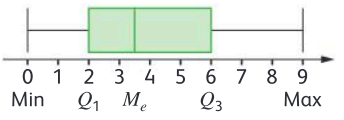
Le couple $(Me, Q_3 - Q_1)$ permet de résumer une série. Il a l'avantage de posséder une représentation graphique (diagramme en boite) et de ne pas être sensible aux valeurs extrêmes.

Exemple

Soit la série ordonnée suivante.
0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4
4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 9
$\text{Eff}_{\text{total}}$ est égal à 22 et est pair donc la médiane est la moyenne de la 11e et de la 12e valeur de la série.

$$Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$$

Position de Q_1 : $22\times0{,}25 = 5{,}5$
Q_1 est la 6e valeur de la série soit 2.
Position de Q_3 : $22\times0{,}75 = 16{,}5$
Q_3 est la 17e valeur de la série soit 6.
On obtient le diagramme suivant.



L'écart interquartile est :

$$Q_3 - Q_1 = 6 - 2 = 4$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Comparer deux séries statistiques

Énoncé Dans un lycée, on relève la taille des élèves. On regroupe les informations dans le tableau suivant, où la taille a été arrondie à 5 cm près.

Taille (cm)	150	155	160	165	170	175	180
Effectif	17	103	102	211	236	307	24

1. a. Déterminer la taille moyenne des élèves du lycée.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'écart type de cette série.
2. Dans un lycée voisin, on relève, de la même manière, la taille des élèves. Le lycée communique les informations suivantes : « La taille moyenne d'un élève dans notre établissement est de 170,2 cm, pour un écart type de 12,3 ».
Comparer les résultats des deux lycées.

Solution rédigée

1. a. On applique directement la formule de la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{150\times17+155\times103+160\times102+165\times211+170\times236+175\times307+180\times24}{17+103+102+211+236+307+24} \approx 167{,}8$$

Dans le lycée, la taille moyenne des élèves est d'environ 167,8 cm.
b. Dans le mode statistique de la calculatrice, on commence par compléter les données en indiquant les valeurs étudiées et les effectifs associés. On obtient alors :



L'écart type de cette série est $\sigma \approx 7{,}1$.

2. Les élèves du premier lycée sont en moyenne plus petits (167,8 cm) que dans le second lycée (170,2 cm). L'écart type est également plus petit dans le premier lycée (7,1) que dans le second (12,3).
Le premier lycée a donc des élèves plus petits en moyenne avec des tailles plus regroupées autour de la moyenne que dans le second lycée.

Point méthode
2. Dans un exercice contextualisé, il faut donner du sens à un indicateur.
C'est souvent dans la conclusion de la question qu'il faut le faire.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 395 Voir exercices similaires nos 42 à 47

19 On considère les trois séries ci-dessous.
Série 1 : 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10
Série 2 : 1 ; 1 ; 4 ; 12 ; 12 ; 13
Série 3 : 11 ; 11 ; 13 ; 13 ; 15 ; 16
1. Calculer, sans utiliser le module statistique de la calculatrice, la moyenne et l'écart type de la série 1.
2. À l'aide du module statistique de la calculatrice, calculer la moyenne et l'écart type des séries 2 et 3.
3. Comparer la série 1 et la série 2.
4. Comparer la série 1 et la série 3.

20 Pour chaque question, déterminer les couples (moyenne ; écart type) et (médiane ; écart interquartile).
1. 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,5 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,1
2. 10 ; 12 ; 21 ; 12 ; 10 ; 10 ; 12 ; 11 ; 14 ; 12 ; 10 ; 20 ; 21 ; 21 ; 15

21 On considère la série statistique ci-dessous.

Valeurs	10	12	14	16	18	19
Effectif	2	5	11	8	4	6

1. Compléter le tableau avec la ligne des effectifs cumulés croissants. En déduire la médiane et les quartiles.
2. Une autre série a pour médiane 15 et pour écart interquartile 10. Comparer ces deux séries.

SPÉCIMEN

Cours

2 Regroupement par classes de même amplitude d'une série statistique

a Regroupement par classes

Définition Pour présenter des résultats, on peut regrouper les valeurs d'un caractère dans des intervalles appelées des classes.

Pour une classe $[a\,;b[$, on définit :

son amplitude $l = b - a$ et son centre $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Exemple

On a relevé les tailles (en cm) de 25 adolescents d'un club de sport et on les a regroupées par classes dans le tableau ci-dessous.

Taille (en cm)	[153 ; 158[	[158 ; 163[	[163 ; 168[
Centre classe	155,5	160,5	165,5
Effectif	8	10	7
Fréquence (en %)	32	40	28
Fréq cumulée croissante (en %)	32	72	100

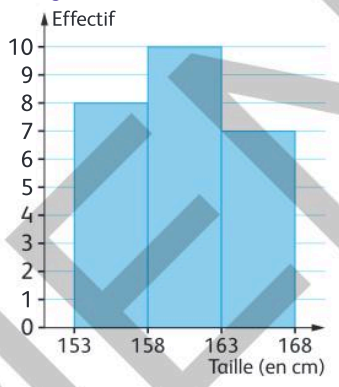
b Représentation graphique

• On représente généralement une série statistique regroupée en classes de même amplitude par un histogramme :
- sur l'axe des abscisses, on repère les classes ;
- sur l'axe des ordonnées, on repère les effectifs ou les fréquences (souvent exprimées en pourcentages).

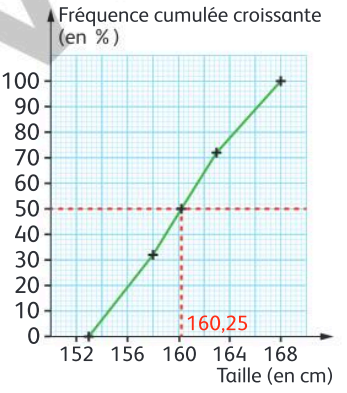
• Pour visualiser la répartition progressive des données, on peut tracer le polygone des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes comme dans l'exemple ci-contre).

Exemple

Histogramme



Polygone des fréquences cumulées croissantes



c Moyenne

Définition • La moyenne d'une série statistique regroupée en p classes de moyennes respectives $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_p}$ et d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ est : $\overline{x} = \dfrac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2} + \ldots + n_p\overline{x_p}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.

• Dans le cas particulier où la répartition est uniforme, on prend les centres des classes pour calculer la moyenne.

Moyenne des tailles en prenant les centres des classes :

$\overline{x} = \dfrac{8\times155{,}5 + 10\times160{,}5 + 7\times165{,}5}{25}$

$\overline{x} = 160{,}3$

La taille moyenne est de 160,3 cm.

c Classe médiane et estimation de la médiane

Définition La classe médiane est la classe qui contient la médiane de la série statistique.

Remarque

On peut obtenir une estimation de la médiane à partir du polygone des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes).

Classe médiane :

$\dfrac{25}{2} = 12{,}5$ or la 12,5e valeur de la série est dans la classe $[158\,;163[$. C'est la classe médiane.

Estimation de la médiane : sur le polygone des fréquences cumulées croissantes, la médiane correspond à 50 % ; elle est environ égale à 160,25 cm.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Calculer la moyenne, déterminer la classe médiane, estimer la médiane pour une série regroupée par classes

Énoncé On a relevé les prix (en euros) des montres connectées vendues par un grand magasin et on a regroupé les résultats en classes de même amplitude. Les effectifs sont fournis dans le tableau suivant :

Prix	[50 ; 150[	[150 ; 250[	[250 ; 350[	[350 ; 450[	[450 ; 550[	[550 ; 650[
Effectif	9	41	29	40	13	8

1. Reproduire et compléter le tableau par les lignes *Effectifs Cumulés Croissants (ECC)*, *Fréquences (en %)* et *Fréquences Cumulées Croissantes (FCC)*. Les fréquences seront arrondies au dixième.
2. En supposant la répartition de cette série uniforme, déterminer, à l'euro près, le prix moyen d'une montre connectée dans ce magasin.
3. Déterminer la classe médiane de cette série statistique.
4. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
5. Déterminer graphiquement la médiane de cette série statistique. Interpréter le résultat.

Solution rédigée

1.

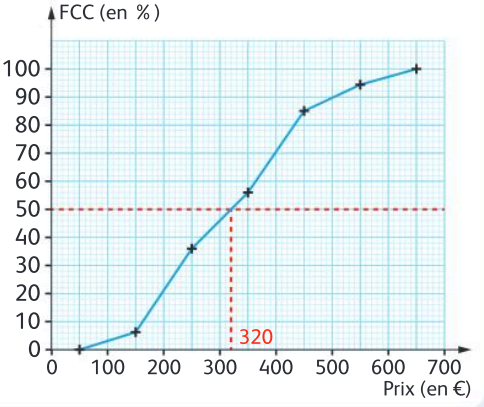
Prix	[50 ; 150[	[150 ; 250[	[250 ; 350[	[350 ; 450[	[450 ; 550[	[550 ; 650[
Effectifs	9	41	29	40	13	8
ECC	9	50	79	119	132	**140**
Fréq (en %)	6,4	29,3	20,7	28,6	9,3	5,7
FCC (en %)	6,4	35,7	56,4	85	94,3	100

Point méthode
1. L'ECC de 79 s'obtient en ajoutant les effectifs 9, 41 et 29.
L'effectif total est de **140**.
Fréquence de la 1re classe :
$\frac{9}{140} \times 100 \approx 6{,}4$

2. La répartition étant supposée uniforme, on utilise les centres de classes.
$\overline{x} = \frac{9\times100 + 41\times200 + 29\times300 + 40\times400 + 13\times500 + 8\times600}{140}$
$\overline{x} \approx 322$. Le prix moyen d'une montre connectée est d'environ 322 €.

Point méthode
2. Le centre de la classe $[a\,;b[$ est $\frac{a+b}{2}$.

3. $\frac{140}{2} = 70$ D'après les effectifs cumulés croissants, la 70e valeur de cette série se trouve dans la classe [250 ; 350[. C'est donc la classe médiane de cette série.
On peut également utiliser les fréquences cumulées croissantes. C'est dans la classe [250 ; 350[qu'on dépasse 50 % de l'effectif.
4. Pour tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes, on place les points de coordonnées :
(50 ; 0), (150 ; 6,4), (250 ; 35,7), …, (650 ; 100).
5. La médiane est environ 320 (c'est l'abscisse du point d'ordonnée 50). Cela signifie qu'au moins 50 % des montres ont un prix inférieur ou égal à 320 € et qu'au moins 50 % des montres ont un prix supérieur ou égal à 320 €.



J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 49 et 52

22 On a regroupé dans le tableau ci-contre le nombre de messages, noté N, envoyés par des élèves de seconde sur un réseau social en une journée.

N	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[	[90 ; 120[	[120 ; 150[
Effectifs	3	6	9	7	5

1. Recopier et compléter le tableau par les lignes *Effectifs Cumulés Croissants (ECC)*, *Fréquences (en %)* et *Fréquences Cumulées Croissantes (FCC)*. Les fréquences seront arrondies au dixième.
2. Déterminer la classe médiane de cette série.
3. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Déterminer graphiquement la médiane de cette série statistique. Interpréter le résultat.

SPÉCIMEN

Cours

3 Proportions

Définition On considère un ensemble T (appelé également population) contenant une partie A (ou sous-population).

On note n_T et n_A respectivement le nombre d'individus dans l'ensemble T et dans l'ensemble A.

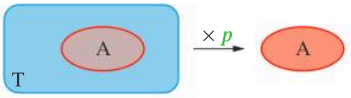
La proportion (ou fréquence) de A dans T est le nombre $p = \frac{n_A}{n_T}$.

Remarque

On peut l'écrire sous forme décimale, fractionnaire ou en pourcentage.

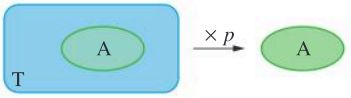
a Calculer avec des proportions

- n_A et n_T sont connus et on cherche p :



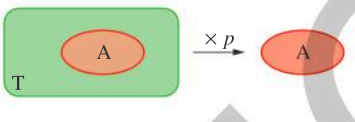
$$p = \frac{n_A}{n_T}$$

- n_T et p sont connus et on cherche n_A :



$$n_A = n_T \times p$$

- n_A et p sont connus et on cherche n_T :



$$n_T = \frac{n_A}{p}$$

Remarque

Pour les calculs, si la proportion est en pourcentage, il est souvent plus pratique de l'écrire sous forme décimale.

Exemple

Dans une classe, il y a 12 filles sur les 30 élèves.

$$\frac{12}{30} = 0{,}4$$

La proportion de filles dans la classe est 0,4 ou $\frac{2}{5}$ ou 40 %.

Dans une classe de 24 élèves, 75 % sont des filles.

$$24 \times 0{,}75 = 18$$

Il y a 18 filles dans cette classe.

Dans une classe, il y a 21 filles qui représentent 60 % des élèves de la classe.

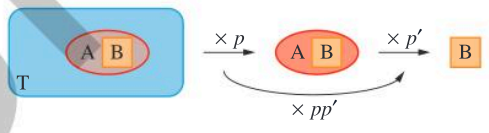
$$\frac{21}{0{,}6} = 35$$

Il y a 35 élèves dans la classe.

b Proportion de proportion

Propriété On considère un ensemble T contenant une partie A contenant elle-même une partie B.

Si p est la proportion de A dans T et p' est la proportion de B dans A alors la proportion de B dans T est $p \times p'$.



Remarque

Lorsqu'on considère une situation dans laquelle des sous-populations peuvent être « imbriquées », il peut être intéressant de construire un tableau d'effectifs à double entrée pour décomposer la population en sous-populations disjointes, comme dans l'exemple ci-contre.

Exemple

Dans une classe, les élèves étudient l'Espagnol ou l'Allemand en LVB. 60 % des élèves sont des filles et 80 % d'entre elles étudient l'Espagnol.

$$0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$$

La proportion de filles étudiant l'Espagnol en LVB est égale à 48 %.

On sait de plus qu'il y a 25 élèves dans cette classe.

$$25 \times 0{,}6 = 15$$

$$0{,}8 \times 15 = 12$$

Il y a 15 filles dans cette classe dont 12 qui étudient l'Espagnol en LVB. On sait que 3 garçons étudient l'Allemand en LVB.

On peut construire le tableau croisé ci-dessous :

	Filles	Garçons	Total
Espagnol	12	7	19
Allemand	3	3	6
Total	15	10	25

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Mettre en relation effectifs, proportions et pourcentages

Énoncé Mathieu souhaite faire des cookies, il se procure donc les ingrédients indiqués sur sa recette :
200 g de farine, 170 g de chocolat noir à 72 % de cacao, 150 g de sucre, 170 g de beurre, un sachet de levure, un sachet de sucre vanillé, un œuf et un peu de poudre de noisette.



1. Après avoir réalisé sa recette, Mathieu a pesé la pâte à cookies, mais il ne se souvient plus de son poids. Il se souvient que le sachet de sucre vanillé pesait 7,5 g et représentait 1 % du poids total de la pâte. Retrouver le poids de la pâte à cookies préparée par Mathieu.
2. Quelle est la proportion de sucre dans la pâte à cookies finale ?
3. Déterminer la masse de cacao présente dans les cookies.

Solution rédigée

1. On sait que 7,5 g représente 1 % du poids total de la pâte à cookies. On peut remplir un tableau de proportionnalité :

7,5	x
1 %	100 %

En appliquant le produit en croix, on trouve que le poids total de la pâte est donné par : $x = \frac{7{,}5 \times 100}{1} = 750$.
Mathieu a donc préparé une pâte à cookies de 750 g.
2. Le poids total de la pâte à cookies est de 750 g et Mathieu y a mis 150 g de sucre. La proportion de sucre dans cette pâte à cookies est donc de $\frac{150}{750} = 0{,}2$. On en déduit alors que le sucre représente 20 % de la pâte à cookies.
3. Mathieu a utilisé 170 g de chocolat noir à 72 % de cacao. Le cacao représente donc $170 \times \frac{72}{100} = 122{,}4$ g. Il y a 122,4 g de cacao dans les cookies.

Point méthode
1. Il peut être utile dans certains cas de faire un schéma de la situation, ou un tableau de proportionnalité afin d'éviter toutes mauvaises interprétations.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 53 à 63

23 Dans une classe de 32 élèves, 24 ont eu plus de 10 au dernier devoir de mathématiques. Quelle proportion ces élèves représentent-ils dans la classe ?

24 Un concessionnaire a vendu 200 véhicules le mois dernier. Parmi ces véhicules, 95 sont blancs. Déterminer le pourcentage de véhicules blancs vendus le mois dernier.

25 Lors des *french days*, Mélissa achète un appareil photo. Elle a eu une réduction de 8 %, ce qui représente 110 €. Quel était le prix de l'appareil avant réduction ? après réduction ?



26 Un complexe sportif regroupe plusieurs clubs et 1 000 adhérents. On note le nombre d'adhérents de certains clubs dans le tableau suivant.

Club	Homme	Femme
Boxe	83	54
Volley-ball		120
Vélo	19	13

1. Déterminer la proportion, en pourcentage, d'adhérents au club de boxe dans le complexe sportif.
2. Dans le club de volley, les hommes représentent 80 % de l'effectif des femmes. Combien y a-t-il d'hommes dans ce club ?
3. Les membres du club de vélo représentent 40 % de l'effectif du club d'escalade. Combien y a-t-il de membres dans le club d'escalade ?

SPÉCIMEN

Cours

4 Évolutions

Une valeur de départ (V_d) évolue vers une valeur d'arrivée (V_a).



a Variation absolue, variation relative

Définition Pour quantifier cette évolution, on peut calculer :

- la **variation absolue**, soit l'évolution en **nombre** $V_a - V_d$.
- la **variation relative**, soit l'évolution en **proportion** $\dfrac{V_a - V_d}{V_d}$.

La variation relative est aussi appelée **taux d'évolution** entre V_d et V_a.

Remarque

Le signe de la variation indique le sens de l'évolution.

Exemple

Un prix valait 8 € et vaut maintenant 9 €.

- Variation absolue :

$9 - 8 = 1$

Le prix a augmenté de 1 €.

- Variation relative :

$\dfrac{9-8}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$

Le prix a augmenté de 12,5 %.

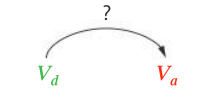
b Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Propriété

Augmenter de t % revient à multiplier par $CM = 1 + \dfrac{t}{100}$.

Diminuer de t % revient à multiplier par $CM = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Remarque



$CM = \dfrac{V_a}{V_d}$ et $t = CM - 1$



$V_a = V_d \times CM$

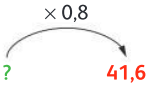


$V_d = \dfrac{V_a}{CM}$

Exemple

Après avoir subi une baisse de 20 %, un article coûte 41,6 €.
Quel était son prix avant la baisse ?
Baisser de 20 % revient à multiplier par :

$\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 0{,}8$

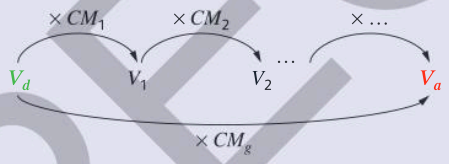


$V_d = \dfrac{41{,}6}{0{,}8} = 52$

L'article valait 52 € avant la baisse.

c Évolutions successives

Propriété Une valeur de départ V_d subit plusieurs évolutions successives : t_1 % de coefficient multiplicateur CM_1, suivie de t_2 % suivie de …



Le coefficient **multiplicateur global** est le produit des coefficients multiplicateurs intermédiaires. On a $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \ldots$

Le **taux d'évolution global** est donc égal à : $t_g = CM_g - 1$.

Exemple

Le nombre d'abonnés d'un quotidien augmente de 10 % puis augmente de 20 %.
Quelle est l'évolution globale ?
Augmenter de 10 % (resp. 20 %) revient à multiplier par 1,1 (resp. 1,2) :

$CM_g = 1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32$

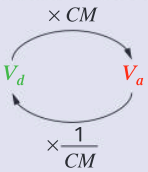
Le taux d'évolution global est :

$CM_g - 1 = 1{,}32 - 1 = 0{,}32$

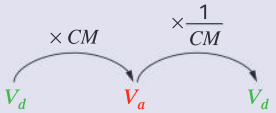
Donc le nombre d'abonnés a augmenté de 32 %.

d Évolution réciproque

Propriété Une valeur de départ V_d évolue de t %, on note CM le coefficient multiplicateur correspondant. Le **taux réciproque** est le taux d'évolution appliqué à la valeur d'arrivée V_a pour revenir à V_d.



ou



Son coefficient multiplicateur CM_{rec} est égal à $\dfrac{1}{CM}$.

Exemple

Un prix augmente de 10 %.
Quelle évolution permettrait de retrouver le prix initial ? Le coefficient multiplicateur réciproque est :

$CM_{rec} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{10}{100}} \approx 0{,}909$

Le taux d'évolution réciproque est :

$CM_{rec} - 1 \approx 0{,}909 - 1 \approx -0{,}091$

Il faut baisser le nouveau prix d'environ 9,1 %.

SPECIMEN

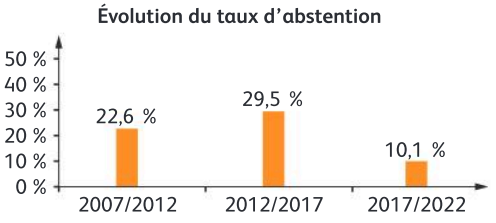
méthode

CAPACITÉ 4 Manipuler des valeurs successives et leur taux d'évolution

Énoncé Au second tour des élections présidentielles de 2022 en France, 13 655 861 personnes sur les 48 752 339 inscrites sur les listes électorales se sont abstenues de voter.

1. Déterminer le taux d'abstention au second tour des élections présidentielles de 2022.

2. On donne ci-dessous l'évolution du taux d'abstention au second tour des élections présidentielles en France entre 2007 et 2022.





a. Le taux d'abstention était de 16,03 % en 2007. Déterminer le taux d'abstention en 2012.

b. À l'aide du taux d'abstention en 2022 trouvé en question **1.**, déterminer le taux d'abstention en 2017.

c. Retrouver l'évolution du taux d'abstention entre 2012 et 2017.

Solution rédigée

1. $\frac{13\,655\,861}{48\,752\,339} \approx 0{,}2801$. Le taux d'abstention au second tour des élections présidentielles de 2022 s'est donc élevé à environ 28,01 %.

2. a. Le taux d'abstention a augmenté de 22,6 % entre 2007 et 2012. Or, augmenter de 22,6 % revient à multiplier par $1+\frac{22{,}6}{100}=1{,}226$.

Ainsi : $16{,}03\times 1{,}226 \approx 19{,}65$. Le taux d'abstention au second tour des présidentielles de 2012 s'est donc élevé à environ 19,65 %.

b. Entre 2017 et 2022, le taux d'abstention a augmenté de 10,1 % pour aboutir à 28,01 %. Augmenter de 10,1 % revient à multiplier par $1+\frac{10{,}1}{100}=1{,}101$.

Ainsi $T_{2017}\times 1{,}101 = 28{,}01$ c'est-à-dire : $T_{2017}=\frac{28{,}01}{1{,}101}\approx 25{,}44$. Le taux d'abstention au second tour de l'élection présidentielle de 2017 s'est donc élevé à environ 25,44 %.

c. On a obtenu des taux d'abstention de 19,65 % pour 2012 et de 25,44 % pour 2017. Le taux d'évolution entre 2012 et 2017 est donc égal à : $\frac{25{,}44-19{,}65}{19{,}65}\approx 0{,}2946$ soit en arrondissant environ 29,5 % comme indiqué dans les données ci-dessus.

Point méthode

2. a. Pour identifier le calcul à effectuer un schéma peut être utile !



Point méthode

2. b. Seuls les coefficients multiplicateurs apparaissent sur la flèche d'évolution.



J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 64 à 66, 74 et 75

27 **1.** En 2021, un lycée compte 1 024 élèves. En 2022, il en compte 1 146. Quel est le taux d'évolution ?

2. Léa bénéficie d'une remise de 30 % sur un pantalon à 39 €. Combien va-t-elle payer ?

3. Dans une petite ville, le nombre d'infractions relevées au code de la route a augmenté de 12 % entre 2023 et 2024. On a relevé 84 infractions en 2024. Calculer le nombre d'infractions en 2023. Quelle évolution entre 2024 et 2025 permet de revenir au niveau d'infractions de 2023 ?

28 Le tableau incomplet ci-dessous résume les Chiffres d'Affaires annuels (C.A.) en millier d'euros d'une micro-entreprise entre 2020 et 2023.

	2020	2021	2022	2023
C.A.	104	95		104
Évolution en %			+6	

1. Expliquer pourquoi une case du tableau est grisée.

2. Compléter les cases vides du tableau.

SPÉCIMEN

Cours

5 Croisement de deux variables qualitatives

a Tableau croisé d'effectifs

Définition • Un tableau croisé d'effectifs (ou tableau à double entrée) est un tableau donnant les effectifs portant sur deux caractères d'une même population.

Les valeurs de l'un des caractères sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne.

• L'effectif marginal pour une valeur d'un caractère est le nombre total d'individus présentant cette valeur du caractère.

Remarque

Les sommes des colonnes et des lignes (nommées « **Total** ») sont aussi appelées les « marges » du tableau.

C2 \ C1	B	B′	**Total**
A	n_1	n_2	s_1
A′	n_3	n_4	s_2
Total	s'_1	s'_2	N

n_1 désigne l'effectif d'individus vérifiant à la fois les caractères A et B.
$s_1 = n_1 + n_2$ est l'effectif marginal de A et $s'_1 = n_1 + n_3$ celui de B.
N désigne l'effectif total.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'un lycée suivant leur classe et leur sexe.

	2de	1re	Tle	**Total**
Filles	158	197	191	546
Garçons	187	181	169	537
Total	345	378	360	1 083

Il y a 1 083 élèves au total dans le lycée. Parmi eux, on compte 187 garçons en classe de Seconde et 191 filles en classe de Terminale. 546 est l'effectif marginal des filles du lycée.

b Fréquence marginale

Définition La fréquence marginale d'une valeur A d'un caractère est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur A par l'effectif total de la population.

On a : $f(\text{A}) = \dfrac{\text{effectif marginal de A}}{\text{effectif total}}$

Remarques

• En reprenant le tableau précédent, la fréquence marginale de A est $f(\text{A}) = \dfrac{s_1}{N}$, celle de B est $f(\text{B}) = \dfrac{s'_1}{N}$.

• $f(\text{A}) + f(\text{A}') = 1$ et $f(\text{B}) + f(\text{B}') = 1$.

Exemple

Le tableau suivant donne la répartition des adhérents d'un club sportif selon leur tranche d'âge et leur sexe (F ou H).

	F	H	**Total**
5-20	8	16	24
20-40	13	11	24
40-60	7	8	15
60 et +	2	5	7
Total	30	40	70

La fréquence marginale des femmes est : $f = \dfrac{30}{70} \approx 0{,}43$.

La fréquence marginale des adhérents âgés de 5 à 20 ans est de : $f = \dfrac{24}{70} \approx 0{,}34$.

c Fréquence conditionnelle

Définition Soit A une valeur d'un des deux caractères et B une valeur de l'autre caractère. La fréquence conditionnelle de la valeur A parmi la valeur B, notée $f_{\text{B}}(\text{A})$, est le quotient du nombre d'individus présentant à la fois les valeurs A et B par l'effectif marginal de la valeur B.

On a : $f_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{\text{effectif vérifiant à la fois A et B}}{\text{effectif marginal de B}}$

Remarque

En reprenant le tableau précédent, la fréquence conditionnelle de la valeur A parmi la valeur B est $f_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{n_1}{s'_1}$.
On a $f_{\text{B}}(\text{A}) + f_{\text{B}}(\text{A}') = 1$.

Exemple (suite)

La fréquence conditionnelle des hommes parmi les plus de 60 ans est :

$$f = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$$

La fréquence conditionnelle des adhérents dont l'âge est entre 40 et 60 ans parmi les hommes est :

$$f = \frac{8}{40} = 0{,}2$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 5 Compléter un tableau croisé d'effectifs, calculer des fréquences marginales et conditionnelles

Énoncé Un restaurant propose deux formules : « sur place » ou « à emporter ». Le tableau suivant donne les résultats d'une enquête de satisfaction réalisée par le restaurateur sur l'ensemble des 80 clients d'une journée.

	Très satisfaits	Satisfaits	Pas satisfaits	Total
Sur place	10		8	30
A emporter	14	21		
Total			23	

1. Reproduire et compléter le tableau.
2. Calculer la fréquence marginale des clients ayant pris un repas à emporter. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place.
4. À la suite de cette enquête, le restaurateur affirme que les clients prenant un repas à emporter sont plus souvent très satisfaits que ceux qui prennent un repas sur place. A-t-il raison ? Justifier.

Solution rédigée

1.

	Très satisfaits	Satisfaits	Pas satisfaits	Total
Sur place	10	**12**	8	30
A emporter	14	21	**15**	**50**
Total	**24**	**33**	23	**80**

2. 50 clients ont pris un repas à emporter sur un total de 80 clients. La fréquence marginale recherchée est $f_1 = \frac{50}{80} = 0{,}625$.
Parmi les clients du restaurant, 62,5 % ont pris un repas à emporter.
3. 30 clients ont pris un repas sur place et parmi eux 10 sont très satisfaits. La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux ayant pris un repas sur place est : $f_2 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, soit $f_2 \approx 0{,}33$.
4. Parmi les clients ayant pris un repas sur place, environ 33,3 % d'entre eux sont très satisfaits.
La fréquence conditionnelle des clients très satisfaits parmi ceux qui ont pris un repas à emporter est $f_3 = \frac{14}{50} = 0{,}28$, soit 28 %.
Or $f_2 > f_3$, donc le restaurateur se trompe, ce sont les clients qui mangent sur place qui sont plus souvent très satisfaits de leur repas.

Point méthode
3. Il suffit de faire le quotient de l'effectif vérifiant les deux conditions par l'effectif marginal des personnes ayant pris un repas sur place.

Point méthode
4. Il faut comparer deux fréquences conditionnelles : celle de la question **3.** et la fréquence conditionnelle de clients ayant répondu être très satisfaits parmi ceux qui ont pris un repas sur place.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 77 à 80

29 On interroge 200 personnes pour savoir si elles préfèrent lire ou regarder un film. Voici le tableau des effectifs que l'on obtient :

	Lire	Regarder un film	**Total**
Femmes	62		
Hommes			85
Total		105	

1. Reproduire et compléter le tableau.
2. Calculer la fréquence marginale des personnes préférant lire.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des hommes parmi les personnes préférant regarder un film.
4. Au moins 55 % des femmes préfèrent lire. Est-ce vrai ?



SPÉCIMEN

Méthode

CAPACITÉ 6 Manipuler les pourcentages de pourcentages

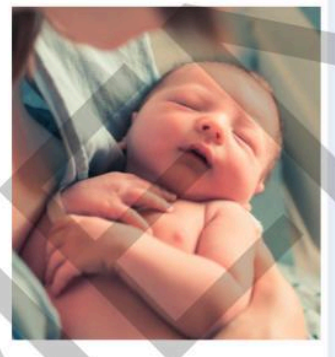
Énoncé En 2024 dans une maternité, 60 % des naissances étaient des garçons.

Parmi eux, 20 % pesaient plus de 4 kg, la moitié pesait entre 2,5 et 4 kg et $\frac{1}{10}$ moins de 1,5 kg.

Sur un total de 800 filles nées en 2024, 200 pesaient entre 2,5 et 4 kg, 40 % entre 1,5 et 2,5 kg.

De plus, 16 % des enfants nés en 2024 pesaient moins de 1,5 kg.

Compléter le tableau ci-dessous où les proportions seront exprimées en pourcentage par rapport à l'ensemble des naissances dans cette maternité en 2024.



Masse M (kg)	Garçons	Filles	Total
$M < 1{,}5$			
$1{,}5 \leqslant M < 2{,}5$			
$2{,}5 \leqslant M < 4$			
$4 \leqslant M$			
Total			100 %

Solution rédigée

Les proportions se calculent par rapport à l'ensemble des naissances.

Parmi les 60 % de garçons nés en 2024, 20 % pèsent plus de 4 kg. $0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$ on en déduit que 12 % de l'ensemble des naissances sont des garçons de plus de 4 kg.

La moitié des 60 % de garçons correspond à 30 %. Donc 30 % de l'ensemble des naissances sont des garçons pesant entre 2,5 et 4 kg.

$\frac{1}{10}$ de 60 % correspond à $\frac{1}{10} \times 0{,}6 = 0{,}06$; on obtient donc 6 % de garçons de moins de 1,5 kg parmi les naissances dans cette maternité en 2024.

Les 800 filles représentent 40 % des naissances.

$\frac{200}{800} = 0{,}25$ on en déduit que 25 % des filles pèsent entre 2,5 et 4 kg.

$0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$ on obtient 10 % de filles pesant entre 2,5 et 4 kg.

40 % des filles qui représentent 40 % des naissances pèsent entre 1,5 et 2,5 kg. $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$; ainsi 16 % des naissances sont des filles pesant de 1,5 à 2,5 kg. On a donc le tableau ci-dessous.

Masse M (kg)	Garçons	Filles	Total
$M < 1{,}5$	6 %	10 %	16 %
$1{,}5 \leqslant M < 2{,}5$	12 %	16 %	28 %
$2{,}5 \leqslant M < 4$	30 %	10 %	40 %
$4 \leqslant M$	12 %	4 %	16 %
Total	60 %	40 %	100 %

Point méthode

Pour calculer des pourcentages de pourcentages, on multiplie les proportions.

Point méthode

Il faut bien identifier l'ensemble de référence auquel s'appliquent les pourcentages. Ici, c'est l'ensemble des naissances de la maternité en 2024.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 82 à 86

30 Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 garçons. Parmi eux, 25 % font partie du CVL (conseil des délégués pour la vie lycéenne).

1. Quelle est la proportion de garçons dans la classe ?
2. Calculer, de deux manières différentes, la proportion de garçons participant au CVL dans cette classe.

31 Dans une réserve naturelle, 30 % des animaux sont des mammifères, dont 15 % ont moins de 1 an.

1. Quelle proportion de la réserve naturelle sont des mammifères de moins de 1 an ?
2. On compte 81 mammifères de moins de 1 an. Combien y a-t-il d'animaux dans la réserve naturelle ?

SPECIMEN

CAPACITÉ 7 Calculer un taux d'évolution global et réciproque

Énoncé Entre 2020 et 2021, les émissions de gaz à effet de serre ont augmenté de 5,7 % en France. Entre 2021 et 2022, elles ont diminué de 2,7 % (source : Insee).

1. a. Déterminer le taux d'évolution global entre 2020 et 2022.

b. Sachant que les émissions de gaz à effet de serre en France en 2020 sont estimées à 392,3 millions de tonnes équivalent CO_2, déduire de la question **1. a.** une approximation des émissions de gaz à effet de serre en France en 2022.

2. Quelle devrait être l'évolution entre 2022 et 2023 pour que les émissions de gaz à effet de serre en France soient égales à celles de 2020 ?



Solution rédigée

1. a. Augmenter de 5,7 % revient à multiplier par $1+\frac{5,7}{100}=1,057$.

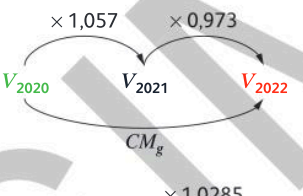
Diminuer de 2,7 % revient à multiplier par $1-\frac{2,7}{100}=0,973$.

On obtient pour coefficient multiplicateur global :

$$CM_g = 1,057\times 0,973 \approx 1,0285$$

Or, $1,0285-1=0,0285$.

Le taux d'évolution global entre 2020 et 2022 est d'environ +2,85 %.



b. D'après la question **1. a.** le coefficient multiplicateur représentant l'évolution entre 2020 et 2022 est 1,0285.

On a donc $V_{2022} = 392,3\times 1,0285 \approx 403,5$.

En 2022, les émissions de gaz à effet de serre en France sont estimées à 403,5 millions de tonnes équivalent CO_2.



2. L'évolution entre 2022 et 2023 doit ici correspondre à l'évolution réciproque de celle observée entre 2020 et 2022.

Son coefficient multiplicateur est donc $CM_{rec}=\frac{1}{1,0285}\approx 0,9723$.

On en déduit que le taux réciproque est $CM_{rec}-1\approx -0,0277$.

L'évolution entre 2022 et 2023 devrait être une diminution de 2,77 %.

Point méthode

1. Pour déterminer un taux d'évolution global, on détermine en premier lieu le coefficient multiplicateur global.

Point méthode

2. Pour calculer un taux d'évolution à partir d'un coefficient multiplicateur CM, on calcule la différence $CM-1$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 396 Voir exercices similaires nos 88 à 92 et 96 à 98

32 Dans chaque cas, déterminer le coefficient multiplicateur global puis le taux d'évolution global.

1. Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 30 %.

2. Deux hausses de 20 %.

33 Une quantité subit deux hausses, la première étant de 15 %. L'évolution globale est une hausse de 41 %. Déterminer le pourcentage de la seconde hausse.

34 **1.** Déterminer le taux réciproque d'une hausse de 5 %.

2. Déterminer le taux réciproque d'une baisse de 50 %.

3. Déterminer le taux réciproque d'une hausse de 100 % suivie d'une baisse de 50 %.

35 La population d'une ville a augmenté de 5 % entre 2019 et 2021, puis a diminué de 10 % entre 2021 et 2022.

1. Quel a été le taux d'évolution global de la population entre 2019 et 2022 ?

2. Quelle doit être l'évolution entre 2022 et 2023 pour que le nombre d'habitants de la ville soit le même qu'en 2019 ?



SPÉCIMEN

Je fais le point

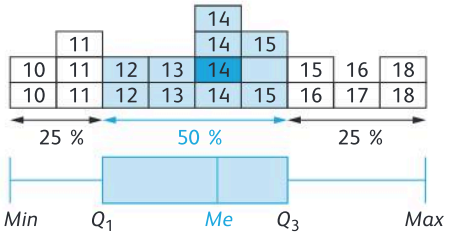
Je revois mon cours

Couples d'indicateurs

On donne la série suivante.

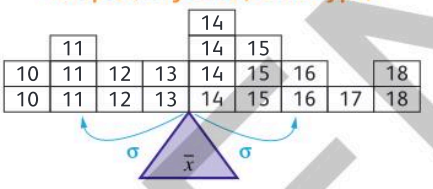
Valeur	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectif	2	3	2	2	4	3	2	1	2

Couple (médiane ; écart interquartile)



Choisir ce couple, c'est partager la série en sous-groupes de 25 %. Plus l'écart interquartile est faible, plus les valeurs de la série sont « resserrées » autour de la médiane.

Couple (moyenne ; écart type)



$$\bar{x} = \frac{2\times10+3\times11+\ldots+2\times18}{2+3+\ldots+2}$$

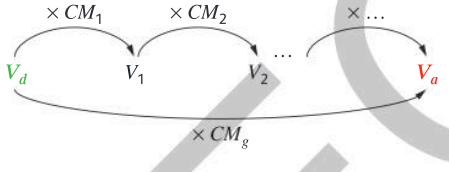
$$V = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Choisir ce couple, c'est prendre en compte toutes les valeurs. Plus l'écart type est petit, plus les valeurs de la série sont « resserrées » autour de la moyenne.

Évolutions

Évolutions successives



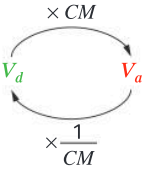
Coefficient multiplicateur global :

$$CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \ldots$$

Taux global d'évolution :

$$t_g = CM_g - 1$$

Évolution réciproque



Coefficient multiplicateur réciproque :

$$CM_{rec} = \frac{1}{CM}$$

Taux d'évolution réciproque :

$$t_{rec} = CM_{rec} - 1$$

Croisement de deux variables qualitatives

C1 / C2	B	B′	Total
A	n_1	n_2	s_1
A′	n_3	n_4	s_2
Total	s'_1	s'_2	N

Fréquence marginale de A :

$$f(A) = \frac{\text{effectif marginal de } A}{\text{effectif total}} = \frac{s_1}{N}$$

Fréquence conditionnelle de A parmi B :

$$f_B(A) = \frac{\text{effectif vérifiant à la fois } A \text{ et } B}{\text{effectif marginal de } B} = \frac{n_1}{s'_1}.$$



Je m'exerce à démontrer

Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs d'une série, alors la moyenne de la série obtenue est égale à la moyenne de la série initiale augmentée de b.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2091

SPÉCIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2092

QCM

Voir corrigés p. 397

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On donne ci-dessous le nombre de candidats présents aux épreuves du baccalauréat de la session de Juin entre 2021 et 2023.

	2021	2022	2023
Baccalauréat Général	380 346	377 248	387 067
Baccalauréat Technologique	144 599	144 989	148 466
Baccalauréat Professionnel	207 898	207 189	203 968
Total	732 843	729 426	739 501

Source : education.gouv.fr

	a	b	c
1. En 2021, la proportion de candidats en baccalauréat professionnel est d'environ :	33,6 %	28,4 %	71,6 %
2. Durant la session de juin 2023, 370 395 candidats ont été reçus à l'examen du baccalauréat général. Le pourcentage d'admis en série générale est d'environ :	95,7 %	50,1 %	98,1 %
3. Entre 2021 et 2023 le nombre de candidats au baccalauréat technologique a augmenté de :	2,67 %	2,40 %	2,60 %
4. Il pourrait y avoir une augmentation de 3,8 % du nombre de candidats au baccalauréat technologique entre 2023 et 2024. Le nombre de candidats au baccalauréat technologique en 2024 serait d'environ :	204 900	154 100	142 800
5. Entre 2000 et 2021, le nombre de candidats au baccalauréat toutes séries confondues a augmenté d'environ 13,8 %. Le nombre de candidats au baccalauréat en 2000 était d'environ :	649 800	631 700	644 000
6. Entre 2000 et 2023, le nombre de candidats au baccalauréat général a augmenté de 12,2 %. Pour retrouver en 2024 le même nombre de candidats au baccalauréat général qu'en 2000, l'évolution de leur nombre doit être d'environ :	–12,2 %	–87,8 %	–10,9 %

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

1. La médiane est toujours une valeur de la série.

2. L'écart interquartile est un indicateur qui mesure la dispersion des valeurs d'une série autour de la moyenne.

3. L'écart type peut être nul.

4. La moyenne est toujours supérieure à la médiane.

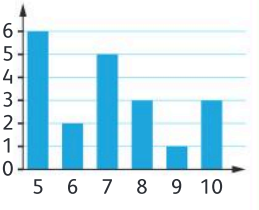
5. Si on ajoute un même nombre à toutes les valeurs d'une série, la médiane ne change pas.

6. La variance est toujours supérieure à l'écart type.

7. La variance peut être une valeur négative.

Partie B.

Un échantillon est représenté par ce diagramme.



1. La médiane de cette série est 7,5.

2. L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ vaut 3.

3. $\overline{x} = \dfrac{5\times6+6\times2+7\times5+8\times3+9+10\times3}{6}$

4. On admet que cet échantillon a pour moyenne 7. Son écart type est égal à 0.

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2093

Acquérir des automatismes

36 Soit la série statistique ordonnée suivante :
2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 8 ; 9 ; 12
1. Calculer la moyenne et la médiane de cette série.
2. Calculer le premier et le troisième quartiles, puis en déduire l'écart interquartile de cette série.

37 Déterminer le coefficient multiplicateur associé à :
1. une hausse de 7 % **2.** une baisse de 1,5 %
3. une baisse de 92 % **4.** une hausse de 115 %

38 Déterminer le taux d'évolution associé aux coefficients multiplicateurs suivants.
1. 0,04 **2.** 1,31 **3.** 1,02

39 Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeur de départ	Valeur d'arrivée	CM	Taux d'évolution (en %)
20		0,92	
15,5			+10 %
55	38,5		
74,6		1,55	
	34		−15 %

40 Vrai ou faux ?
Dans chaque cas indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses.
1. Calculer t % d'une quantité revient à la multiplier par $\frac{t}{100}$.
2. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse est négatif.
3. Un taux d'évolution peut être plus petit que −1.
4. Lorsqu'un prix augmente de 50 %, il faut appliquer une réduction de 50 % pour revenir au prix d'origine.

41 Vrai ou faux ?
Dans chaque cas indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Diminuer de 30 % une quantité revient à la multiplier par −0,3.
2. Augmenter deux fois successivement de 10 % une quantité revient à la multiplier par 1,2.
3. Le taux réciproque d'une hausse de 25 % est une baisse de 20 %.
4. Après une hausse de 10 % puis une hausse de 20 %, le taux d'évolution global est de 30 %.

Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Comparer deux séries statistiques

Voir p. 281

42 On relève les notes suivantes de deux groupes d'une même classe :
G_1 : 8 ; 11 ; 12 ; 13 ; 16
G_2 : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14
1. Calculer la moyenne des notes obtenues par le groupe 1, puis par le groupe 2. Peut-on ainsi différencier les deux groupes ?
2. a. Calculer l'écart type des notes obtenues dans le groupe 1, puis le groupe 2.
b. Comparer alors les résultats des deux groupes.

43 Dans un questionnaire, on demande aux personnes interrogées une valeur numérique sur leur degré de satisfaction, qui est un nombre entier entre 0 (pas du tout satisfait) et 10 (totalement satisfait). On note σ l'écart type de la série des réponses obtenues. Pour chaque valeur de σ associer une situation.
① $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ ② $\sigma \geqslant 6$ ③ $\sigma = 0$
1. Les personnes sondées sont unanimement d'accord.
2. Les personnes sondées sont partagées.
3. Les personnes sondées sont globalement d'accord.

Dans les exercices **44** *à* **46**, *calculer la moyenne et l'écart type de chaque série, puis déterminer la « meilleure » série.*
On considère ici que la meilleure série est celle qui a la moyenne la plus grande. Si deux séries ont la même moyenne, la meilleure série des deux est la moins dispersée autour de la moyenne.

44 A : 5-7-4-8-4
B : 6-7-6-5-5

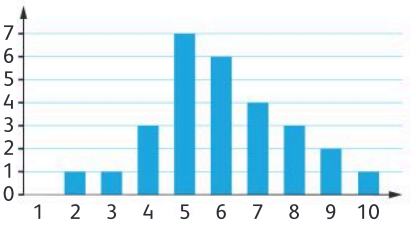


CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2094

45 A : 1-10-8-2-5 B : 4-5-7-5-5

46 A : 4-5-8-6-7 B : 9-5-4-6-6

47 Le graphique ci-dessous donne la répartition des notes d'un devoir sur 10 de la classe de 2de A.



SPECIMEN

1. Calculer la moyenne, la médiane, le premier quartile ainsi que le troisième quartile de cette classe.
2. La classe de 2de B effectue le même devoir et obtient ces résultats : $\overline{x} = 6$; $M_e = 6$; $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 8$. Laquelle des deux classes semble avoir le niveau le plus homogène ? Justifier.

48 On compare les résultats de trois classes de Seconde à une évaluation. On résume les résultats obtenus à l'aide du tableau ci-dessous.

	Min	Q_1	M_e	Q_3	Max
2de A	3	8	11	13	15
2de B	5	7	10	11	20
2de C	4	6	9	12	16

Indiquer pour quelle(s) classe(s) chacune des affirmations suivantes est vraie.
1. La moitié des notes ne dépasse pas 11.
2. Un élève sur quatre a moins de 6.
3. 75 % des élèves ont au moins 8.
4. Le meilleur élève a une note au moins deux fois supérieure à la moitié des élèves de la classe.

Capacité 2 Calculer la moyenne, déterminer la classe médiane, estimer la médiane pour une série regroupée par classes

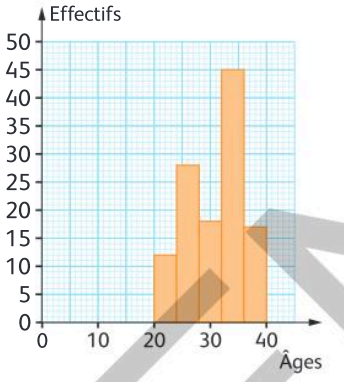
Voir p. 283

49 Vrai ou faux ?
Le tableau ci-dessous donne les résultats, en minutes, des 80 participants à une course à pied.

Temps (en min)	Effectifs
[30 ; 35[	4
[35 ; 40[	25
[40 ; 45[	17
[45 ; 50[	18
[50 ; 55[	11
[55 ; 60[	3
[60 ; 65[	2

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant.
1. Le centre de la classe [35 ; 40[est 37,5.
2. L'amplitude de la classe [35 ; 40[est 4.
3. Une valeur approchée du temps moyen de cette série est 44 min.
4. Environ 36 % des participants ont mis moins de 40 min pour effectuer cette course.
5. La classe médiane est [45 ; 50[.
6. Pour déterminer une valeur approchée de la médiane, on prend le centre de la classe médiane.

50 L'histogramme suivant donne la répartition des employés d'une start-up selon leur âge.



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. On arrondira les fréquences au dixième.

Âges	Centre des classes	Effectifs	Fréquences (en %)
[20 ; 24[			
[24 ; 28[			
[28 ; 32[			
[32 ; 36[			
[36 ; 40[			

On suppose que la répartition est uniforme.
2. Déterminer l'âge moyen des employés de cette entreprise.
3. Déterminer le pourcentage des employés ayant moins de 28 ans.
4. Déterminer la classe médiane de cette série.

51 Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires, en euros, dans une entreprise.

Salaires	Effectifs	Fréquences (en %)	FCC (en %)
[0 ; 1 000[	182		
[1 000 ; 2 000[	356		
[2 000 ; 3 000[	257		
[3 000 ; 4 000[	25		

1. Calculer le nombre total d'employés de cette entreprise.
On suppose que la répartition est uniforme.
2. Calculer le salaire moyen, arrondi à l'unité, dans cette entreprise.
3. Recopier le tableau et compléter les colonnes **Fréquences** et **Fréquences cumulées croissantes** (FCC). Arrondir à l'unité.
4. En déduire la classe médiane de cette série.
5. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes et en déduire le salaire médian dans cette entreprise. Interpréter ce salaire médian.

SPÉCIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS hachette-clic.fr/26de2093

52 On s'intéresse au temps de téléchargement, en secondes, de fichiers MP3. Les données ont été regroupées dans le tableau ci-dessous.

Temps	Nombre de fichiers
[0 ; 15[	7
[15 ; 30[	9
[30 ; 45[	5
[45 ; 60[	4
[60 ; 75[	3
[75 ; 90[	2

1. Calculer le temps moyen de téléchargement d'un fichier MP3.
2. Déterminer le pourcentage de fichiers dont le temps de téléchargement est entre 15 et 45 secondes. Arrondir à l'unité.
3. Quelle est la classe médiane de cette série ? Justifier.

Capacité 3 Mettre en relation effectifs, proportions et pourcentages

Voir p. 285

Dans les exercices 53 à 55, on donnera les réponses sous forme décimale puis sous forme de pourcentage.

53 Dans une classe de 35 élèves il y a 21 filles. Quelle est la proportion de filles dans la classe ?



CORRECTION TYPE EN VIDÉO hachette-clic.fr/26de2095

54 Dans une société de 300 employés, 45 sont des cadres. Déterminer la proportion de cadres dans cette société.

55 Après une journée au marché, un maraîcher fait l'inventaire de ses invendus : 16 kg de pommes, 10 kg de carottes, 14 kg d'oranges et 10 kg d'oignons. Quelle est la proportion de pommes parmi les invendus ?

56 Dans un club de cyclisme de 120 membres, 45 % sont des hommes. Combien y a-t-il d'hommes dans ce club ?

57 Sur son terrain de 1 200 m^2, un agriculteur réserve les deux tiers à la production de maïs. Quelle surface de terrain est utilisée pour le maïs ?

58 Une usine produit 720 pièces par jour, dont 5 % sont défectueuses. Déterminer le nombre de pièces défectueuses produites par jour.

59 En haute saison, 30 % des plats servis par un restaurant chaque jour sont végétariens, soit 150 plats végétariens. Combien de plats sont servis par ce restaurant chaque jour ?

60 Dans l'appartement de Loéva, 65 % des plantes sont des plantes retombantes. Il y a en tout 26 plantes retombantes. Combien Loéva a-t-elle de plantes dans son appartement ?



61 Ce tableau donne la répartition des notes des élèves à un contrôle ainsi que les fréquences et les fréquences cumulées croissantes (F.C.C.).

Notes	7	9	11	13	16
Effectif	3	3	8	4	2
Fréquence (%)	15 %	15 %			
F.C.C.	15 %	30 %			

1. Recopier et compléter le tableau.
2. En déduire le pourcentage d'élèves ayant 11 ou moins.

Info

La fréquence cumulée croissante d'une valeur correspond à la proportion des valeurs de la série inférieures ou égales à cette valeur.

62 Une classe de 2de prépare une sortie scolaire. Parmi les élèves de la classe, 60 % souhaitent faire une activité en plein air, 10 % aller au zoo et le reste préfère visiter un musée. 18 élèves ont voté pour une activité en plein air.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
2. Combien d'élèves souhaitent visiter un musée ?

63 Voici le tableau incomplet donnant la répartition des 250 employés d'une entreprise.

	Hommes	Femmes	Total
Moins de 40 ans	68		
Plus de 40 ans			
Total		130	250

1. Déterminer la proportion d'employés femmes dans l'entreprise.
2. On sait que 64 % des employés ont moins de 40 ans.

a. Déterminer le nombre d'employés de moins de 40 ans.

b. Recopier et compléter le tableau.

c. Déterminer le pourcentage de femmes de plus de 40 ans dans l'entreprise.

SPECIMEN

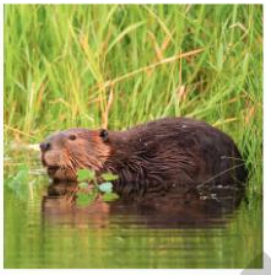
Capacité 4 Manipuler des valeurs successives et leur taux d'évolution

Voir p. 287

64 Début mai 2023 le prix du baril de pétrole était d'environ 72 $, trois mois plus tard, il s'élevait à 84 $.
1. Déterminer la variation absolue du prix.
2. Déterminer le taux d'évolution du prix sur ces trois mois. *On arrondira à 10^{-2}.*

65 Pendant des soldes, le prix d'un article est passé de 360 € à 300 €.
1. Déterminer la variation absolue du prix.
2. Déterminer le taux d'évolution du prix.

66 Dans une réserve naturelle, la population de castors était de 80 début 2022. En début d'année 2023, on recense 90 castors. Déterminer le taux d'évolution de la population de castors entre 2022 et 2023.



Dans les exercices 67 à 69, déterminer le coefficient multiplicateur associé à :

67 **1.** une baisse de 72 %
2. une hausse de 31,7 %



CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2096

68 **1.** une hausse de 1 % **2.** une baisse de 0,5 %

69 **1.** une hausse de 200 % **2.** une baisse de 99,9 %

Dans les exercices 70 à 72, déterminer le taux d'évolution associé au coefficient multiplicateur.

70 **1.** 0,45 **2.** 0,21 **3.** 1,68

71 **1.** 0,7655 **2.** 1,005 **3.** 1,5625

72 **1.** 0,01 **2.** 2 **3.** 3,5

73 QCM
1. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 1 % est : **a.** 0,1 **b.** 1,01 **c.** 1,1
2. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 60 % est :
a. 0,4 **b.** 0,6 **c.** 1,4
3. Un capital de 1 500 € baisse de 10 %. Il vaut alors :
a. 150 € **b.** 1 490 € **c.** 1 350 €

74 **1.** Un article est affiché au prix de 120 €. Son prix diminue de 15 %. Calculer son prix final.
2. La valeur d'une carte à collectionner a augmenté de 30 % entre 2023 et 2026. En 2023, sa valeur était de 50 €. Déterminer sa valeur en 2026.

75 **1.** Pendant les soldes, un article est affiché à 21 €. Son prix a été diminué de 30 %. Calculer son prix d'origine.
2. Entre 2020 et 2026, un influenceur a vu son nombre d'abonnés sur les réseaux sociaux augmenter de 70 %. En 2026, cet influenceur compte 56 950 abonnés, déterminer son nombre d'abonnés en 2020.

76 La feuille de calcul ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires d'une petite entreprise sur 5 ans.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2022	2023	2024	2025	2026
2	Chiffre d'affaires annuel (€)	105 000	110 500	118 000	125 000	137 000
3	Évolution		5,24%			

1. Quelle formule, saisie en C3 et recopiée vers la droite, permet de compléter le tableau ?
2. Quelle valeur obtient-on dans la cellule D3 ? E3 ? F3 ? *On arrondira les résultats à 0,1 % près.*
3. Interpréter le nombre obtenu dans la cellule E3.
4. Entre 2026 et 2027, le gérant de l'entreprise prévoit une augmentation de 2 % du chiffre d'affaires. Calculer le chiffre d'affaire en 2027 selon cette prévision.

Capacité 5 Compléter un tableau croisé d'effectifs, calculer des fréquences marginales et conditionnelles

Voir p. 289

77 Le tableau ci-dessous donne la répartition des 200 employés d'une entreprise.

	Femmes	Hommes	Total
Cadres		27	60
Techniciens	87		
Total			200

1. Préciser les deux caractères étudiés.
2. Recopier et compléter le tableau.
3. Donner le nombre de femmes cadres dans cette entreprise.
4. Donner le nombre d'hommes dans cette entreprise.
5. Préciser la fréquence marginale des cadres, puis la fréquence marginale des femmes dans cette entreprise.

SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2093

78 Un sac contient 8 jetons verts et 8 jetons rouges. Parmi les jetons verts 5 portent le numéro 1 et les autres le numéro 2, parmi les jetons rouges le quart porte le numéro 1 et les autres le numéro 2.

1. Quels sont les deux caractères permettant de catégoriser les jetons ?

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Vert	Rouge	Total
Numéro 1			
Numéro 2			
Total			

3. Donner, sous forme de fraction irréductible :

a. la fréquence marginale des jetons numéro 1.

b. la fréquence conditionnelle des jetons verts parmi les jetons numéro 2.

79 Le tableau ci-dessous donne la répartition des 400 adhérents d'un club de sport qui propose trois activités : tennis, marche et vélo. Tous les adhérents pratiquent une et une seule des activités proposées, et 25 % des femmes pratiquent le vélo.

	Tennis	Marche	Vélo	Total
Hommes				
Femmes	65			160
Total	150	120		400

1. Recopier et compléter le tableau.

2. Calculer la fréquence marginale des adhérents pratiquant la marche.

3. Calculer la fréquence conditionnelle des adhérents pratiquant la marche parmi les hommes.

80 Le tableau ci-dessous donne la répartition des 895 élèves d'un lycée suivant leur niveau de classe et leur régime : externe (E) ou demi-pensionnaire (DP).

	2nde	1re	Terminale	Total
E	50		85	195
DP	285	220		
Total			280	

1. Recopier et compléter le tableau.

Dans la suite de l'exercice, les résultats des fréquences seront donnés sous forme de fraction irréductible.

2. a. Calculer la fréquence marginale des élèves externes.

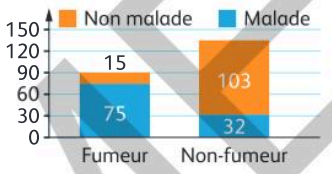
b. En déduire la fréquence marginale des élèves demi-pensionnaires.

3. a. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves de seconde parmi les demi-pensionnaires.

b. Le proviseur du lycée affirme que près de 60 % des élèves demi-pensionnaires sont en première ou en terminale. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

81 **Vrai ou faux ?**

Le diagramme ci-dessous donne les résultats d'une étude organisée par un organisme de santé sur le lien entre une maladie respiratoire et le tabagisme.



Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Les deux caractères étudiés sont « fumeur » et « non-fumeur ».

2. L'étude porte sur 225 personnes.

3. La fréquence marginale des fumeurs est de 40 %.

4. La fréquence conditionnelle des malades parmi les fumeurs est de plus de 85 %.

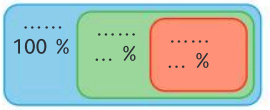
5. Au moins 70 % des malades sont non-fumeurs.

Capacité 6 Manipuler les pourcentages de pourcentages

Voir p. 290

82 Dans une boulangerie, les invendus sont constitués à 60 % de viennoiseries. Parmi les viennoiseries, 45 % sont des pains au chocolat.

1. Recopier et compléter le schéma ci-contre, qui représente la situation.



2. Quelle est la proportion de pains au chocolat parmi les invendus ?

83 Un restaurant propose une carte dont la moitié est composée de plats de résistance, un tiers d'entrées et le reste de desserts. 30 % des desserts sont au chocolat. Déterminer la proportion de desserts au chocolat proposés dans la carte de ce restaurant.

84 Dans une entreprise, 45 % des employés sont des femmes. Un tiers de ces femmes sont cadres. Calculer le pourcentage de femmes cadres parmi les employés de l'entreprise.

SPECIMEN

85 La mairie d'une ville souhaite construire un espace dédié aux sports avec plusieurs complexes sportifs côte à côte. Il est prévu d'y aménager un parking occupant 10 % du terrain. 2 % du parking est dédié aux vélos.
1. Donner le pourcentage du terrain dédié au parking pour les vélos.
2. 20 m² sont dédiés aux vélos. Déterminer la superficie du terrain.

86 Dans la bibliothèque de Maxime, 30 % des ouvrages sont dédiés à ses études et le reste à son loisir. 5 % des ouvrages dédiés à ses études sont des biographies, ainsi que 10 % des autres ouvrages. Déterminer le pourcentage de biographies dans sa bibliothèque.

87 Dans une salle des fêtes, certaines personnes sont déguisées (proportion p) et parmi elles il y a des femmes (proportion p'). On note p'' la proportion de femmes déguisées dans la salle des fêtes.
Déterminer dans chaque cas la proportion manquante et interpréter la valeur obtenue.
1. $p = 70\,\%$ et $p' = 30\,\%$
2. $p' = 20\,\%$ et $p'' = 10\,\%$
3. $p = 60\,\%$ et $p'' = 48\,\%$

SAVOIR-FAIRE 7 Calculer un taux d'évolution global et réciproque

Voir p. 291

Dans les exercices 88 à 92, déterminer le coefficient multiplicateur global, puis le taux d'évolution global.

88 Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 40 %.

89 Une baisse de 20 % suivie d'une baisse de 30 %.

90 Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 10 %.

91 Une baisse de 25 % suivie d'une hausse de 30 %.

92 Deux hausses de 20 % suivie d'une baisse de 28 %.

93 Recopier et compléter le tableau suivant.

1re évolution	2e évolution	Évolution globale
+20 %		+8 %
−10 %		−32,5 %
−5 %	+5 %	

94 **1.** Un article au prix de 120 € subit deux hausses successives de 10 %. Calculer son prix final.
2. Durant les soldes, le prix d'un article diminue successivement de 20 % puis de 30 %. Son prix initial était de 65 €. Calculer son prix final.

95 **Vrai ou faux ?**
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Le résultat final de deux hausses successives de 23 % et 36 % est identique à celui de deux hausses successives de 30 %.
2. Le résultat final d'une hausse de 80 % suivie d'une baisse de 20 % est identique à celui de deux hausses successives de 20 %.
3. Le résultat final de deux baisses successives de 50 % et 39,5 % est identique à celui de deux baisses successives de 45 %.

Dans les exercices 96 à 98, déterminer le coefficient multiplicateur réciproque, puis le taux d'évolution réciproque. On arrondira à 0,01 %.

96 **1.** Une hausse de 12 %.
2. Une baisse de 35 %.

97 **1.** Une baisse de 80 %.
2. Une hausse de 115 %.

98 **1.** Une hausse de 49 % **2.** Deux baisses de 20 %.

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2097



99 **QCM**
1. Le taux d'évolution réciproque associé à une baisse de 20 % est : **a.** 0,8 **b.** 1,25 **c.** 0,25
2. Le coefficient multiplicateur réciproque associé à une hausse de 28 % est :
a. 1,28 **b.** 0,78125 **c.** 0,78
3. Après une remise de 36 %, le prix d'un article est de 20 €. Son prix initial est :
a. 12,8 € **b.** 55,55 € **c.** 31,25 €
4. Une quantité subit les évolutions suivantes :
−34,7 % ; +30,2 % ; +0,7 % ; +9,1 %
L'évolution globale est :
a. +5,3 % **b.** −6,59 % **c.** +0,93 %

100 Un article passe de 40 € à 54 €.
1. a. Déterminer le taux d'évolution entre ces deux prix.
b. En déduire le coefficient multiplicateur associé à cette évolution.
2. a. Déterminer le taux réciproque associé à cette évolution. *On arrondira le résultat à 10^{-2}.*
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

101 Le tableau ci-dessous donne le prix moyen d'un même produit entre 2019 et 2023.

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Prix en €	8,78	9,95	10,5	10,5	11

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation du prix moyen entre 2019 et 2023.
2. Déterminer le pourcentage de diminution nécessaire pour revenir en 2024 au prix de 2019.

SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Résumés statistiques

102 On a relevé les températures maximales à Lyon pendant plusieurs jours. On regroupe ces informations dans le tableau suivant.

Température (en °C)	23	25	26	27	30
Effectif	3	2	1	3	1

1. Pendant combien de jours les températures ont-elles été relevées ?
2. Calculer la température maximale moyenne lors de ces relevés.



103 Le tableau suivant donne les notes obtenues lors d'un devoir surveillé par une classe de Seconde.

Note	3	6	8	9	10	13	15
Effectif	4	6	5	5	6	3	1

1. Calculer la moyenne de la classe.
2. Se rendant compte que le devoir était trop long, le professeur décide de modifier les notes afin de remonter la moyenne. Donner la nouvelle moyenne s'il décide :
a. d'augmenter toutes les notes de 1 point ;
b. d'augmenter toutes les notes de 20 %.

104 Calculer la médiane, le premier quartile, le troisième quartile et l'écart interquartile des séries suivantes.
a. 1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 7 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12
b.

Valeur	0	3	4	7	8
Effectif	2	4	3	6	1

c.

Valeur	11	15	17	21	22	27	30
Effectif	3	7	4	6	2	1	4

105 Voici une série de 10 notes :
8 ; 12 ; 14 ; 5 ; 9 ; 15 ; 13 ; 12 ; 14 ; 17
1. Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de cette série.
2. Si possible, ajouter une note à cette série pour que :
a. $Me = 13$ **b.** $Me = 11$ **c.** $Q_1 = 9$
d. $Q_1 = 8$ **e.** $Q_3 = 15$ **f.** $Q_3 - Q_1 = 8$

106 ALGO **Les listes**
1. On considère la liste L de valeurs ordonnées suivantes : 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; 15 ; 17.
On note $L[0]$ la 1re valeur de L, $L[1]$ la 2e…
Que vaut k pour que $L[k]$ contienne :
a. la médiane **b.** le 1er quartile **c.** le 3e quartile
2. On considère maintenant une liste L de N valeurs ordonnées.
a. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable Me contienne la médiane des valeurs de L.

```
Si N est pair Alors
    Me ← ...
Sinon
    Me ← ...
```

b. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable M contienne la moyenne des valeurs de L.

```
M ← 0
Pour i allant de 0 à ... Faire
    M ← ...
Fin Pour
M ← ...
```

107 Léna joue à un jeu d'adresse dans lequel elle peut marquer 1, 2, 3 ou 5 points. Voici les résultats de ses 10 lancers.

Points	1	2	3	5
Effectif	3	4	1	2

1. Calculer la moyenne de cette série.
2. Calculer la variance de cette série.
3. Calculer l'écart type de cette série.

108 Associer chaque série au couple (moyenne ; écart type) correspondant.







• Couple A (15 ; 3,23)
• Couple B (15 ; 4,86)
• Couple C (15 ; 1,14)

SPECIMEN

109 **Vrai ou faux ?**

Après chaque devoir surveillé, un professeur a l'habitude de relever certaines informations. Voici celles qu'il a relevées cette fois :

Moyenne	Médiane	1er quartile	3e quartile	Effectif
10,5	11	8	13	30

Dire si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si on ne peut pas savoir.

1. Un élève au moins a eu 8.
2. Un élève au moins a eu 11.
3. La moitié de la classe a eu plus de 11.
4. Au moins un quart des élèves a eu 13 ou plus.
5. La moitié des élèves de la classe ont eu entre 8 et 13.

110 Deux machines fabriquent des cylindres métalliques de diamètre théorique de 20 mm. On a prélevé 40 pièces de chaque machine et mesuré leur diamètre.

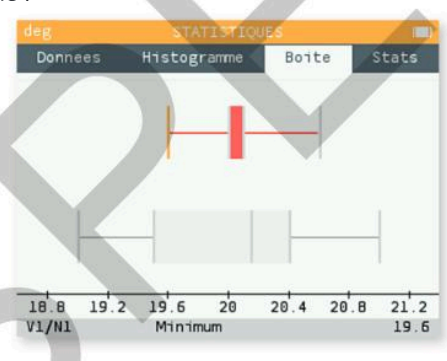
Machine A

20,1 ; 20,2 ; 20 ; 20 ; 19,9 ; 20,2 ; 20 ; 20,1 ; 20,4 ; 20,1 ; 19,8 ; 20,2 ; 19,9 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20,5 ; 20 ; 19,7 ; 20 ; 19,6 ; 20 ; 20,1 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20,1 ; 20 ; 19,9 ; 20,4 ; 20 ; 20,5 ; 20,4 ; 20,6 ; 20,1 ; 20 ; 19,9 ; 19,8 ; 20 ; 20,1

1. Déterminer le couple (moyenne ; écart type) et (médiane ; écart interquartile) de la série A.
2. Pour la machine B on obtient les indicateurs :

$$\overline{x_B} = 20{,}06 \ ; \ \sigma_B = 0{,}55$$

On donne également les diagrammes en boite suivants où la série A est en rouge et la B en gris.
Comparer les deux échantillons à l'aide des deux couples d'indicateurs. Quelle machine semble la plus fiable ?



111 Élisa a obtenu 10 et 15 aux deux premiers contrôles de mathématiques. Quelle note doit-elle avoir au troisième contrôle pour obtenir 14 de moyenne ?

112 **Croire en son potentiel…**

Ce trimestre, Justin a une moyenne de 12 en mathématiques. S'il obtient un 20 à son prochain devoir, il aura une moyenne de 13.
Combien de devoirs a-t-il déjà rendus ?

113 **Exercice guidé**

Un professeur compare les résultats de ses deux classes de Seconde.
Les résultats obtenus pour le premier trimestre sont résumés ci-dessous.
2de A : $\overline{x} = 10{,}6$; $\sigma = 6$; $Me = 10$; $Q_3 - Q_1 = 11$.
2de B : $\overline{x} = 10{,}4$; $\sigma = 3$; $Me = 9{,}5$; $Q_3 - Q_1 = 8$.
En comparant ces indicateurs, ce professeur explique à la Seconde A qu'il n'est pas satisfait.
Quels peuvent être ses motifs d'insatisfaction ?

Piste de résolution

On commence par comparer les indicateurs de position des deux séries puis ceux de dispersion.

114 PYTHON

La fonction `rejet` ci-contre a pour paramètres une liste `L` et deux nombres `m` et `s`.

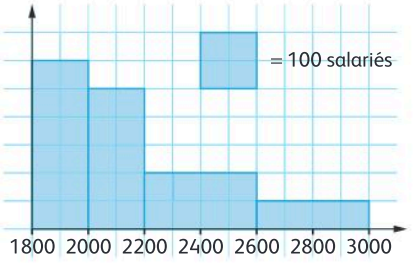
```
def rejet(L,s,m):
    r=0
    for valeur in L:
        if valeur<m-2*s:
            r+=1
        elif valeur>m+2*s:
            r+=1
    return r
```

1. a. Que retourne la fonction si `m` vaut 40, `s` vaut 3 et `L` contient :

33 ; 37 ; 40 ; 41 ; 42 ; 41 ; 40 ; 45 ; 39 ; 48

b. Modifier le programme pour qu'il renvoie la proportion de `r` dans `L` (utiliser la fonction `len(L)` qui renvoie la taille de la liste `L`).
2. Le périmètre crânien d'un nourrisson est « normalement » compris dans la zone $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$.
À 3 mois, $m = 40$ cm et $\sigma = 3$ cm.
En dehors de cette zone, l'enfant peut souffrir de microcéphalie ou de macrocéphalie. Quelle proportion d'enfants sont à surveiller dans la liste `L` ?

115 L'histogramme ci-dessous donne la répartition des salaires des employés d'une entreprise.



1. Donner le nombre total d'employés.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Salaire	Centre	Effectif
[1 800 ; 2 000[	1 900	300
[2 000 ; 2 200[		
[2 200 ; 2 600[		
[2 600 ; 3 000[		

3. À l'aide des centres et des effectifs, calculer le salaire moyen des employés dans l'entreprise.

SPECIMEN

2 Regroupement par classe de même amplitude d'une série statistique

116 Dans un lycée, deux classes de seconde ont effectué le même devoir.
La seconde 1 compte 25 élèves et a obtenu une moyenne de 11,1.
La seconde 2 compte 28 élèves et a obtenu une moyenne de 9,8.
Calculer la moyenne globale des deux classes réunies. Arrondir au dixième.

117 Un professeur de mathématiques a demandé à une classe d'enquêter sur le temps que les élèves du lycée ont passé pour réviser leur dernier contrôle de mathématiques. Voici les résultats obtenus :

Temps (en minutes)	Nombre d'élèves
[50 ; 55[	90
[55 ; 60[	150
[60 ; 65[	280
[65 ; 70[	310
[70 ; 75[	220
[75 ; 80[	130

1. Déterminer le temps moyen de révision des élèves de ce lycée à leur dernier contrôle. Arrondir au dixième et convertir ce temps en heures et minutes.
2. Quel est le pourcentage d'élèves ayant passé moins de 1 heure à réviser ?
3. Déterminer la classe médiane de cette série. Justifier et interpréter le résultat.

118 On a relevé les masses (en grammes) de 40 oranges dans un verger.
142 ; 155 ; 163 ; 172 ; 149 ; 152 ; 167 ; 171 ; 160 ; 158 ; 174 ; 174 ; 169 ; 150 ; 156 ; 165 ; 172 ; 150 ; 168 ; 159 ; 162 ; 170 ; 174 ; 153 ; 148 ; 166 ; 173 ; 170 ; 157 ; 164 ; 163 ; 154 ; 161 ; 174 ; 147 ; 151 ; 167 ; 169 ; 158 ; 172.
1. Recopier et compléter le tableau suivant.

Masses (en g)	Effectifs
[140 ; 145[	
[145 ; 150[	
[150 ; 155[	
[155 ; 160[	
[160 ; 165[	
[165 ; 170[	
[170 ; 175[	

2. Donner une estimation de la masse moyenne des oranges (à 0,1 g près).
3. Calculer le pourcentage d'oranges dont la masse est comprise entre 150 g et 155 g. Arrondir au dixième.
4. Compléter le tableau par les colonnes des fréquences (en %) et des fréquences cumulées croissantes (en %). Arrondir au dixième.
5. Déterminer la classe médiane de cette série.
6. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
7. En déduire la médiane de cette série. Interpréter.

119 TABLEUR Une étude a été réalisée sur 200 foyers d'une commune afin d'analyser leur consommation annuelle d'électricité (exprimée en kWh).
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Consommation (en KWh)	Effectifs
[0 ; 2 000[	18
[2 000 ; 4 000[	64
[4 000 ; 6 000[	72
[6 000 ; 8 000[	30
[8 000 ; 10 000[	16

1. Créer la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D
1	Classes		Effectif ni	Centre classe xi
2	Borne inf	Borne sup		
3	0	2000	18	
4	2000	4000	64	
5	4000	6000	72	
6	6000	8000	30	
7	8000	10000	16	

2. Quelle formule, saisie dans la cellule D3 et recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne D ?
3. Quelle formule peut-on saisir en C8 pour obtenir l'effectif total ?
4. Faire afficher dans la colonne E les produits $n_i x_i$ puis dans la cellule E8 le total de ces produits.
5. Dans la cellule F10, faire calculer la consommation moyenne d'un foyer dans cette étude.

3 Proportions

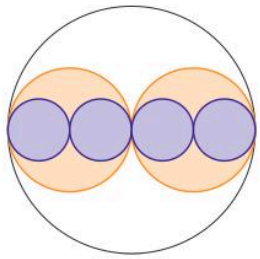
120 Le tableau suivant donne la répartition des salariés d'une entreprise :

	Hommes	Femmes	Total
Cadres			40
Techniciens	88		
Total			200

SPECIMEN

1. Les hommes cadres représentent 8 % des salariés. Combien y'a-t-il d'hommes cadres ?
2. Recopier et compléter le tableau.
3. Quelle est la proportion d'hommes dans l'entreprise ?
4. Quelle est la proportion de femmes techniciennes dans l'entreprise ?
5. Quelle est la proportion d'hommes parmi les techniciens ?

121 On considère la figure ci-contre.



1. À quelle fraction de l'aire d'un disque orange correspond l'aire de deux disques violets ?
2. En déduire la fraction de l'aire du grand disque que représente l'aire de deux disques oranges.
3. À quelle fraction de l'aire du grand disque correspond l'aire des quatre petits disques violets ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant le mot « aire » par « périmètre ».

122 Dans un lycée, une classe de 2de compte 30 élèves.
1. 18 élèves de la classe sont externes. Déterminer, sous forme de pourcentage, la proportion d'élèves externes dans la classe.
2. Deux cinquièmes des élèves de la classe portent des lunettes. Déterminer le nombre d'élèves portant des lunettes dans la classe.
3. La classe représente 4 % de l'effectif du lycée. Déterminer le nombre d'élèves dans le lycée.

123 Dans une association humanitaire, 60 % des membres sont des femmes. Parmi elles, 10 % sont retraitées. Parmi les hommes, 20 % sont retraités.
1. Déterminer le pourcentage de retraités dans l'association.
2. On sait que 25 % des retraités ont plus de 70 ans et, parmi eux, 20 % sont des hommes. Quelle est la proportion de femmes retraitées de plus de 70 ans ?

124 Allan fait du tir à l'arc. Voici ses 20 derniers scores : 10 ; 5 ; 7 ; 8 ; 4 ; 6 ; 5 ; 10 ; 5 ; 3 ; 7 ; 6 ; 4 ; 9 ; 8 ; 5 ; 5 ; 8 ; 6 ; 2.
1. Construire un tableau d'effectifs, de fréquences et de fréquences cumulées.
2. Allan est qualifié pour une compétition si moins de 25 % de ses scores sont inférieurs strictement à 5. Est-il qualifié ?

125 Dans un établissement de 600 élèves, on donne les informations suivantes concernant la répartition des élèves :
– 20 % des garçons sont demi-pensionnaires ;
– 45 % des filles sont externes ;
– 1/3 des élèves sont des garçons.



1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	Garçons	Filles	Total
Demi-P			
Externe			
Total			

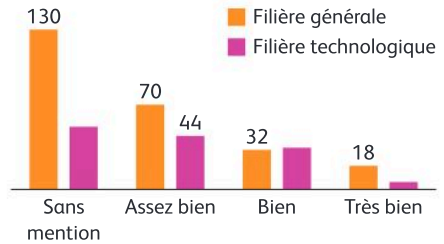
2. Combien de repas les cuisiniers devront-ils préparer ?

126 Vrai ou faux ?
On a demandé à 300 personnes leur occupation préférée. On donne les résultats dans ce tableau.

	25 ans et moins	Entre 26 et 50 ans	Plus de 50 ans	Total
Sport	49	42	14	105
Films	32	58	30	120
Lecture	27	26	22	75
Total	108	126	66	300

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Environ 16 % des personnes ont 25 ans ou moins.
2. 40 % des personnes préfèrent les films.
3. 78 % des personnes ont 50 ans ou moins.
4. 14 % des personnes ont entre 26 et 50 ans et préfèrent faire du sport.
5. 40 % des personnes préférant le sport ont entre 26 et 50 ans.
6. 36 % des personnes de moins de 25 ans préfèrent lire.

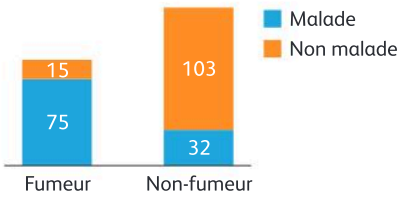
127 On donne les résultats, en nombres d'élèves, d'un lycée général et technologique au baccalauréat.



SPÉCIMEN

1. Déterminer la proportion, en pourcentage, de mention bien en voie générale.
2. Un tiers des élèves en voie technologique ont obtenu la mention assez bien. Déterminer le nombre d'élèves en voie technologique.
3. 25 % des élèves en voie technologique ont obtenu la mention bien. Déterminer le nombre de mention bien dans cette voie.
4. Déterminer la proportion, en pourcentage, d'élèves de voie générale parmi les mentions bien. *On arrondira le résultat à 0,01 %.*

128 Une étude fait le lien entre une maladie respiratoire et le tabagisme.



Indiquer pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. 40 % des personnes sont des fumeurs.
2. Une personne sur trois est malade.
3. Environ 70 % des malades sont fumeurs.
4. Environ 31 % des non-fumeurs sont malades.

129 Dans un lycée, 36 % des élèves sont en Seconde, 34 % sont en Première et 30 % sont en Terminale. En plus de l'anglais, les élèves étudient l'allemand ou l'espagnol en langues vivantes. 21 % des élèves de Seconde étudient l'allemand contre 17 % en Première et 12 % en Terminale.
1. Déterminer la proportion d'élèves qui étudient l'allemand dans ce lycée.
2. 206 élèves étudient l'allemand. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?



130 Walter, professeur de chimie au lycée, a ouvert une chaîne YouTube. Sa chaîne compte 240 000 abonnés.
1. Parmi ses abonnés, 55 % sont des étudiants. Combien y a-t-il d'étudiants parmi ses abonnés ?
2. On sait aussi que 30 % des étudiants abonnés sont à la fac. Quel pourcentage de ses abonnés représente-t-il ?
3. Si Walter augmente son nombre d'abonnés de 15 % cette année, combien aura-t-il d'abonnés ?

131 Quatre médecins britanniques ont mené en 1986 une étude comparative quant à l'efficacité de différents traitements contre les calculs rénaux. Ces modes de traitement, que l'on nommera Traitement A et Traitement B ont respectivement été mis au point dans les années 1972-1980 et dans les années 1980-1985. Le tableau ci-dessous indique les pourcentages de réussite des traitements A et B pour soigner petits et gros calculs rénaux.



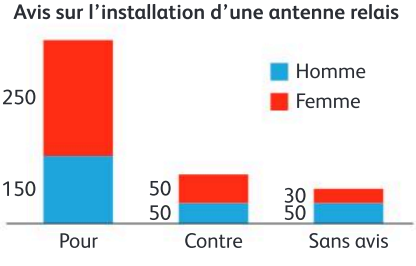
Petits calculs		Gros calculs	
Traitement A	Traitement B	Traitement A	Traitement B
93 % (81/87)	87 % (243/270)	73 % (192/263)	69 % (55/80)

Deux personnes analysent les résultats.
La première affirme « Le traitement A est plus efficace ».
La deuxième affirme « Sur l'ensemble des calculs (petits et gros) c'est le traitement B qui est le plus efficace ».
Qui a raison ?

Info
Cet exercice met en évidence *Le paradoxe de Simpson* dans lequel les résultats d'un phénomène quantifié dans plusieurs groupes semblent s'inverser lorsque les groupes sont réunis.

132 Dans un village, un opérateur de téléphonie propose d'améliorer la réception en installant une antenne relais. La municipalité a demandé l'avis des habitants.

Avis sur l'installation d'une antenne relais





Dans quelle catégorie (hommes ou femmes), le « contre » est-il le plus représenté ? Justifier.

SPECIMEN

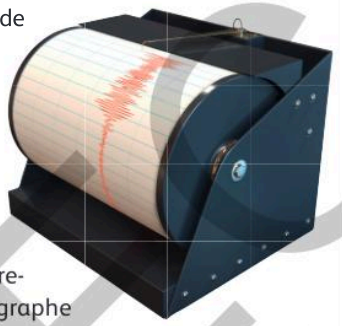
4 Évolutions

133 Pendant les soldes, le prix d'un article diminue de 30 %, puis de 10 % supplémentaires lors de la 2e démarque.
1. Quelle est, en pourcentage, la réduction globale après la deuxième démarque ?
2. Le prix de l'article est de 94,50 €. Quel était son prix avant les soldes ?

134 Lorenzo part faire les soldes. Dans un magasin de vêtements, il décide de prendre une chemise à 30 € avec 40 % de réduction ainsi qu'un pantalon à 45 € avec 30 % de réduction.
Avec sa carte de fidélité, Lorenzo bénéficie de 10 % de réduction supplémentaires sur le montant total de ses achats. Combien Lorenzo dépense-t-il ?

135 Anna suit le cours d'une action en bourse. En une heure elle observe une augmentation de 6 % suivie d'une diminution de 6 %.
Le prix de l'action a-t-il augmenté ou diminué ?

136 Benjamin décide de placer un sismographe au bord d'une route pour étudier l'impact que peut avoir la circulation sur les relevés. Le lendemain il observe une baisse de l'activité enregistrée par le sismographe de 36 % durant la nuit, suivie d'une augmentation de 55 % au petit matin. L'activité enregistrée par le sismographe a-t-elle augmenté ou diminué le second jour par rapport au premier ?



137 Un entrepreneur décide de se lancer dans l'achat-revente de biens. Il fixe le prix de chaque bien en augmentant de 15 % le prix qu'il a lui-même payé pour acquérir ce bien. Lors des soldes il propose une réduction de 15 %. Vend-il à perte au moment des soldes ?

138 Valentin a eu trois devoirs surveillés (DS) en math ce trimestre. Entre les deux premiers DS sa note a augmenté de 25 %, mais elle a diminué de 10 % entre le 2e et le 3e DS. Son professeur vient de lui rendre sa dernière note, il a eu 13,5/20. Retrouver les deux autres notes de Valentin ce trimestre.

139 Vrai ou faux ?
Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 15 % se compensent.
2. Une hausse de 35 % suivie d'une baisse de 7 % correspond à une hausse globale de 28 %.
3. Après avoir subi une hausse de 56,25 % un article coûte 62,50 €. Le prix d'origine était de 40 €.
4. Pour compenser une hausse de 60 % il faut une baisse de 62,5 %.

Analyse d'un énoncé

140 **Exercice commenté**
Le prix d'un objet a augmenté du même pourcentage sur deux années consécutives, pour atteindre une augmentation globale sur deux ans de 21 %. Déterminer le pourcentage de l'augmentation qui a eu lieu chaque année.

- On peut trouver le coefficient multiplicateur global C_{Mg} puisque le prix a augmenté de 21 % en deux ans.
- Si on note t_m l'augmentation annuelle, le coefficient multiplicateur sur une année est $C_m = 1 + t_m$, ainsi le coefficient multiplicateur global est $C_{Mg} = (1 + t_m)^2$.
- Il suffit alors de résoudre l'équation obtenue avec les deux expressions de C_{Mg} pour déterminer t_m.

141 **Application immédiate**
En deux ans, le prix du kWh (kilowattheure) est passé de 0,1740 € à 0,25056 €.
1. Déterminer l'évolution en pourcentage du prix du kWh entre ces deux années.
2. On suppose que l'augmentation du prix a été la même chaque année, en pourcentage. Déterminer l'évolution annuelle, en pourcentage, du prix de kWh.

142 QCM
Pour chacune des questions, indiquer la bonne réponse.
1. Un article initialement au prix de 40 € voit son prix augmenté de 8 €. Le pourcentage d'augmentation du prix est de :
a. 8 % **b.** environ 17 % **c.** 20 % **d.** 25 %
2. Après une hausse de 10 % puis une baisse de 20 %, le prix d'un article est de 220 €. Son prix initial est de :
a. 193,60 € **b.** 250 € **c.** 237,60 € **d.** environ 244 €
3. Le prix d'un article passe de 400 à 484 €. Cette évolution correspond à deux hausses successives de :
a. 21 % **b.** 17 % **c.** 10,5 % **d.** 10 %

SPÉCIMEN

143 Commercial dans une entreprise, Loïc vérifie le prix d'un article qui a déjà subi deux augmentations cette année. Il voit que l'augmentation totale est de 62 % et il se souvient que la première était de 20 %.

1. a. Quel est le coefficient multiplicateur global associé à ces deux évolutions ?

b. En déduire le coefficient multiplicateur associé à la seconde évolution.

2. Le prix actuel de l'article est de 31,05 €. Quel était le prix de l'article après la première augmentation ?

144 PYTHON Mathieu a utilisé ce programme pour un exercice mais il ne se souvient plus ce qu'il renvoie.

```
def exercice(e):
    c=1+e/100
    t=c-1
    return(c,t)
```

1. a. Mathieu teste son programme avec les valeurs 40 et 85. Quelles sont alors les valeurs renvoyées dans chaque cas ?

b. Si e est la valeur d'un pourcentage, à quoi servait le programme de Mathieu ?

2. Adapter le programme afin qu'il renvoie le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution réciproque d'une évolution de e %.

145 Le tableau incomplet ci-dessous donne l'évolution de la population d'une ville entre 2015 et 2020.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Population	2550		2679	2545	2698	
Évolution (%)		+2	+3			+7,3

1. Justifier qu'il y a 2 601 habitants en 2016.

2. Recopier et compléter le tableau.

3. Déterminer le taux d'évolution global entre 2015 et 2020.

4. Quel doit-être le taux d'évolution entre 2020 et 2021 pour un retour à la situation de 2015 ?

146 Voici les évolutions du chiffre d'affaires (CA) d'une entreprise par rapport à l'année précédente de 2019 à 2023.

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Taux	+5,1	+4	−2	−4,1	+3,2

1. Déterminer le taux d'évolution global entre 2018 et 2023.

2. L'entreprise souhaite qu'entre 2018 et 2024, l'augmentation globale du CA soit de 10 %. Quel doit être le pourcentage de l'augmentation du CA entre 2023 et 2024 pour atteindre cet objectif ?

147 Une voiture est affichée au prix de 15 000 € en 2022. L'année suivante son prix diminue de 8 %.

1. Déterminer le prix de la voiture en 2023.

2. On suppose que chaque année le prix de la voiture continue de diminuer de 8 %.

a. Déterminer le prix de la voiture en 2025.

b. En quelle année le prix de la voiture aura diminué d'au moins 50 % par rapport à son prix initial ?



148 PYTHON Léa a acheté un objet de collection à 350 € en 2020. Elle remarque que chaque année, la valeur de cet objet augmente d'environ 11 %.

1. Donner la valeur de cet objet en 2021.

2. Elle souhaite revendre l'objet lorsque celui-ci aura au minimum doublé de valeur.

a. Compléter le programme Python pour qu'il affiche l'année à partir de laquelle la valeur aura doublé.

```
Valeur=350
A=2020
while Valeur< ... :
    Valeur= ...
    A=A+1
print(...)
```

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour répondre au problème posé, puis conclure.

Année	2020	2021	…
Valeur	350		…

3. **Pour aller plus loin**

a. Écrire une fonction en langage Python nommée Seuil qui prend en paramètres les nombres réels V et t où V représente la valeur de l'objet en 2020 et t le pourcentage d'augmentation annuel, et qui renvoie l'année à partir de laquelle V aura doublé.

b. Tester la fonction avec des valeurs différentes mais un pourcentage identique à chaque fois. Que remarque-t-on ?

SPECIMEN

149 On donne les deux égalités suivantes :

$0{,}99^{68} \approx 0{,}505$ et $0{,}99^{69} \approx 0{,}499$

En déduire une propriété relative à l'effet de diminutions successives de 1 %.

5 Croisement de deux variables qualitatives

150 Une usine utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure le reste.

Une étude effectuée sur 800 pièces produites par l'usine a donné les résultats suivants :

• 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut

• 5 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On note D l'ensemble des pièces présentant un défaut et $\overline{D}$ l'ensemble des pièces sans défaut.

1. Donner la fréquence marginale des pièces fabriquées par la machine B.

2. Donner les fréquences conditionnelles $f_A(D)$ et $f_B(D)$.

3. Recopier et compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	D	$\overline{D}$	Total
A			
B			
Total			800

4. Le directeur de l'usine affirme que, parmi les pièces présentant un défaut, plus de 60 % proviennent de la machine A.

Le directeur a-t-il raison ? Justifier.

151 La leucose féline est une maladie virale touchant les chats. On réalise un test de dépistage sur une population de 1 000 chats.

Le tableau ci-dessous donne les résultats du test.

	Test positif	Test négatif	Total
Malade		90	
Sain	30		
Total	100		1 000

1. Recopier et compléter le tableau.

2. a. Calculer la fréquence marginale des chats malades.

b. Calculer la fréquence marginale des tests positifs.

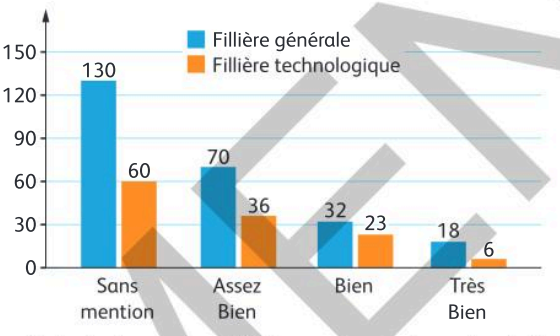
3. a. Calculer la fréquence conditionnelle des chats malades parmi les tests positifs.

b. Calculer la fréquence conditionnelle des tests négatifs parmi les chats malades.

4. On appelle « faux positif » un chat dont le test est positif alors qu'il n'est pas malade.

On considère que le test est fiable si la proportion de « faux positifs » est inférieure à 5 %. Ce test est-il fiable ?

152 Le diagramme ci-dessous donne les résultats des élèves reçus au baccalauréat dans un lycée général et technologique selon leur filière et leur mention à l'examen.



1. Calculer le nombre d'élèves reçus au baccalauréat dans ce lycée.

2. Calculer la fréquence marginale des élèves reçus au baccalauréat en filière générale.

3. Calculer la fréquence marginale des mentions Bien parmi les élèves reçus au baccalauréat.

4. Construire un tableau croisé d'effectifs décrivant la répartition des élèves reçus au baccalauréat selon ces deux caractères.

5. Calculer la fréquence conditionnelle des élèves de la filière technologique parmi les élèves ayant obtenu une mention.

153 Un concessionnaire automobile fait le bilan de ses ventes de véhicules sur les derniers mois.

Sur les 300 véhicules vendus au total, 40 % étaient d'occasion, 48 % étaient des véhicules à motorisation thermique (essence ou diesel) et 30 % étaient des véhicules électriques. Parmi les véhicules neufs, 40 % étaient des véhicules électriques, 30 % des véhicules hybrides.

1. Donner les deux caractères étudiés.

2. Interpréter chacune des données numériques de l'énoncé en termes de fréquence marginale ou de fréquence conditionnelle.

3. Donner la fréquence marginale des véhicules neufs.

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	Neuf	Occasion	Total
Thermique			
Électrique			
Hybride			
Total			

5. Calculer la fréquence conditionnelle des véhicules à motorisation thermique parmi les véhicules d'occasion. Interpréter cette valeur.

SPÉCIMEN

BILAN

154 10min Une dernière place à prendre

On donne deux graphiques en fin d'exercice résumant les résultats en mathématiques de Léo-Paul, élève en 2de.

1. Donner une valeur approchée de la moyenne et de l'écart type de cette série à 10^{-1} près.

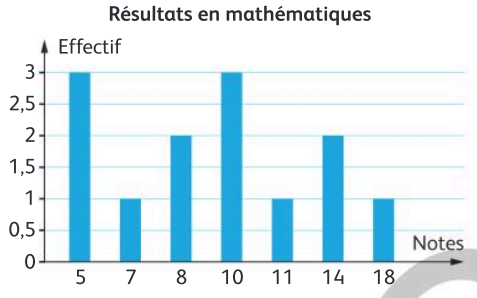
2. Déterminer la médiane et l'écart interquartile.

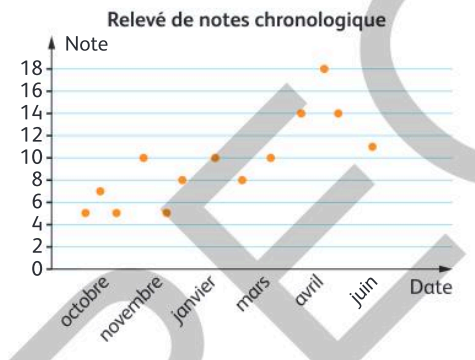
3. Rédiger une analyse synthétique des résultats de Léo-Paul sur l'année scolaire.

4. Léo-Paul compare ses résultats avec un autre élève souhaitant choisir comme lui la spécialité maths.

Voici les indicateurs résumant l'année du second élève : $\bar{x} \approx 11{,}1$; $\sigma \approx 5$; $Me = 10{,}5$; $Q_3 - Q_1 = 9$.

Quels éléments peut-il trouver pour se rassurer ?





155 15min Tableau croisé d'effectifs

On interroge 500 habitants d'une ville sur leur moyen de transport pour se rendre au travail. Parmi ces habitants, 65 % sont des femmes dont 32 % d'entre elles utilisent les transports en commun. Une personne sur deux utilise la voiture, il y a quatre fois plus de femmes que d'hommes qui utilisent la voiture. 60 hommes utilisent les transports en commun.

1. Reproduire et compléter ce tableau croisé.

	Femmes	Hommes	Total
Voiture			
Vélo			
Transports en commun			
Total			

2. Calculer la fréquence marginale des personnes prenant les transports en commun.

3. Calculer la proportion d'hommes utilisant les transports en commun.

4. Calculer la fréquence conditionnelle des hommes parmi les utilisateurs du vélo.

156 10min Pointure des élèves

On note la pointure des élèves d'une classe.

Pointure	36	37	38	39	40
Effectif	6	9	5	7	3

1. Calculer la médiane Me, la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de cette série.

2. Déterminer la proportion d'élèves ayant une pointure appartenant à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$.

3. Dans une autre classe, on obtient le couple (moyenne ; écart type) suivant : (37,9 ; 1,5).

Dans quelle classe les pointures sont-elles les plus homogènes ?

157 10min Utilisation des réseaux sociaux

On mène une enquête sur l'utilisation des réseaux sociaux auprès des 20 000 habitants d'une ville. 75 % des personnes interrogées déclarent les utiliser au moins une fois par jour, parmi elles, 20 % sont des lycéens. On sait de plus que tous les lycéens ont déclaré utiliser les réseaux sociaux au moins une fois par jour.

1. Quelle est la proportion des lycéens parmi l'ensemble des personnes interrogées ?

2. Dans cette ville, combien de personnes utilisent les réseaux sociaux au moins une fois par jour ?

3. Combien y a-t-il de lycéens dans cette ville ?

158 15min Augmentation du prix de l'électricité

Après une hausse de 15 % au 1er février 2023, les tarifs de l'électricité se voient augmenter de 10 % supplémentaires en août 2023.

1. Quels sont les coefficients multiplicateurs associés à ces deux augmentations ?

2. a. Déterminer le coefficient multiplicateur global, associé à la hausse du tarif de l'électricité au cours de l'année 2023.

b. En déduire l'évolution, en pourcentage, du tarif de l'électricité au cours de l'année 2023.

3. Le tarif de l'électricité avait déjà augmenté de 4 % pendant l'année 2022.

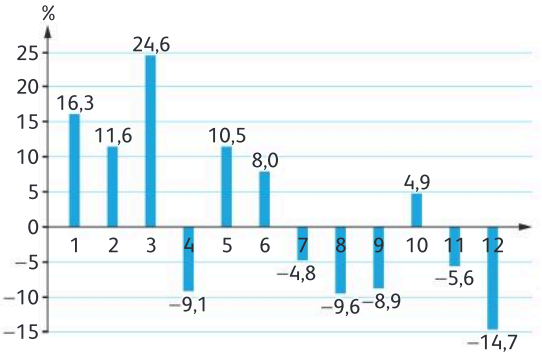
a. Quelle est l'augmentation totale, en pourcentage, du prix de l'électricité depuis fin 2021 ?

b. Déterminer, à 0,1 % près, la diminution nécessaire pour revenir au tarif de fin 2021 depuis celui de fin 2023.

SPECIMEN

159 15min Évolution du prix du pétrole brut

Le graphique ci-dessous donne l'évolution du prix moyen du baril de pétrole durant l'année 2022 (source : Insee).



1. Déterminer l'évolution globale du prix moyen du baril durant l'année 2022. *Arrondir à 0,1 % près.*
2. Un élève affirme que « durant les six premiers mois de l'année 2022, la hausse globale du prix moyen du baril de pétrole est de 61,9 % ». A-t-il raison ? Justifier.
3. Quelle devrait être l'évolution globale sur l'année 2023 pour compenser l'évolution observée en 2022 ?
4. Durant les années 2022 et 2023, on remarque une hausse globale d'environ 8,2 %. Quelle a été l'évolution durant l'année 2023 ?

160 15min Informations nutritionnelles

On s'intéresse aux informations nutritionnelles disponibles sur un sachet de pain de mie complet.

Ingrédients
Farine complète de **blé** 61 %, eau, huile de colza, sucre, levure

Informations nutritionnelles

Valeurs nutritionnelles moyennes pour :	100 g
Énergie	1100 kj (261 kcal)
Matières grasses dont acides gras saturés	4,9 g 1,2 g
Glucides dont sucres	42 g 5,9 g
Fibres alimentaires	6,5 g
Protéines	9,0 g
Sel	1,0 g

Poids net : 550 g

1. Déterminer la proportion, en pourcentage, de :
a. glucides dans le sachet ;
b. sucres parmi les glucides.
2. Déterminer, de deux façons, la proportion de sucres dans le sachet.
3. Quelle quantité de farine de blé a été utilisée pour la production de ce pain de mie ?
4. Quelle est la quantité de protéines contenue dans ce sachet ?

APPROFONDISSEMENT

161 Une histoire de moyenne

On cherche à retrouver les valeurs de trois nombres x, y et z. On dispose des informations suivantes :
- la moyenne des trois nombres est de 2 ;
- la moyenne de x et z est de -1 ;
- la moyenne de y et z est de -2.

Déterminer les valeurs de x, y et z.

162 Inconnues dans la moyenne

1. Lors du dernier devoir de mathématiques, la moyenne d'une classe de 32 élèves est de 11. Le professeur annonce que les filles ont eu 12,5 de moyenne, alors que celle des garçons est plus basse de deux points.
Combien y a-t-il de garçons dans la classe ?
2. Lors du devoir suivant, le professeur annonce que la moyenne de classe est de 12 et que les garçons ont une moyenne de 11.
Déterminer la moyenne des filles de la classe.

163 Effet sur la moyenne et la variance

On considère une série statistique de moyenne $\overline{x}$ et de variance V. Si on augmente toutes les valeurs de la série de $a > 0$, que dire de la moyenne et de la variance de cette nouvelle série statistique ?

164 Quantité offerte



Sur son emballage, un paquet de céréales affiche « +20 % gratuit ». Déterminer l'effet, en pourcentage, de cette offre sur le prix au kilo de ce paquet de céréales.

165 Augmentation d'un carré

On considère un carré dont on augmente la longueur des côtés de 10 %.
1. Après augmentation, quelle est l'évolution, en pourcentage, du périmètre ?
2. Même question pour l'évolution de l'aire ?
3. Application
De quel pourcentage doit-on augmenter la longueur d'un carré pour que son aire augmente de 69 % ?

166 Quelle est la meilleure offre ?



Un grand magasin affiche en vitrine deux offres différentes selon les produits. La première indique « deux produits identiques achetés le troisième offert », la seconde « un produit acheté, le deuxième identique à −50 % ». Quelle est l'offre la plus intéressante pour l'acheteur ?

SPECIMEN

167 Augmentation et diminution successives

On augmente le prix d'un article de t % puis on le diminue de t %. L'évolution globale est une baisse de 36 %. Déterminer t.

168 Augmentation des prix

Pour lutter contre l'inflation, un petit producteur local décide d'augmenter le prix du kilo de pommes de 10 %. Après une semaine, il réalise que ses recettes ont augmenté de 1,2 %.

1. Quelle est l'évolution, en pourcentage, de la quantité de pommes vendues ?

2. Il change d'avis et veut limiter la hausse à 5 % par rapport au prix initial. Quelle nouvelle évolution doit-il appliquer au prix du kilo de pommes ?



169 Seuil

1. Si on augmente un prix de 8 % par an, au bout de combien d'années ce prix aura-t-il doublé ?

2. Si on diminue un prix de 5 % par an, au bout de combien d'années son prix aura-t-il diminué de moitié ?

170 Taux d'évolution moyen

1. On souhaite résoudre le problème suivant : « Déterminer le pourcentage d'augmentation moyen annuel pour que le prix ait doublé par rapport à son prix initial au bout de 5 ans. »

a. Justifier que cela revient à résoudre l'équation $\left(1+\frac{t_m}{100}\right)^5 = 2$ avec pour inconnue le **taux d'évolution annuel moyen** t_m, c'est-à-dire le taux d'évolution du prix sur chacune de ces 5 années.

b. Soient a un réel positif et n un entier naturel. On admet que l'équation $x^n = a$ possède une unique solution positive notée $\sqrt[n]{a}$ (« racine n-ième de a »). Résoudre le problème posé.

2. Application

a. Déterminer le pourcentage de diminution moyen annuel pour que le prix ait été diminué de moitié par rapport à son prix initial au bout de 10 ans.

b. En trois ans, un article a vu son prix diminuer de 27,1 %. Déterminer le taux d'évolution annuel moyen du prix de cet article.

171 Élasticité-prix de la demande

La variation du prix d'un produit influence souvent la demande de ce produit par les consommateurs. En économie, c'est « l'élasticité » qui mesure cette influence. Plus précisément, lorsqu'un prix p passe d'une valeur p_1 à une valeur p_2 et que la demande d passe alors d'une quantité d_1 à une quantité d_2, l'élasticité-prix de la demande, notée e, est le quotient de la variation relative de la demande par la variation relative du prix.

$$e = \frac{\frac{d_2 - d_1}{d_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}}$$

L'élasticité-prix e donne l'évolution de la demande lorsque le prix augmente de 1 %.

Partie A. Signe de l'élasticité-prix de la demande

1. Recopier et remplacer les pointillés par « augmente » ou « diminue » dans les phrases suivantes.

a. On suppose que l'élasticité-prix de la demande est positive. Dans ce cas-là, lorsque le prix augmente, la demande …

b. On suppose que l'élasticité-prix de la demande est négative. Dans ce cas-là, lorsque le prix augmente, la demande …

2. On suppose que le prix d'un article augmente mais que l'élasticité-prix de la demande est égale à 0. Que peut-on en déduire ?

Partie B. Étude de quelques cas

1. Un producteur de fraises françaises constate que, lorsque le prix d'une barquette de 500 g passe de 5 € à 6 €, ses ventes, initialement de 30 tonnes, diminuent de 25 %.

a. Calculer la variation relative du prix lorsqu'il passe de 5 € à 6 €.

b. En déduire l'élasticité-prix de la demande des fraises.

c. Calculer le chiffre d'affaires du producteur lorsque le prix de la barquette est de 5 €, puis de 6 €. L'augmentation du prix de la barquette de fraises est-elle judicieuse ?

2. Le tableau ci-dessous recense le prix moyen d'un litre d'essence SP98 et la dépense annuelle des ménages correspondante.

	2011	2012
Prix moyen d'un litre de SP98 (en euro)	1,55	1,63
Dépense des ménages en SP98 (en million d'euros)	14 808	14 566

a. Calculer l'élasticité-prix de la dépense en essence SP98 entre 2010 et 2011.

b. Interpréter le résultat obtenu.

SPECIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

Maîtriser l'essentiel

172 **Compréhension d'énoncé**

On considère l'énoncé suivant.

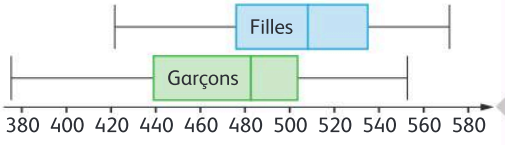
On donne ci-dessous les résultats des garçons de 50 pays de l'OCDE dans le test PISA « résoudre collaborativement un problème ».

Notes	[370 ; 400[	[400 ; 430[	[430 ; 460[
Effectif	1	10	10
Notes	[460 ; 490[	[490 ; 520[	[520 ; 550[
Effectif	14	10	5

I. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

II. On résume les résultats des filles dans cette épreuve par les indicateurs $\bar{x} \approx 502{,}7$ et $\sigma \approx 42{,}6$.

On donne de plus les diagrammes en boite suivants.



Comparer les deux séries.

1. Pour chaque mot surligné, indiquer une méthode.
2. Répondre aux questions de l'exercice.

173

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		4				2		1	9
2				3	5	1		8	
3	3	1			9	4	7		
4		9	4						7
5									
6	2						8	9	
7			9		2			4	1
8	4	2		1		9			
9	1	6		8					

1. Reproduire la grille de Sudoku ci-dessus.
2. Pour chaque question, inscrire le chiffre indiqué à la position $(x ; y)$ où x correspond au numéro de la colonne et y celui de la ligne.

a. Une valeur augmente de 20 % et vaut 74,4. Inscrire le chiffre des dizaines de la valeur de départ en $(9 ; 2)$.

b. Une valeur augmente de 25 % puis baisse de 25 %. Inscrire en $(4 ; 7)$ le chiffre des centièmes du taux d'évolution global exprimé en %.

c. Inscrire en $(8 ; 9)$ le chiffre des unités du taux d'évolution réciproque d'une baisse de 15 % exprimé en %.

3. Terminer le Sudoku.

Aller plus loin

174 Un fabricant de parfum utilise une machine pour remplir ses flacons dont le volume affiché est 100 mL. Pour contrôler la qualité de la production de cette machine, on prélève 500 flacons et on relève le volume de liquide qu'ils contiennent.

On obtient les résultats suivants.

Volume (en mL)	97	98	99	100	101	102
Effectif	21	24	92	244	107	12

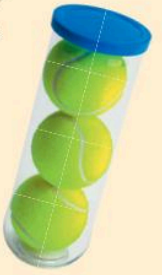
La machine est jugée défectueuse si moins de 95 % des flacons testés ont un volume dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

La machine est-elle défectueuse ?

175 PRISE D'INITIATIVES

On place trois balles de tennis dans une boîte cylindrique tout juste assez grande pour les contenir. Sachant que le diamètre d'une balle de tennis est de 6,35 cm, déterminer le pourcentage de volume de la boîte occupé par les trois balles.

Arrondir à 0,1 % si nécessaire.



Aide

Pour un rayon r et une hauteur h, on a les formules suivantes.

- Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$
- Volume d'un cylindre : $V = \pi \times r^2 \times h$

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2098

176 PRISE D'INITIATIVES

Lors d'un exercice, le professeur de mathématiques annonce que dans la classe, qui compte 31 élèves, la moyenne d'âge est d'environ 15,03 ans. Sacha demande alors l'âge de son professeur. Ce dernier lui répond qu'en comptant son âge, la moyenne de la classe passerait à 15,43 ans. Déterminer l'âge du professeur de Sacha.

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2099

177 1. Lors d'une hausse de 20 %, une production est augmentée de 10 tonnes.
Déterminer la production avant et après évolution.

2. Lors d'une baisse de 10 %, une production diminue de 20 tonnes.
Déterminer la production avant et après évolution.

3. Une production augmente de 20 % en deux ans. Elle a augmenté de 10 % sur la première année.
Déterminer le taux d'évolution sur la deuxième année.

SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

Indice de Gini

Objectif
Utiliser un tableur pour construire un indicateur graphique.

Dans un article de 2018, on peut lire sur le site *inegalites.fr* le titre suivant.

« Les inégalités de niveau de vie, en voie de stabilisation ? »

On souhaite comprendre les indicateurs permettant de mesurer ces inégalités.

Ouvrir la feuille de calcul

Le tableau ci-contre fait état de la répartition du niveau de vie en France pour les années 2003 et 2016.

Le niveau de vie est égal au revenu disponible du ménage divisé par le nombre d'unités de consommation (uc).

- 1 uc au premier adulte du ménage.
- 0,5 uc aux autres personnes de 14 ans ou plus.
- 0,3 uc aux enfants de moins de 14 ans.

En 2016, les individus dont le niveau de vie est inférieur au 1er décile, disposent d'un niveau de vie moyen de 8 380 €.

	A	B	C
1	Niveau de vie moyen par décile		
2		en euro	
3		2003	2016
4	Niveau de vie < 1er décile (A)	8 230	8 380
5	Niveau de vie entre le 1er et le 2e déciles	11 550	12 550
6	Niveau de vie entre le 2e et le 3e déciles	13 730	15 060
7	Niveau de vie entre le 3e et le 4e déciles	15 630	17 300
8	Niveau de vie entre le 4e et le 5e déciles	17 500	19 430
9	Niveau de vie entre le 5e et le 6e déciles	19 540	21 690
10	Niveau de vie entre le 6e et le 7e déciles	21 950	24 290
11	Niveau de vie entre le 7e et le 8e déciles	25 170	27 650
12	Niveau de vie entre le 8e et le 9e déciles	30 330	33 220
13	Niveau de vie > 9e décile (B)	49 890	56 230
14	Ensemble	21 350	23 580
15	Rapport (B)/(A)		

Partie A Calcul d'un niveau de vie

En 2016, un couple et deux enfants, âgés de 8 ans et 15 ans, dispose d'un revenu mensuel de 2 300 €.

Calculer le niveau de vie annuel de ce ménage.

Partie B 1re mesure d'inégalité

1. Interpréter la valeur de la cellule C8 ?

2. Quelle formule peut être saisie en B15 et en C15 ?

3. Comparer la répartition du niveau de vie en France en 2003 et en 2016 à l'aide des valeurs obtenues.

Partie C 2e mesure d'inégalité

Ouvrir l'onglet « Courbe ».

	A	B	C	D	E	F
1				France égalitaire	France 2016	
2	Décile	Niveau de vie en €	Part cumulée en % de la population	Part cumulée en % du niveau de vie moyen	Niveau de vie moyen cumulé en €	Part cumulée en % du niveau de vie moyen
3			0,00%	0,00%	0	0,00%
4	D1	8 380	10,00%			
5	D2	12 550	20,00%			
6	D3	15 060	30,00%			
7	D4	17 300	40,00%			
8	D5	19 430	50,00%			
9	D6	21 690	60,00%			
10	D7	24 290	70,00%			
11	D8	27 650	80,00%			
12	D9	33 220	90,00%			
13	D10	56 230	100,00%			

On appelle **courbe de Lorenz** la courbe qui s'obtient en reliant les points ayant pour abscisses les fréquences cumulées de la population et pour ordonnées les fréquences cumulées du niveau de vie.

1. Dans une France où les biens seraient équitablement répartis, combien 10 % de la population détiendrait-elle de parts de niveau de vie ? Compléter la colonne D.

2. Compléter les colonnes E et F en détaillant une formule possible pour les cellules E4 et F4.

3. Combien les 10 % de la population la moins riche détiennent-ils de parts du niveau de vie en 2016 ?

4. Construire la courbe de Lorenz du niveau de vie de la France égalitaire et de la France de 2016.

Indice de Gini γ

L'aire entre la courbe rouge et la courbe bleue s'appelle la « surface de concentration ». On donne :

$$\gamma = \frac{\text{surface de concentration}}{\text{surface sous la courbe rouge}}$$

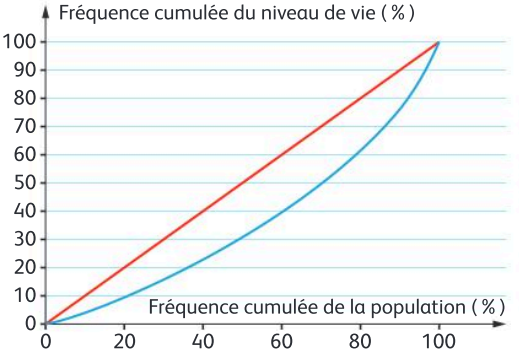
5. Comment varie γ lorsque la courbe bleue :

a. se rapproche de la courbe rouge ?

b. s'éloigne de la courbe rouge ?

Donner un encadrement de γ.

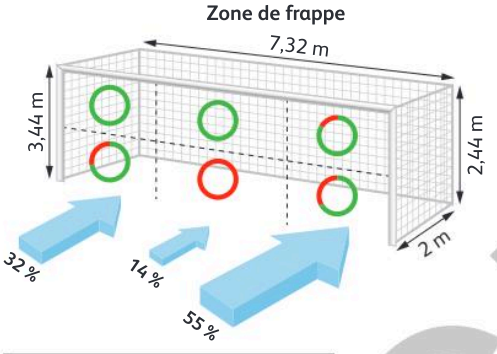
6. L'indice de Gini du niveau de vie en France s'élevait à environ 0,28 pour l'année 2016 contre 0,27 en 2003. Le titre de l'article peut-il être remis en question ?



SPECIMEN

TP1 *Big data* et sport : les penaltys

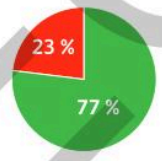
L'arrivée des statistiques dans le sport a révolutionné les performances des athlètes, les tactiques des entraîneurs, les retransmissions d'événements sportifs… Des sociétés se sont emparées des *big data* (mégadonnées en français) et vendent leurs produits au meilleur prix.
Un site de pari sportif a demandé à l'une de ces sociétés de lui fournir un résumé statistique de chaque tireur de penaltys de ligue 1 pour une mise en ligne sur leur plateforme Internet.
Les infographistes ont donné la maquette ci-dessous pour présenter les données.



Ainsi que les informations suivantes.

Taux de réussite du tireur

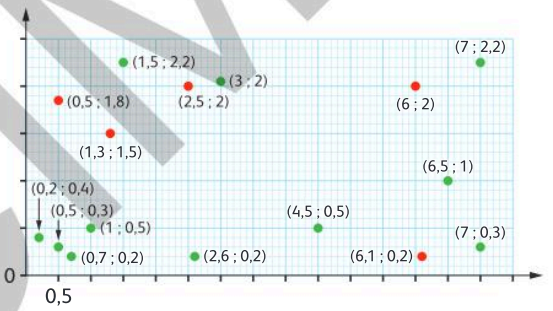
Position moyenne des tirs :
(3,22 ; 1,51)
25 % des tirs ont une hauteur inférieure à : 1,1 m



Proportion de tirs en pourcentage sur l'ensemble.

Tirs (R)	Gauche	Centre	Droite	Total
Haut	18 (18)	9 (9)	27 (23)	54 (50)
Bas	14 (9)	5 (0)	27 (18)	46 (27)
Total	32 (27)	14 (9)	54 (41)	100 (77)

(R) Proportion de tirs réussis sur l'ensemble.
On demande à un stagiaire de tester cette maquette sur un tireur du championnat.
On dote une cage de football d'un repère dont l'origine est le coin inférieur gauche et l'unité le mètre.
On donne ci-dessous l'ensemble des penaltys de ce joueur sous la forme d'un nuage de points.
Un point représente la position du ballon lorsqu'il entre dans la cage.
Il est vert si le but est marqué et rouge sinon.



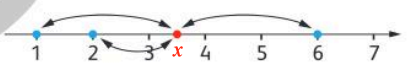
À l'écrit ou à l'oral, produire en binôme ou en groupe une présentation des statistiques de ce tireur de penaltys en utilisant la maquette.

TP2 Variance et polynôme

On considère la série de valeurs 1 ; 2 ; 6.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et la variance V de cette série.

2. On considère la fonction f qui, à tout réel x, associe la moyenne des carrés des écarts entre x et les valeurs de la série.



a. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de x.

b. Montrer que $f(x)=(x-3)^2+\frac{14}{3}$.

3. On s'intéresse à la représentation graphique de la fonction étudiée.

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Que semble représenter la moyenne $\overline{x}$ et la variance V pour la fonction f ?

4. On admet que toute fonction de la forme x^2+bx+c admet un minimum β atteint en $x=\alpha$ avec α et β deux nombres réels tels que $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2+\beta$.
Démontrer que la moyenne de deux nombres réels x_1 et x_2 minimise la fonction f mesurant la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
On pourra s'inspirer des questions précédentes.

SPECIMEN

CHAPITRE

12 Probabilités Probabilités conditionnelles

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 Dénombrer à l'aide de tableaux et d'arbres
- CAPACITÉ 2 Établir une loi de probabilité, calculer des probabilités
- CAPACITÉ 3 Calculer des probabilités conditionnelles
- CAPACITÉ 4 Construire, interpréter et utiliser un arbre pondéré
- CAPACITÉ 5 Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$



Au fil du temps

Le *Livre des jeux de hasard* de Jérôme Cardan (mathématicien italien, 1501-1576) est le premier à proposer quelques éléments de probabilités. Puis Blaise Pascal (mathématicien et philosophe français, 1623-1662) introduit le concept de probabilité dans sa correspondance avec Pierre de Fermat, alors que C. Huygens (mathématicien néerlandais, 1629-1695) publie le premier traité de probabilités. Les XVII^{e} et XVIII^{e} siècles verront de nombreux mathématiciens enrichir la théorie (De Moivre, Leibniz, Bayes, Markov, Tchebychev, etc.). C'est le mathématicien russe soviétique A. Kolmogorov qui édifiera la théorie moderne des probabilités en 1933.

CORRIGÉ

Des maths partout !

Les probabilités sont nées avec les jeux de hasard. Les jeux d'argent et de hasard génèrent en France un chiffre d'affaires d'environ 11 milliards d'euros, les ménages y consacrant en moyenne un budget annuel de 220 € (données 2021).



Course hippique en Suède, en juin 2022

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2100

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Vocabulaire

Une urne contient 5 boules blanches, 3 noires. L'expérience consiste à tirer deux boules successivement et sans remise, on note les couleurs obtenues dans l'ordre de leur apparition

1. Décrire l'univers Ω des issues possibles (*on pourra utiliser un tableau à double entrée*).

2. On considère les événements :

A : « une boule blanche a été tirée en premier » ;

B : « les deux boules ont la même couleur ».

a. Décrire les issues réalisant l'événement A, l'événement B.

b. Quelles issues réalisent A ET B ? A OU B ?

C Fréquences et probabilités

Quand on lance une punaise, elle tombe sur la pointe ou sur le dos. On note *Oui* si la punaise tombe sur la pointe.

1. Au bout de 5 lancers, une personne a noté que la punaise est tombée 3 fois sur la pointe et 2 fois sur le dos.
Quelle est la fréquence de *Oui* sur les 5 lancers ?

2. Après 10 lancers, elle a obtenu 4 *Oui*. Quelle est la fréquence de *Oui* sur les 10 lancers ?

3. Après 900 lancers, elle obtient le graphique ci-dessous :



a. Quel phénomène semble se produire pour la fréquence des *Oui* ?

b. Une autre personne lance la punaise. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur la pointe ?

D Calculer une probabilité

On admet qu'à la naissance un enfant est de sexe masculin avec une probabilité de 0,5. Un couple souhaite avoir deux enfants.

1. Compléter le tableau ci-dessous décrivant les compositions possibles de la fratrie.

Sexe 1er enfant / Sexe 2e enfant	M	F
M		
F		

2. Calculer la probabilité des événements suivants :

a. le couple a deux garçons ;

b. le couple a au moins une fille.

SPECIMEN

automatismes

Automatismes transversaux

Pour les exercices 1 à 4, effectuer mentalement les calculs demandés.

1 En utilisant tout, ou une partie, des nombres suivants, donner un calcul valant :

100	7	2	6

1. 88 **2.** 321 **3.** 714

2 Effectuer les calculs suivants.

1. $\frac{1}{2}-4$ **2.** $3\times\frac{7}{6}$ **3.** $110\times\frac{3}{2}$

3 Simplifier la fraction $\frac{220}{120}$.

4 En utilisant la distributivité, calculer les produits suivants.

1. 9×24 **2.** 12×203 **3.** 7×97

5 Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$.

1. $\sqrt{50}+\sqrt{2}$ **2.** $\sqrt{75}-3\sqrt{27}$

6 Donner le résultat sous la forme irréductible.

1. $\frac{1}{3}\left(6-\frac{1}{4}\right)$ **2.** $\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}{5-\frac{1}{4}}$

7 On considère l'expression $A(x)=2(x-2)-(x-2)^2$.

1. Développer $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. Résoudre l'équation $A(x)=0$.

8 Montrer que pour tout réel $x\neq1$:

$$4+\frac{1}{1-x}=\frac{5-4x}{1-x}$$

9 Factoriser les expressions suivantes.

1. $4x^2-8x$

2. $(6x-4)(x-5)+(6x-4)(8-3x)$

10 Résoudre les équations suivantes.

1. $2x-7=5$ **2.** $5x+7=2x-2$

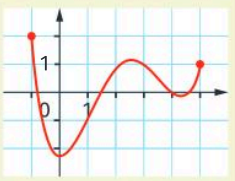
11 Résoudre les équations suivantes.

1. $2x(6-2x)=0$ **2.** $(5x-10)(x+3)=0$

12 On donne ci-contre la courbe d'une fonction.
Par lecture graphique, déterminer :

1. $f(-1)$, puis $f(1)$;

2. les solutions de l'équation $f(x)=1$ sur $[2,5;5]$.



Automatismes préparatoires au chapitre

Pour les exercices 13 à 15, effectuer mentalement les calculs demandés.

13 **1.** 25 % de 16 **2.** 30 % de 180
3. 10 % de 24 **4.** 50 % de 0,4

14 **1.** $\frac{1}{4}$ de 24 **2.** Les deux tiers de 27
3. Un dixième de 4 **4.** La moitié de 0,35

15 Déterminer la valeur manquante.

Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3	Valeur 4	Total
0,1	0,25	0,45		1

16 Effectuer les opérations suivantes.

1. $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$ **2.** $\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}$ **3.** $1-\frac{27}{50}$

17 Effectuer les opérations suivantes.

1. $0,2\times0,8+0,1\times0,9$ **2.** $0,25\times0,8+0,4\times0,5$

18 **Calculer des proportions**

On donne la composition d'un groupe de 50 élèves sur un choix d'activités.

	Musée	Sport	Jeux de société
Classe A	5	5	5
Classe B	5	10	20

1. Quelle est la proportion d'élèves du groupe provenant de la classe A ?

2. Quelle est la proportion d'élèves de la classe A parmi ceux voulant aller au musée ?

3. Quelle est la proportion d'élèves de la classe B parmi ceux voulant pratiquer un sport ?

4. Quelle est la proportion d'élèves de la classe A parmi ceux voulant jouer à un jeu de société ?

19 Lors d'une enquête réalisée auprès de 75 adolescents, 21 d'entre eux déclarent regarder la télévision moins d'une heure par jour ; 36 entre une et deux heures ; 12 entre deux et trois heures ; les autres plus de trois heures.

1. Calculer le pourcentage d'élèves qui regardent la télévision moins d'une heure par jour.

2. Calculer le pourcentage d'élèves qui regardent la télévision plus de trois heures par jour.

3. Calculer le pourcentage d'élèves qui regardent la télévision au plus trois heures par jour.

SPECIMEN

activités

1 Remobilisation du vocabulaire

Objectif
Remobiliser le vocabulaire des événements, et le calcul de probabilités

On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12.
On s'intéresse aux événements suivants :
- D : « obtenir un multiple de deux » ;
- T : « obtenir un multiple de trois ».

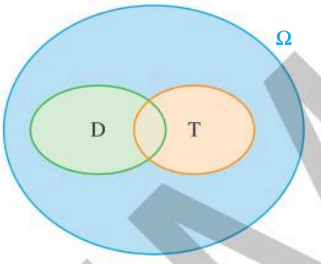


1 Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

2 Décrire les événements D et T ci-dessus à l'aide des issues qui les composent, puis calculer leurs probabilités.

3 **a.** Décrire l'événement $\overline{\text{T}}$ à l'aide d'une phrase, puis à l'aide des issues qui le composent.
b. Calculer $P\left(\overline{\text{T}}\right)$

4 **a.** Recopier et compléter le schéma ci-contre avec les issues correspondantes.
b. Donner les issues qui composent $\text{D} \cap \text{T}$ puis calculer sa probabilité.
c. Donner les issues qui composent $\text{D} \cup \text{T}$ puis calculer sa probabilité.



5 Rappeler l'égalité reliant $P(\text{D} \cup \text{T})$, $P(\text{D})$, $P(\text{T})$ et $P(\text{D} \cap \text{T})$.
La vérifier avec les valeurs obtenues précédemment.

Rappel
$\overline{\text{T}}$ est l'événement **contraire de T**, il contient toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans T.
$\text{D} \cap \text{T}$ est l'événement formé des éléments appartenant **à la fois à D et à T.**
$\text{D} \cup \text{T}$ est l'événement formé des éléments appartenant **à D ou à T.**

2 Répartition des élèves d'un lycée

Objectif
Découvrir la notion de probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé d'effectifs.

Le tableau ci-contre donne la répartition des 1 230 élèves d'un lycée en fonction du sexe et du niveau de classe de l'élève.
On choisit un élève du lycée au hasard.
On note respectivement S, P, T et F les événements « l'élève est en Seconde », « l'élève est en Première », « l'élève est en Terminale » et « l'élève est une fille ».
Les probabilités seront données sous forme fractionnaire.

	Fille	Garçon
Seconde	187	233
Première	207	178
Terminale	212	213

1 **a.** Calculer la probabilité des événements S, P, T et F.
b. Décrire par une phrase l'événement $\text{S} \cap \text{F}$ et calculer sa probabilité.

2 On choisit un élève au hasard parmi les élèves de Seconde.
a. Combien d'élèves peuvent être tirés au sort ?
b. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille. On la note $P_{\text{S}}(\text{F})$.
c. Exprimer $P_{\text{S}}(\text{F})$ en fonction de $P(\text{S})$ et $P(\text{S} \cap \text{F})$.

3 On choisit un élève du lycée au hasard.
a. Calculer la **probabilité conditionnelle** $P_{\text{F}}(\text{T})$ que cet élève soit en terminale sachant que c'est une fille.
b. Exprimer $P_{\text{F}}(\text{T})$ en fonction de $P(\text{F})$ et $P(\text{F} \cap \text{T})$.

4 **a.** Décrire par une phrase l'événement $P_{\text{T}}\left(\overline{\text{F}}\right)$ et calculer sa probabilité.
b. Exprimer $P_{\text{T}}\left(\overline{\text{F}}\right)$ en fonction de $P(\text{T})$ et $P\left(\text{T} \cap \overline{\text{F}}\right)$.

Info
2 b. $P_{\text{S}}(\text{F})$ est la probabilité que l'élève soit une fille **sachant** qu'on l'a choisi parmi les élèves de seconde. C'est la **probabilité conditionnelle** de F **sachant que** S est réalisé.
$P_{\text{S}}(\text{F})$ se lit « probabilité de F sachant S ».

SPECIMEN

Cours

1 Vocabulaire des événements

a Univers, issues et événements

Définition

• Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles sans savoir à l'avance celui que l'on obtiendra.

• Un résultat possible d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.

• L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers**. On le note souvent Ω (*oméga*).

• Un **événement** est une partie (ou sous-ensemble) de l'univers.

• Un **événement élémentaire** est un événement formé d'une seule issue.

• Lorsqu'on exécute l'expérience aléatoire, et que le résultat obtenu appartient à un événement, on dit que cet **événement** est **réalisé**.

Exemple

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire.

• L'univers est l'ensemble :
$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

• A « obtenir un résultat pair » est un événement, et on écrit :
$A = \{2;4;6\}$

Si on effectue le lancer et que le résultat est 4, l'événement A est réalisé ; si le résultat est 1, A n'est pas réalisé.

Remarques

• Un **événement impossible** est un événement qui ne peut pas se réaliser. Il ne contient aucune issue. On le note $\varnothing$.

• Un **événement certain** est un événement qui est toujours réalisé. Il contient tous les éléments de l'univers.

Définition

Soient A et B deux événements.

• A et B sont **complémentaires** lorsque A est formé de tous les éléments de l'univers qui ne sont pas dans B.

On dit aussi que B est l'événement **contraire** de A, on le note $\overline{A}$.

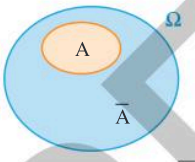
• A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun : ils ne peuvent être réalisés simultanément.

Exemple

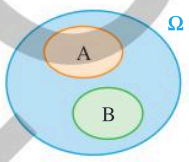
Dans le lancer d'un dé à six faces :

• les événements $C = \{1;2\}$ et $D = \{3;4;5;6\}$ sont complémentaires. On dit aussi que D est le contraire de C. On écrit :
$D = \overline{C}$

• les événements $E = \{3;5\}$ et $F = \{1;6\}$ sont incompatibles : ils n'ont aucune issue commune. Ils ne peuvent pas être réalisés simultanément lors d'un même lancer.



A et son contraire $\overline{A}$



A et B incompatibles

Définition

On appelle **cardinal** d'un ensemble A et on note $\text{Card}(A)$ le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Exemple

Dans l'exemple précédent, $\text{Card}(\Omega) = 6$ et $\text{Card}(A) = 3$.
On précise que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

b Intersection et réunion de deux événements

Définition

Soient A et B deux événements.

• **L'intersection** de A et de B, notée $A \cap B$, est l'événement formé des issues qui appartiennent à la fois à **A et à B**.

• **La réunion** de A et B, notée $A \cup B$, est l'événement formé des issues qui appartiennent à **A ou à B**.

Exemple

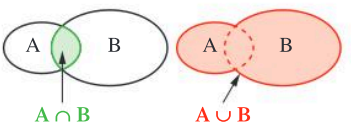
Dans le lancer d'un dé à six faces, soient $G = \{1;2;3\}$ et $H = \{3;4\}$:

• $F \cap G = \{3\}$

• $F \cup G = \{1;2;3;4\}$

Remarque

Si A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \varnothing$.



SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Dénombrer à l'aide de tableaux et d'arbres

Énoncé Le restaurant *À table au hasard* propose une expérience inédite : chaque client reçoit un menu de façon aléatoire, en lançant deux dés tétraédriques dont on fait la somme des résultats obtenus.

1. a. Recopier et compléter le tableau à double entrée ci-contre.

b. En déduire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

c. Préciser le nombre d'issues qui le composent.

2. Le restaurant propose deux entrées : asperges (A) et betteraves (B) ; deux plats : couscous (C) et dinde (D) ; deux desserts : éclair (E) et salade de fruit (F).

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

b. Le restaurant pourra-t-il proposer tous les menus possibles à partir de l'expérience aléatoire choisie ?

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Solution rédigée

1. a. On complète le tableau en additionnant à chaque fois les valeurs indiquées en ligne et en colonne.

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

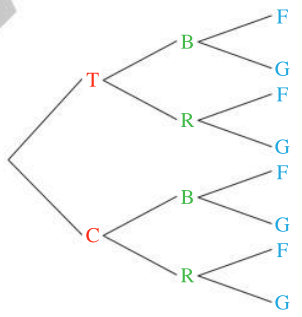
b. À l'aide du tableau on obtient toutes les issues de l'univers :

$$\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8\}$$

c. Il y a 7 issues dans cette expérience aléatoire.

2. a. On modélise la situation avec un arbre à trois niveaux :

- Le premier niveau correspond aux possibilités pour l'entrée ;
- Le deuxième niveau correspond aux possibilités pour le plat ;
- Le troisième niveau correspond aux possibilités pour le dessert.



b. En s'aidant de l'arbre, on dénombre 8 menus différents ($2 \times 2 \times 2$). Or, on a vu dans la question **1. b.** qu'il n'y a que 7 issues possibles pour l'expérience aléatoire. Tous les menus ne pourront donc pas être proposés.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 398 Voir exercices similaires nos 38 à 42

20 Un sac contient trois billes de même taille mais de couleurs différentes : une rouge, une jaune et une verte. On tire une bille, on note sa couleur puis on la remet dans le sac. On répète alors l'expérience une seconde fois.

1. a. Décrire, à l'aide d'un arbre, l'univers de cette expérience aléatoire.

b. Combien d'issues le composent ?

2. On considère l'événement « le tirage comporte au moins une bille jaune ». Combien d'issues composent cet événement ?

21 Dans un sac, on tire un jeton parmi trois numérotés de 1 à 3, puis on note son numéro avant de le replacer dans le sac. On répète l'expérience une seconde fois et on s'intéresse au produit des résultats obtenus. Décrire, à l'aide d'un tableau, l'univers associé à cette expérience aléatoire.

22 Un tiroir contient deux types de chaussettes en grande quantité, des blanches et des noires.

1. On prend au hasard une première chaussette, on note sa couleur, puis on en prend une seconde et on note sa couleur également.

a. Décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.

b. Combien d'issues permettent d'avoir une paire de même couleur ?

2. Combien de chaussettes faut-il continuer à prendre pour être certain d'avoir une paire de même couleur ?

23 Des joueurs s'affrontent dans un jeu d'adresse où ils lancent deux fois une fléchette sur une cible pour marquer 0, 5, 10 ou 20 points à chaque lancer. Pour calculer leur score, ils additionnent les points obtenus à chaque lancer.

Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.

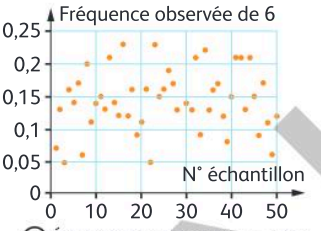
SPÉCIMEN

Cours

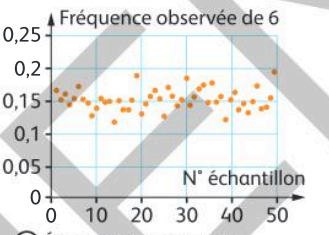
2 Probabilités sur un ensemble fini

a Fluctuation d'échantillonnage et loi des grands nombres

On considère l'expérience aléatoire « lancer un dé équilibré à six faces » et on s'intéresse à l'apparition d'un six.
On réalise expérimentalement 100 fois cette expérience, et on renouvelle 50 fois ces 100 lancers. Puis on renouvelle 50 fois la réalisation de 1 000 lancers. Les résultats sont résumés dans les deux graphiques ci-contre.
Les fréquences observées « fluctuent » autour de $\frac{1}{6}$ (environ 0,167) : c'est la **fluctuation d'échantillonnage**.
Loi des grands nombres : Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, sauf exception, la fréquence observée d'un événement est proche d'une valeur théorique appelée probabilité.



① Échantillons de taille $n = 100$



② Échantillons de taille $n = 1\,000$

b Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini et est formé de n issues : $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \ldots ; e_n\}$.

Définir une **loi de probabilité** sur Ω c'est associer à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ sa probabilité p_i.

Issue e_i	e_1	e_2	…	e_n
Probabilité p_i	p_1	p_2	…	p_n

On a $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Remarque

Lorsque tous les événements élémentaires formant l'univers Ω ont la **même probabilité**, on dit qu'on est en **situation d'équiprobabilité** sur Ω.
Les expressions comme « indiscernables au toucher », « dé équilibré », « pièce équilibrée » sont des indications de situations d'équiprobabilité.

Propriétés
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.
- ***En situation d'équiprobabilité,*** c'est-à-dire lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple

Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher. Trois jetons portent le n° 1, deux portent le n° 2 et les autres portent le n° 3. On tire un jeton au hasard et on note son numéro.
La loi de probabilité est :

Issue	1	2	3
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

Soit A l'événement : « l'issue est impaire ». La probabilité de A est :

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, puisque les jetons sont « indiscernables au toucher », tous ont la même probabilité d'être tirés : $\frac{1}{10}$.
On est en situation d'équiprobabilité.

c Calculs de probabilités

Propriétés Pour tous événements A et B, on a :
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Cas particulier

Si A et B sont deux événements incompatibles, on a alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemple

On lance un dé équilibré numéroté de 1 à 6. Soient les événements A « obtenir un résultat pair » et B « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
- A et B ne sont pas incompatibles et $A \cap B = \{2 ; 4\}$, donc :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

- La probabilité de ne pas obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 est :

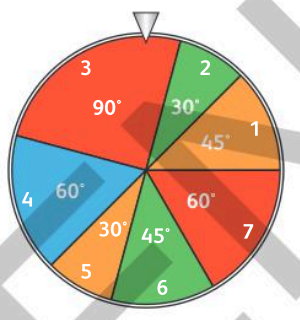
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Établir une loi de probabilité, calculer des probabilités

Énoncé On fait tourner la roue représentée ci-contre, formée de sept secteurs numérotés de 1 à 7 et colorés en rouge, bleu, orange et vert.
On admet que la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur est proportionnelle à la mesure de l'angle du secteur.



1. a. Montrer que la probabilité p_1 que la roue s'arrête sur le secteur 1 est égale à 0,125.
b. Établir la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
2. Soient A l'événement « la roue s'arrête sur un secteur rouge » et B l'événement « la roue s'arrête sur un secteur à numéro pair ».
a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.
b. Justifier que les événements A et B sont incompatibles.
c. Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

Solution rédigée

1. a. La somme de tous les angles vaut 360° et la probabilité que la roue s'arrête sur le secteur 1 est proportionnelle à la mesure de son angle.
Donc $p_1 = \frac{45}{360} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

b. Chaque secteur représente une issue. On calcule la probabilité de chaque événement élémentaire comme pour la question **1. a.**
On obtient le tableau suivant.

Secteur	1	2	3	4	5	6	7
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$

Point méthode
1. b. Pour établir une loi de probabilité, il faut déterminer tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ et calculer la probabilité p_i de chacun.

2. a. Les secteurs rouges sont les secteurs 3 et 7. Ainsi, on a :
$$P(A) = P(\{3\}) + P(\{7\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$
Les secteurs pairs sont les secteurs 2 ; 4 ; 6. Ainsi, on a :
$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Point méthode
2. a. Pour calculer la probabilité d'un événement A, il faut déterminer tous les événements élémentaires qu'il contient et calculer la somme de leurs probabilités.

b. Aucun secteur n'est à la fois rouge et pair, donc les événements A et B sont incompatibles.
c. $A \cup B$: « la roue s'arrête sur un secteur rouge ou sur un secteur pair ».
A et B étant incompatibles, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{3}{8} = \frac{19}{24}$.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 398 Voir exercices similaires nos 43 à 50

24 Une cible est composée de quatre carrés de côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 dm. Un joueur lance un projectile qui touche toujours la cible et la probabilité de toucher un carré est proportionnelle à son aire. Toucher le carré bleu rapporte 10 points, le carré vert 4 points ; sinon on perd 5 points. Le joueur lance un seul projectile et on s'intéresse au gain ou à la perte du joueur.



1. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'un gain supérieur à 2.

25 On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir 1 est égale à 0,2 et celle d'obtenir 6 est égale à 0,4. Les autres faces ont toutes la même probabilité d'apparition.
On considère les événements :
A : « le numéro de la face obtenue est pair » ;
B : « le numéro de la face obtenue est un nombre premier ».
1. Donner la loi de probabilité de l'expérience.
2. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
3. En déduire $P(A \cup B)$.

SPÉCIMEN

Cours

3 Probabilités conditionnelles

a Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω.

Définition On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques

- Dans le cas d'un univers fini *où les issues sont équiprobables*, on peut noter : $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$
- On admet que P_A est une probabilité, elle suit donc les règles établies pour les probabilités :
  - $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$
  - $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- On déduit de la définition les relations ci-dessus :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exemple

On choisit au hasard un élève d'une classe de seconde dont le tableau ci-dessous donne le genre du dernier livre lu.

	Roman	Manga/BD	Total
Filles	7	10	17
Garçons	3	16	19
Total	10	26	36

- La probabilité que l'élève ait lu un roman (R) sachant que c'est une fille (F) est :

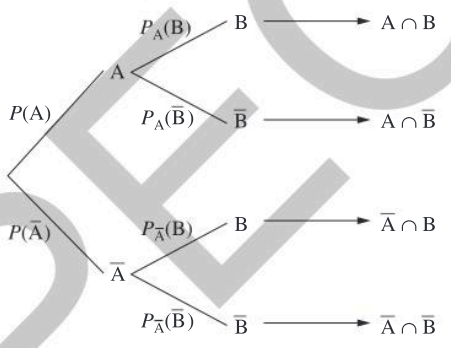
$$P_F(R) = \frac{P(F \cap R)}{P(F)} = \frac{7}{17}$$

- La probabilité que l'élève soit une fille (F) sachant que l'élève a lu un roman (R) est :

$$P_R(F) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{7}{10}$$

b Arbres pondérés et probabilités conditionnelles

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire mettant en jeu deux événements A et B de probabilités non nulles, on peut modéliser la situation par un **arbre pondéré** (ou arbre de probabilité) à deux niveaux.



Définition On appelle **chemin** une succession de branches, partant de l'origine jusqu'à une extrémité et **nœud** l'intersection entre plusieurs branches.

Remarques

- Les probabilités conditionnelles se lisent sur les branches de second niveau : on y indique la probabilité de l'événement à l'extrémité de la branche conditionnée par l'événement au nœud de la branche (ici A ou $\overline{A}$).
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

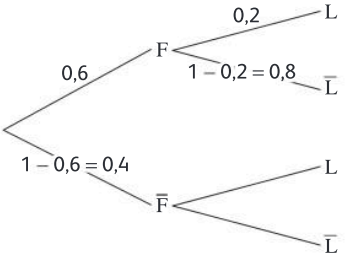
Propriété La probabilité d'un chemin complet est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.

Exemple

Dans une classe de seconde, 60 % des élèves sont des filles (F). De plus, 20 % des filles portent des lunettes (L).

- La probabilité qu'un élève soit une fille est de $P(F) = 0{,}6$.
- La probabilité conditionnelle de L sachant F est $P_F(L) = 0{,}2$.

Cette situation peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



La probabilité qu'un élève soit une fille (F) et porte des lunettes (L) est :

$$P(F \cap L) = P(F) \times P_F(L) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$$

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Calculer des probabilités conditionnelles

Énoncé Une enquête est menée auprès de 1 000 élèves d'un lycée. Le but est de déterminer s'ils sont, ou non, sensibilisés à l'écologie. On choisit un élève au hasard parmi ces 1 000 élèves, on note les événements :

S : « l'élève est sensibilisé à l'écologie » et E : « l'élève a des gestes éco-responsables ».

Les résultats de l'enquête sont donnés dans le tableau ci-contre.

	S	$\overline{\text{S}}$	Total
E	480	20	500
$\overline{\text{E}}$	320	180	500
Total	800	200	1 000

1. Calculer la probabilité des événements S et E.

2. a. Traduire par une phrase l'événement $\text{S} \cap \text{E}$, puis calculer sa probabilité.

b. En déduire la probabilité $P_{\text{S}}(\text{E})$.

3. On choisit un élève ayant des gestes éco-responsables. Calculer la probabilité qu'il soit sensibilisé à l'écologie.

4. Calculer la probabilité que l'élève ait des gestes éco-responsables sachant qu'il n'est pas sensibilisé à l'écologie.

Solution rédigée

1. Il y a 800 élèves sensibles à l'écologie sur les 1 000 interrogés, ainsi $P(\text{S}) = \dfrac{800}{1\,000} = 0{,}8$.

500 élèves ont des gestes éco-responsables donc $P(\text{E}) = \dfrac{500}{1\,000} = 0{,}5$.

2. a. L'événement $\text{S} \cap \text{E}$ est défini par : « l'élève choisi est sensible à l'écologie et a des gestes éco-responsables ».

Il y a 480 élèves qui sont à la fois sensibles à l'écologie et ont des gestes éco-responsables, ainsi $P(\text{S} \cap \text{E}) = \dfrac{480}{1\,000} = 0{,}48$.

2. b. Par définition on a $P_{\text{S}}(\text{E}) = \dfrac{P(\text{S} \cap \text{E})}{P(\text{S})} = \dfrac{0{,}48}{0{,}8} = 0{,}6$.

3. On doit ici calculer la probabilité conditionnelle de S sachant E.

Par définition, on a $P_{\text{E}}(\text{S}) = \dfrac{P(\text{E} \cap \text{S})}{P(\text{E})} = \dfrac{0{,}48}{0{,}5} = 0{,}96$.

4. On doit calculer la probabilité conditionnelle de E sachant $\overline{\text{S}}$.

$$P_{\overline{\text{S}}}(\text{E}) = \frac{P(\overline{\text{S}} \cap \text{E})}{P(\overline{\text{S}})} = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1.$$

Point méthode

1. Pour calculer la probabilité d'un événement A en situation d'équiprobabilité, on applique :

$$P(\text{A}) = \frac{\text{Card}(\text{A})}{\text{Card}(\Omega)}$$

Point méthode

2. b. Pour calculer une probabilité conditionnelle, on applique la définition :

$$P_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{A})}.$$

En situation d'équiprobabilité, cette définition se ramène à

$$P_{\text{A}}(\text{B}) = \frac{\text{Card}(\text{A} \cap \text{B})}{\text{Card}(\text{A})}$$

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 398 Voir exercices similaires nos 54 à 59

26 On donne le tableau croisé d'effectifs suivant dans lequel A, B, C et D représentent des événements.

	A	B	Total
C	90	60	150
D	30	20	50
Total	120	80	200

1. a. Calculer $P(\text{A})$ et $P(\text{A} \cap \text{D})$.

b. En déduire $P_{\text{A}}(\text{D})$.

2. Calculer $P_{\text{D}}(\text{B})$.

27 Le tableau suivant donne la répartition des salariés d'une entreprise.

	Hommes	Femmes	Total
Cadres	18	12	30
Techniciens	37	33	70
Total	55	45	100

On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que ce soit :

1. Une femme ?

2. Une femme cadre ?

3. Un cadre sachant que c'est une femme ?

SPÉCIMEN

Méthode

CAPACITÉ 4 Construire, interpréter et utiliser un arbre pondéré

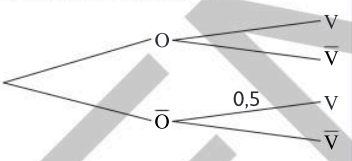
Énoncé Le guépard est le mammifère terrestre le plus rapide, capable d'atteindre la vitesse de 120 km/h. Dans le parc du Serengeti, les guépards sont étudiés afin d'analyser leurs performances suivant leur milieu de chasse. 70 % des guépards du parc vivent dans des plaines ouvertes, où 80 % d'entre eux atteignent une vitesse supérieure à 100 km/h pendant la chasse. On suit un guépard au hasard et on note respectivement O et V les événements « le guépard vit en plaine ouverte » et « le guépard atteint 100 km/h ».

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.

2. Que représente, dans le contexte de l'énoncé, la valeur 0,5 présente sur l'arbre ci-contre ?

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

4. Calculer $P(\text{O} \cap \text{V})$ et interpréter ce résultat.

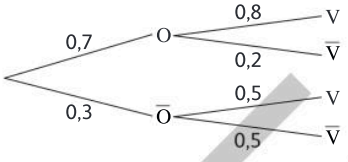


Solution rédigée

1. L'énoncé précise que « 70 % des guépards vivent dans les plaines ouvertes » donc $P(\text{O}) = 0{,}7$. De même « où 80 % d'entre eux atteignent une vitesse supérieure à 100 km/h pendant la chasse » indique que, parmi les guépards vivants en plaine ouverte, 80 % atteignent la vitesse étudiée, donc $P_{\text{O}}(\text{V}) = 0{,}8$.

2. Ici la valeur se trouve sur une branche au second niveau de l'arbre, elle correspond donc à une probabilité conditionnelle. Le nœud d'origine de la branche est $\overline{\text{O}}$ et son extrémité V, donc : $P_{\overline{\text{O}}}(\text{V}) = 0{,}5$. Parmi les guépards ne vivant pas en plaine ouverte, 50 % atteignent la vitesse de 100 km/h.

3.



$$P_{\overline{\text{O}}}(\overline{\text{V}}) = 1 - P_{\overline{\text{O}}}(\text{V})$$
$$P_{\text{O}}(\overline{\text{V}}) = 1 - P_{\text{O}}(\text{V})$$

4. On suit le chemin complet de l'arbre passant par O puis V. Ainsi $P(\text{O} \cap \text{V}) = P(\text{O}) \times P_{\text{O}}(\text{V}) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.
En choisissant au hasard un guépard dans le parc, la probabilité qu'il vive en plaine ouverte et qu'il atteigne 100 km/h pendant la chasse est égale à 0,56.

Point méthode
2. Les probabilités présentes au second niveau de l'arbre sont des probabilités conditionnelles.

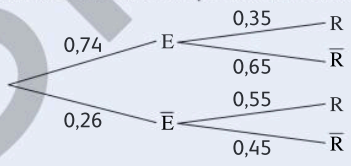
Point méthode
3. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Point méthode
4. Calculer la probabilité d'une intersection $\text{A} \cap \text{B}$, revient à calculer la probabilité du chemin allant de A à B.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 398 Voir exercices similaires nos 60 à 72

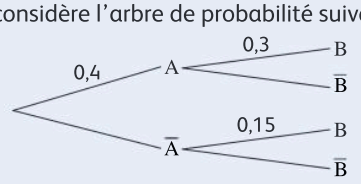
28 On considère l'arbre de probabilité suivant.



Donner les valeurs de $P(\text{E})$, de $P_{\text{E}}(\text{R})$ et de $P_{\overline{\text{E}}}(\overline{\text{R}})$.

29 Le matin Benjamin mange des tartines dans 75 % des cas, sinon il mange des pains au lait. Lorsqu'il mange des tartines, il y met de la confiture la moitié du temps. En revanche, il en met cinq fois sur 6 avec les pains au lait. On note T l'événement « Benjamin mange une tartine » et C l'événement « il met de la confiture ». Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré et complété par toutes les probabilités.

30 On considère l'arbre de probabilité suivant.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(\text{A} \cap \text{B})$.

SPECIMEN

CAPACITÉ 5 Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Énoncé Une école de ski propose des cours pour enfants, de niveau « débutant » ou « confirmé ». La répartition des élèves est donnée dans le tableau ci-contre.

	Garçon	Fille
Débutant	260	420
Confirmé	140	180

On choisit un enfant de l'école de ski au hasard.
On note les évènements :
G « l'élève est un garçon », F : « l'élève est une fille »,
D : « l'élève est inscrit à un cours niveau débutant » et C : « l'élève est inscrit à un cours niveau confirmé ».

1. a. Calculer $P(F)$ et $P(F \cap C)$.
b. En déduire $P_F(C)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On sait que l'élève est inscrit à un cours « confirmé ». Calculer la probabilité que ce soit une fille.
3. Calculer la probabilité que l'élève soit inscrit à un cours « débutant » sachant que c'est un garçon.
4. Calculer la probabilité que l'élève soit un garçon sachant qu'il est inscrit à un cours « débutant ».
On arrondira le résultat au centième.

Solution rédigée

1. a. Il faut tout d'abord calculer les effectifs totaux, il y a $420+180=600$ filles et $260+140=400$ garçons soit un effectif total de 1 000 élèves dans l'école de ski.
On en déduit : $P(F)=\dfrac{600}{1\,000}=0{,}6$ et $P(F\cap C)=\dfrac{180}{1\,000}=0{,}18$.

b. D'après la définition, il faut calculer $P_F(C)=\dfrac{P(F\cap C)}{P(F)}$.
Avec les résultats précédents, on déduit : $P_F(C)=\dfrac{0{,}18}{0{,}6}=0{,}3$.
Ainsi, 30 % des filles sont inscrites à des cours de niveau « confirmé ».

2. On doit calculer la probabilité $P_C(F)=\dfrac{P(F\cap C)}{P(C)}$.
Or $P(C)=\dfrac{140+180}{1\,000}=0{,}32$. Donc $P_C(F)=\dfrac{0{,}18}{0{,}32}=0{,}5625$

3. La probabilité conditionnelle demandée ici est $P_G(D)$. D'après le tableau d'effectifs, $P_G(D)=\dfrac{0{,}26}{0{,}4}=0{,}65$

4. La probabilité conditionnelle demandée ici est $P_D(G)$. D'après le tableau d'effectifs, $P_D(G)=\dfrac{0{,}26}{0{,}68}\approx 0{,}38$.

Point méthode
1. b. $P_B(A)$ donne une probabilité conditionnelle sachant B est réalisé. Lorsqu'on procède à un tirage au hasard dans une population, la formulation « parmi les éléments de B », « ... de B », « ... dans B ... », « ... sachant B ... » indique ce conditionnement.

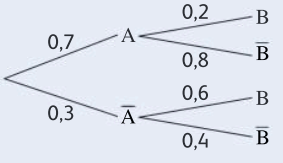
Point méthode
3. et **4.** Ne pas confondre $P_A(B)$, où l'on sait que A est réalisé, $P_B(A)$ où l'on sait que B est réalisé, et $P(A\cap B)$ qui n'est pas une probabilité conditionnelle.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 398 Voir exercices similaires nos 73 à 78

31 Une usine fabriquant des pièces pour scooter possède deux machines A et B. La machine A assure 60 % de la production.
Une étude a montré que 6 % des pièces fabriquées par la machine A sont défectueuses et que 80 % des pièces défectueuses ont été fabriquées par la machine A. On choisit une pièce de la production au hasard et on note A et D les événements respectifs « la pièce provient de la machine A » et « la pièce est défectueuse ».
Traduire chacune des valeurs numériques de l'énoncé à l'aide d'une probabilité.

32 Un boulanger-traiteur constate que 70 % de ses clients achètent du pain et 32 % achètent une pâtisserie. On choisit un client au hasard et on note A et B les événements respectifs « le client achète du pain » et « le client achète une pâtisserie ». On donne l'arbre pondéré ci-contre.



1. Donner $P_A(B)$.
2. Calculer $P_B(A)$.
3. a. Calculer $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.
b. En déduire la probabilité que le client n'achète pas de pain sachant qu'il n'a pas acheté de pâtisserie.

SPÉCIMEN

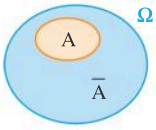
Je fais le point

Je revois mon cours

Vocabulaire des événements

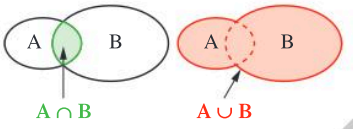
L'univers : $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \ldots ; e_n\}$ est composé de toutes les issues d'une expérience aléatoire.

Événement A : c'est un **sous-ensemble** de l'univers Ω.



Événement complémentaire $\overline{A}$ de A **(ou contraire)** : c'est le sous-ensemble formé des issues de l'univers Ω **qui ne sont pas** dans A.

L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$, est formée des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.



Si $A \cap B = \varnothing$, A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

La réunion de A et de B, notée $A \cup B$, est formée des issues qui appartiennent à A ou à B.

Loi de probabilité

Une loi de probabilité sur Ω associe à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ sa probabilité p_i.

Issue	e_1	e_2	…	e_n
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

Avec $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Situation d'équiprobabilité : toutes les probabilités p_i sont égales à $\frac{1}{n}$.

Probabilité d'un événement

La **probabilité** $P(A)$ d'un événement A est égale à la somme des probabilités de tous les événements élémentaires contenus dans A.

En situation d'équiprobabilité, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

La probabilité de B sachant que A est réalisé (avec $P(A) \neq 0$) est :

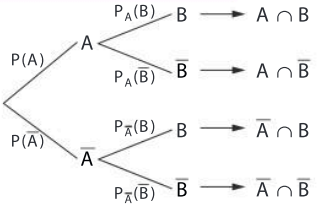
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On a :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

et si $P(B) \neq 0$:

- $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$



La somme des probabilités des **branches issues d'un même nœud** est égale à 1.

La probabilité d'un **chemin complet** est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.



Je m'exerce à démontrer

Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = 0{,}4$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$. Montrer que $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.

DÉMO PAS À PAS
hachette-clic.fr/26de2101

SPÉCIMEN

J'évalue mes connaissances

VERSION INTERACTIVE
hachette-clic.fr/26de2102

QCM

Voir corrigés p. 398

Pour chacune des questions, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

1	2	3	4	5	6
0,1	0,2	x	0,3	0,1	0,05

	a	b	c
1. La valeur de x est :	$\frac{1}{6}$	0,25	0,3
2. L'événement « obtenir un résultat pair » :	est $\{2;4;6\}$	a pour probabilité $\frac{1}{2}$	est moins probable que son événement contraire
3. L'événement « obtenir au plus 2 » :	est l'événement contraire de « obtenir au moins 2 »	est l'événement contraire de « obtenir au moins 3 »	a pour probabilité 0,3
4. L'intersection des événements A « obtenir un résultat pair » et B « obtenir au moins 4 » :	est notée $A \cup B$	a deux issues	a pour probabilité 0,45
5. La réunion des événements A « obtenir un résultat pair » et B « obtenir au moins 4 » :	est notée $A \cup B$	a pour probabilité $P(A)+P(B)$	a pour probabilité 0,65

Pour les questions suivantes, on choisit un(e) élève au hasard dans une classe de seconde répartie comme indiqué dans le tableau selon le sexe et le régime. On note les événements F : « l'élève est une fille » et I : « l'élève est interne ».

	Fille	Garçon	Total
Interne	4	2	6
Autre	14	10	24
Total	18	12	30

6. $P_F(I)=$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{P(F\cap I)}{P(I)}$
7. $P_I(\overline{F})=$	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{6}$	$1-P_I(F)$
8. L'élève choisi n'est pas interne. La probabilité que ce soit une fille est égale à :	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{P(\overline{I}\cap F)}{P(\overline{I})}$

vrai ou faux ?

Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Partie A.

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements A « obtenir un roi » et B « obtenir un cœur ».

a. Les événements A et B sont incompatibles.

b. Les événements A et B ont la même probabilité.

c. L'événement $A \cap B$ est « obtenir le roi de cœur ».

d. La probabilité de l'événement $A \cup B$ est $\frac{12}{32}$.

e. La probabilité de l'événement $\overline{A}$ est $\frac{7}{8}$.

f. Si on tire une seconde carte sans avoir remis la première dans le jeu, il y a 61 tirages possibles sur l'ensemble des deux tirages.

Partie B.

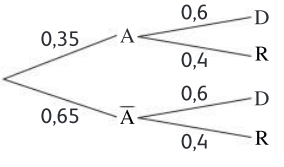
Un site Internet propose deux modes de livraison : à domicile (D) ou en point relais (R). On sait que 60 % des clients se font livrer à domicile. Parmi les commandes envoyées à domicile, 25 % arrivent en retard, contre 10 % pour celles reçues en point relais.

On note A : « la commande arrive en retard ».

1. $P(R)=0,4$

2. $P_D(A)=0,15$

3. On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre :



4. $P(R\cap A)=0,04$

SPECIMEN

Exercices Application

JE ME TESTE ! EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2103

Acquérir des automatismes

33 **1.** Rappeler la définition d'un univers et d'un événement.
2. On dispose de quatre cartes numérotées de 0 à 3. On tire deux cartes successivement et sans remise pour constituer un nombre à deux chiffres (qui peut éventuellement commencer par un zéro).
a. Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
b. Décrire l'événement A : « le nombre peut s'écrire avec un seul chiffre ».
c. Décrire par une phrase l'événement :

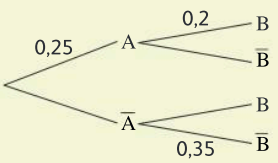
$$B = \{20 ; 21 ; 23 ; 30 ; 31 ; 32\}$$

34 **1.** On considère deux événements A et B d'une expérience aléatoire. Rappeler la définition de l'événement $A \cap B$ et de l'événement $A \cup B$.
2. Une classe est composée de 35 élèves, 19 filles et 16 garçons. On note A l'ensemble des élèves ayant choisi l'activité sport et B l'ensemble des élèves ayant choisi l'activité musique.
Seuls 2 garçons n'ont choisi aucune activité ; 10 filles n'ont choisi que le sport, 7 garçons que la musique, et 6 filles et 4 garçons ont choisi les deux activités.
Donner le cardinal des ensembles A, B, $A \cup B$ et $A \cap B$.

Démo
35 **1.** Rappeler la définition de deux événements contraires A et $\overline{A}$.
2. Compléter l'égalité $A \cup \overline{A} = \ldots$
3. En déduire la valeur de $p(A \cup \overline{A})$.
4. Démontrer que $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

36 QCM
A et B sont deux événements de probabilités non nulles. Pour chaque question, donner la bonne réponse.
1. La probabilité conditionnelle de B sachant A se note :
a. $P(A \cap B)$ **b.** $P_A(B)$ **c.** $P_B(A)$
2. Elle est égale à :
a. $P(A) \times P(B)$ **b.** $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **c.** $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
3. La probabilité $P(A \cap \overline{B})$ est égale à :
a. $P(A) \times P(\overline{B})$ **b.** $P(A) \times P_A(\overline{B})$ **c.** $P(A) \times P_{\overline{B}}(A)$

37 Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Dénombrer à l'aide de tableaux et d'arbres

Voir p. 319

Dans les exercices 38 à 40 déterminer, à l'aide d'un arbre ou d'un tableau, l'univers Ω de l'expérience aléatoire puis donner le nombre d'issues qui le composent.

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2104



38 On lance deux dés numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la différence entre le plus grand et le plus petit résultat.

39 On effectue trois lancers consécutifs d'une pièce, à chaque lancer on note P pour pile et F pour face. On s'intéresse à la suite de trois lettres ainsi formée.

40 Dans un sac on place trois jetons portant les lettres A, B et C. On tire deux jetons, successivement et avec remise. On note la lettre obtenue à chaque tirage. On s'intéresse à la suite de deux lettres ainsi formée.

41 On lance un dé tétraédrique et un dé cubique puis on fait la somme des résultats obtenus.
1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

2. **a.** Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
b. Combien d'issues possède-t-il ?
3. On considère l'événement A « le résultat est supérieur à 5 ». Combien d'issues composent cet événement ? Les citer.

42 Une boutique de vêtements fait une offre « 1 hoodie acheté = un pantalon à 50 % ». Les hoodies sont disponibles en blanc, gris et bordeaux et les pantalons en beige et noir.
1. Combien d'assortiments de couleurs peuvent être formés avec cette offre ?
2. On note les événements A « le hoodie est blanc » et B « le pantalon est beige ». Combien d'issues possède l'événement $A \cup B$? $A \cap B$?

SPÉCIMEN

CAS PRATIQUE 2 Établir une loi de probabilité, calculer des probabilités

Voir p. 321

43 La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est donnée par le tableau suivant.

Issue	0	1	2	3	4
Probabilité	p	0,1	0,25	0,15	0,05

1. Déterminer la valeur de p.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2.

Dans les exercices 44 à 46 déterminer la valeur de p pour établir la loi de probabilité et calculer la ou les probabilités demandées.

44 On donne la loi de probabilité suivante.

Issue	0	1	2	3	4
Probabilité	p	0,1	0,25	0,15	0,3

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2.

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2105



45 On donne la loi de probabilité suivante.

Issue	1	2	3	4	5
Probabilité	0,15	0,15	0,2	p	0,25

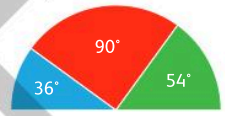
1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 3.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 2.

46 On donne la loi de probabilité suivante.

Issue	A	B	C	D	E
Probabilité	p	$2p$	0,35	p	0,25

Calculer la probabilité d'obtenir une voyelle.

47 Lors d'un spectacle de feux d'artifice, des fusées sont lancées à partir d'un dispositif de lancement en demi-cercle. Les fusées sont réparties par couleurs (rouge, bleu ou vert) selon ce schéma :



On choisit une fusée au hasard et on s'intéresse à sa couleur. On admet que la probabilité de choix d'une fusée est proportionnelle à la mesure de l'angle attribué à sa couleur. Établir la loi de probabilité de cette expérience.



48 Une entreprise fabrique des Smartphones qui peuvent avoir deux défauts :
- un défaut d'écran (2,5 % des cas) ;
- un défaut de batterie (2 % des cas).

Au total, 3 % des appareils sont défectueux. On choisit un Smartphone au hasard.

1. Établir la loi de probabilité permettant de modéliser ce tirage.
2. Calculer la probabilité que le Smartphone n'ait pas de défaut.
3. Calculer la probabilité que le Smartphone ait les deux défauts.

Dans les exercices 49 à 50 établir la loi de probabilité de l'expérience aléatoire puis calculer les probabilités $p(A)$, $p(\overline{B})$, $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

49 Une urne contient les lettres Z, O, É.
On tire successivement deux boules avec remise et on note le « mot » formé.
A : « le mot contient deux voyelles ».
B : « le mot se termine par É ».

CORRECTION TYPE EN VIDÉO
hachette-clic.fr/26de2106



50 On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.
A : « obtenir deux fois face ».
B : « obtenir pile au premier lancer ».

51 PYTHON Lors d'une tombola, on prélève au hasard un ticket dans un sac contenant 200 tickets. Dix d'entre eux sont gagnants.

1. Quelle est la probabilité p de choisir un ticket gagnant ?
2. Soit un entier naturel n non nul. On souhaite réaliser un échantillon de taille n et calculer la fréquence de tickets gagnants sur celui-ci. Compléter pour cela la fonction `fréquence(n)` incomplète suivante.

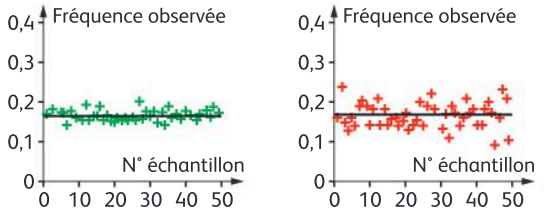
```
from random import*
def fréquence(n):
    Nb_gagnant=0
    for i in range(n):
        x=random()
        if x<...:
            Nb_gagnant=...
    return ...
```

3. Représenter graphiquement les fréquences observées sur 100 échantillons de taille 80, puis de taille 500. Qu'observe-t-on ?

SPÉCIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2103

52 On dispose d'un dé cubique équilibré et on s'intéresse à la sortie de la face 1.



On a constitué 50 échantillons de taille 1 000 et 50 échantillons de taille 100 et on a représenté ci-dessus les fréquences observées de sortie de la face 1.
Associer à chaque graphique la taille des échantillons constitués en argumentant.

53 La proportion de Français dont le groupe sanguin est « O+ » est de 36 %. On simule 50 échantillons de 100 personnes sur tableur.

	A	B	C
1		Ech 1	Ech 2
2	Personne n°1	0	1
3	Personne n°2	1	0

…

	Nombre d'apparition de personnes dont le groupe	38	39
102	sanguin est « O+ »		
103	Fréquence associée	0,38	0,39

1. Pour chaque personne, on note 1 si son groupe sanguin est « O+ » et 0 sinon. Compléter la formule saisie dans la cellule B2 : =SI(ALEA()< … ; … ; …).
2. Sur cette feuille de calcul, quelles formules peut-on saisir dans les cellules B102 et B103 ?
3. Construire puis compléter cette feuille de calcul afin de visualiser les fluctuations d'échantillonnage sur 50 échantillons de taille 100, puis de taille 1 000.

CAPACITÉ 3 Calculer des probabilités conditionnelles

Voir p. 323

54 On donne dans le diagramme ci-dessous la répartition de 20 adhérents d'un club sportif.



On choisit un adhérent au hasard.
On note T l'événement « l'adhérent pratique le tennis » et V « l'adhérent pratique du VTT ».
Dire si chacune des égalités suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. $P(\mathrm{T}) = \frac{7}{20}$ **2.** $P(\mathrm{T} \cap \mathrm{V}) = \frac{1}{4}$
3. $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{V}) = \frac{5}{13}$ **4.** $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{T}) = \frac{5}{8}$

55 QCM
Dans une boîte de chocolats, on propose des chocolats noirs (N) ou au lait. Chacun est fourré à la ganache (G) ou au praliné.
30 % des chocolats sont noirs, les autres sont au lait.
Parmi les chocolats noirs, 40 % sont fourrés au praliné.
70 % des chocolats fourrés à la ganache sont des chocolats au lait.
18 % des chocolats sont au chocolat noir et fourrés à la ganache.
On choisit au hasard un chocolat de la boîte. Pour chaque question, choisir la bonne réponse.
1. $P(\overline{\mathrm{N}}) =$
a. 0,28 **b.** 0,3 **c.** 0,7
2. $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{G}) =$
a. 0,18 **b.** 0,3 **c.** 0,6
3. La probabilité égale à 0,18 est :
a. $P(\mathrm{G})$ **b.** $P_{\mathrm{N}}(\overline{\mathrm{G}})$ **c.** $P(\mathrm{G} \cap \mathrm{N})$
4. La probabilité égale à 0,7 est :
a. $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{G})$ **b.** $P_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{G})$ **c.** $P_{\mathrm{G}}(\overline{\mathrm{N}})$

56 On considère deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = 0{,}6$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}18$.
Calculer $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

57 On considère deux événements A et B tels que $P(\overline{\mathrm{A}}) = 0{,}3$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}15$. Calculer la probabilité conditionnelle de B sachant A.

58 Le tableau ci-dessous donne la répartition des habitants d'une ville suivant leur type de logement et leur situation familiale.

	Appartement	Maison	Total
En couple	2 665	3 231	5 896
Célibataire	4 883	1 221	6 104
Total	7 548	4 452	12 000

On interroge un habitant du quartier au hasard.
On arrondira les résultats au centième.
1. a. Calculer la probabilité que l'habitant soit célibataire.
b. Calculer la probabilité que l'habitant vive en appartement sachant qu'il est célibataire.
2. Calculer la probabilité que l'habitant vive en maison sachant qu'il est en couple.
3. Calculer la probabilité que l'habitant soit en couple sachant qu'il vit en maison.

59 Un journaliste a relevé le temps moyen d'activité physique hebdomadaire réalisé par des collégiens et des lycéens. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

SPECIMEN

	Collégiens	Lycéens	Total
Moins de 6 h	56	91	147
6 h ou plus	84	119	203
Total	140	210	350

On choisit au hasard un élève de cette étude et on note C l'événement « l'élève est un collégien » et S l'événement « l'élève pratique en moyenne 6 heures ou plus d'activité physique par semaine ».

1. a. Calculer $P(C)$ et $P(S \cap C)$.

b. En déduire $P_C(S)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Calculer $P_{\overline{C}}(S)$. Arrondir le résultat au centième près.

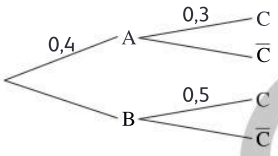
3. Le journaliste affirme : « D'après cette étude, la pratique de plus de 6 h de sport hebdomadaire est plus répandue chez les collégiens que chez les lycéens. » A-t-il raison ?

Capacité 4 Construire, interpréter, utiliser un arbre pondéré

Voir p. 324

60 QCM

On donne l'arbre pondéré suivant :



Choisir la ou les bonnes réponses.

1. $P(B)$ est égale à :

a. 0,4 **b.** 0,5 **c.** 0,6 **d.** $1-P(A)$

2. $P_A(C)$ est égale à :

a. 0,12 **b.** 0,3 **c.** 0,75 **d.** $1-P_A(\overline{C})$

3. $P_B(\overline{C})$ est égale à :

a. 0,3 **b.** 0,5 **c.** 0,8 **d.** $1-P_B(C)$

4. $P(C \cap A)$ est égale à :

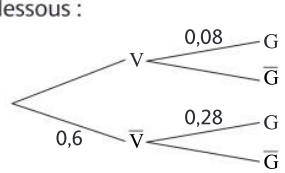
a. 0,12 **b.** 0,7 **c.** $P(A) \times P(C)$ **d.** $P(A) \times P_A(C)$

61 Dans une ville, on a demandé aux habitants s'ils avaient été vaccinés contre la grippe et s'ils l'avaient contractée.

On choisit un habitant au hasard et on note :

V « l'habitant est vacciné » et G « l'habitant a contracté la grippe ».

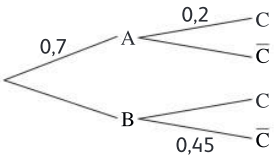
La situation est partiellement représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. Donner la notation probabiliste des valeurs 0,6 ; 0,08 et 0,28.

2. Préciser les valeurs de $P(V)$, $P_V(\overline{G})$ et $P_{\overline{V}}(\overline{G})$.

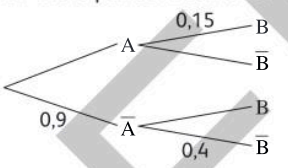
62 On donne l'arbre pondéré suivant :



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

2. Donner les probabilités de $P(A)$ et $P_A(C)$.

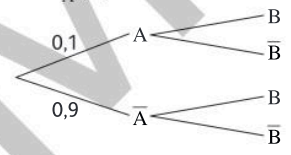
63 On donne l'arbre pondéré suivant :



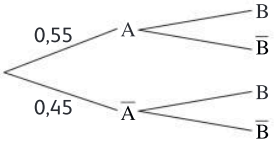
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

2. Donner les probabilités de $P(A)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

64 Recopier et compléter l'arbre suivant sachant que $P_A(B) = 0{,}35$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$.



65 Recopier et compléter l'arbre suivant sachant que $P_A(\overline{B}) = 0{,}05$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.



Dans les exercices **66** *à* **68**, *construire les arbres pondérés correspondant à la situation à l'aide des informations fournies.*

66 On a $P(A) = 0{,}3$; $P_A(B) = 0{,}1$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$.

67 On $P(B) = 0{,}1$; $P_B(A) = 0{,}45$ et $P_{\overline{B}}(A) = 0{,}2$.

68 On $P(\overline{A}) = 0{,}8$; $P_A(B) = 0{,}75$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}9$.

Dans les exercices **69** *à* **71**, *on considère des événements A et B de probabilités non nulles. Dans chaque cas, déterminer la probabilité de leur intersection.*

69 On sait que $P(A) = 0{,}2$ et $P_A(B) = 0{,}16$.

70 On sait que $P(B) = 0{,}5$ et $P_B(A) = 0{,}4$.

71 On sait que $P(A) = 0{,}3$ et $P_A(B) = 0{,}7$.

SPÉCIMEN

JE ME TESTE !
EXERCICES INTERACTIFS
hachette-clic.fr/26de2103

72 Chez moi, il pleut un week-end sur quatre. S'il pleut, je sors faire du vélo une fois sur dix ; s'il ne pleut pas, je sors faire du vélo 4 fois sur cinq.
On choisit un week-end au hasard et on note F et V les événements respectifs « le week-end choisi, il pleut » et « le week-end choisi, je sors faire du vélo ».
1. Donner les probabilités $P_{\text{F}}(\text{V})$ et $P_{\overline{\text{F}}}(\text{V})$.
2. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
3. Calculer la probabilité $P(\text{F} \cap \text{V})$.
4. Calculer la probabilité que je ne sorte pas faire du vélo alors que le week-end n'est pas pluvieux.

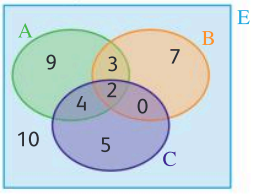
CAS PRATIQUE 5 Distinguer en situation $P_{\text{A}}(\text{B})$ et $P_{\text{B}}(\text{A})$

Voir p. 325

73 On choisit au hasard une personne dans une population. On note les événements H « la personne est un homme » et B « la personne est bénévole dans une association ».
Associer chaque proposition à la probabilité qu'elle permet de déterminer.

40 % des bénévoles sont des hommes	• $P(\overline{\text{H}})$
60 % des personnes sont des femmes	• $P_{\overline{\text{H}}}(\text{B})$
1/4 des personnes sont bénévoles dans une association	• $P_{\text{B}}(\text{H})$
Parmi les femmes, 25 % sont bénévoles	• $P(\overline{\text{H}} \cap \text{B})$
15 % des personnes sont des femmes bénévoles dans une association	• $P_{\text{H}}(\overline{\text{B}})$
75 % des hommes ne sont pas bénévoles	• $P(\text{B})$

74 À partir d'une situation d'équiprobabilité, on obtient un univers E et trois événements A, B et C. Le schéma ci-contre indique le nombre d'éléments dans chaque partie.



Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. $P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{5}{40}$ **2.** $P(\text{A} \cap \text{C}) = \dfrac{4}{40}$
3. $P(\text{B} \cap \text{C}) = \dfrac{2}{40}$ **4.** $P(\text{A}) = \dfrac{9}{40}$
5. $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{5}{18}$ **6.** $P_{\text{A}}(\text{B}) = \dfrac{5}{18}$
7. $P_{\text{C}}(\text{B}) = \dfrac{5}{11}$ **8.** $P_{\text{B}}(\text{C}) = \dfrac{2}{12}$

75 Indiquer pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.
1. Pour tout événement A de probabilité non nulle, on a : $P_{\text{A}}(\text{A}) = 1$.
2. Si $P(\text{A}) = 0{,}5$ et $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}2$ alors $P_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}4$.
3. Si $P(\text{B}) = 0{,}5$ et $P_{\text{B}}(\text{A}) = 0{,}4$ alors $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}2$.
4. Si $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}3$ et $P(\overline{\text{B}}) = 0{,}4$ alors $P_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}5$.
5. Si $P_{\text{B}}(\text{A}) = 0$ alors $P_{\text{A}}(\text{B}) = 0$.

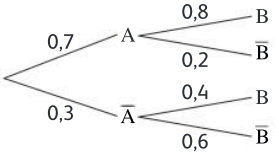
76 Une agence de location de voitures propose une flotte de 35 véhicules. Parmi ces véhicules, 20 sont thermiques et 15 sont électriques.
Au total, 12 véhicules sont des modèles « familiaux » dont 8 sont thermiques. Les autres modèles sont des « petites citadines ».
On choisit au hasard un véhicule dans la flotte de cette agence de location.
On note T l'évènement « Le véhicule est thermique » et F l'événement « le véhicule est un modèle familial ».
1. Calculer $P_{\text{T}}(\text{F})$ et $P_{\text{F}}(\text{T})$.
2. Interpréter les probabilités précédentes à l'aide d'une phrase décrivant la flotte de l'agence.

77 Une agence de voyages propose deux types de séjours à ses clients, « courts » ou « longs », pour trois types destinations différentes : « France », « Europe », ou « Monde ». Les résultats d'une étude sur les 1 000 derniers séjours achetés sont présentés dans le tableau ci-dessous.

	Court (C)	Long (L)	Total
France (F)	104	156	260
Monde (M)	120	80	200
Europe (E)	256	284	540
Total	480	520	1 000

On choisit un séjour au hasard parmi les 1 000 étudiés.
1. a. Calculer $P_{\text{F}}(\text{C})$.
b. Calculer $P_{\text{C}}(\text{F})$.
2. a. Calculer la probabilité que le séjour soit à destination de la France sachant qu'il est long.
b. Calculer la probabilité que le séjour soit long sachant qu'il est à destination de la France.

78 On considère l'arbre pondéré ci-dessous où A et B sont des événements de probabilités non nulles. On sait que $P(\text{B}) = 0{,}68$.



1. Donner la valeur de $P_{\text{A}}(\text{B})$.
2. Calculer $P_{\text{B}}(\text{A})$. Arrondir au centième.

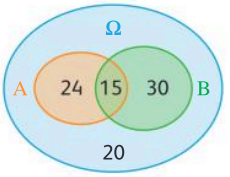
SPECIMEN

Exercices Entraînement

1 Vocabulaire des événements

79 Dans une classe de Seconde, quelques élèves portent des lunettes et d'autres des lentilles de contact. On considère les événements F « l'élève est une fille », L « l'élève porte des lunettes » et C « l'élève porte des lentilles de contact ».
Décrire par une phrase les événements suivants.
a. $\overline{F}$ **b.** $F \cap C$ **c.** $F \cup L$ **d.** $\overline{F} \cap \overline{L}$ **e.** $F \cup \overline{C}$ **f.** $\overline{F} \cup \overline{L}$

80 **Utilisation d'un diagramme**
On considère le diagramme suivant où Ω est l'univers d'une expérience aléatoire. A et B sont deux événements et chaque nombre indique le nombre d'issues pour la zone du diagramme correspondante.



1. Combien d'issues l'univers Ω possède-t-il ?
2. Combien d'issues possèdent les éléments suivants ?
a. A **b.** B **c.** $\overline{A}$ **d.** $\overline{B}$
e. $A \cap B$ **f.** $A \cup B$ **g.** $\overline{A \cap B}$ **h.** $\overline{A \cup B}$

81 On lance deux dés tétraédriques équilibrés, on s'intéresse au produit des résultats obtenus.
1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

2. En déduire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
3. Est-ce une situation d'équiprobabilité ? Justifier.
4. Décrire les événements suivants à l'aide des issues qui les composent :
a. A : « obtenir un résultat pair » ;
b. B : « obtenir un multiple de 3 » ;
c. C : « obtenir un résultat supérieur à 10 ».

82 Le digicode d'une porte d'entrée est composé de quatre chiffres allant de 0 à 9. On saisit au hasard un code à quatre chiffres sur ce digicode.
1. Combien d'issues possède cette expérience ?
2. On considère les événements suivants.
• A : « le code saisi commence par 5 » ;
• B : « le code saisi ne contient pas de 0 ».
Donner deux issues correspondant aux événements suivants.
a. A **b.** B **c.** $\overline{A}$ **d.** $\overline{B}$
e. $A \cap B$ **f.** $A \cup B$ **g.** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **h.** $\overline{A \cap B}$

83 On lance un dé à huit faces numérotées de 1 à 8 et on s'intéresse au résultat obtenu. On considère les événements A « obtenir un résultat pair » et B « obtenir un résultat inférieur ou égal à 5 ».
1. Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
2. a. Décrire l'événement A à l'aide des issues de cette expérience aléatoire.
b. Décrire l'événement $A \cup B$ à l'aide d'une phrase, puis à l'aide des issues de cette expérience aléatoire.
c. Même question pour l'événement $A \cap B$.

84 On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements T « la carte tirée est un trèfle » et A « la carte tirée est un as ».
Décrire chacun des événements suivants à l'aide d'une phrase, puis donner le nombre d'issues de chacun d'entre eux.
1. $\overline{T}$ **2.** $T \cap \overline{A}$ **3.** $T \cup A$

85 Dans sa valise, Benjamin possède toutes les affaires suivantes.
• Deux pantalons, un noir (noté P_N) et un bleu (noté P_B).
• Trois chemises, une blanche (notée C_B), une noire (notée C_N) et une à carreau (notée C_C).
• Deux vestes, une noire (notée V_N) et une marron (notée V_M).
Une tenue est formée d'un pantalon, d'une chemise et d'une veste.
Benjamin compose une tenue au hasard.



1. À l'aide d'un arbre, dénombrer le nombre total de tenues possibles.
2. On considère les événements :
• A : « la tenue ne comporte pas de noir » ;
• B : « la tenue comporte la veste marron ».
a. Écrire sous forme d'ensemble les événements A et B.
b. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$.
c. Quelles sont les issues qui réalisent $\overline{A}$?
3. a. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$.
b. Écrire cet événement sous forme d'ensemble.
c. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$.
d. Écrire cet événement sous forme d'ensemble.
4. a. Décrire par une phrase l'événement $A \cap \overline{B}$.
b. Que peut-on dire des événements A et $\overline{B}$? Justifier.

SPÉCIMEN

2 Probabilités sur un ensemble fini

86 La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est donnée dans le tableau suivant.

Issue	1	2	3	4	5
Probabilité	0,1	0,1	0,1	p	0,25

1. Déterminer la valeur de p.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 3.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus 2.

87 La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est donnée par le tableau suivant.

Issue	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	p	p	$4p$	$2p$

1. Déterminer la valeur de p.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un multiple de 3.
3. A-t-on autant de chances d'avoir une issue paire qu'une issue impaire ?

88 On lance un dé cubique truqué dont la face 6 a 3 fois plus de chance d'être tirée que chacune des autres.
1. Établir la loi de probabilité associée au lancer de ce dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair.

Dans les exercices **89** *à* **91**, *A désigne un événement d'un univers associé à une expérience aléatoire. Déterminer la probabilité de son événement contraire.*

89 On donne $P(A)=0,2$.

90 On donne $P(A)=0,55$.

91 On donne $P(A)=0,71$.

92 **1.** Lors d'un coup franc, Dylan marque un but avec une probabilité de 0,65. Quelle est la probabilité qu'il ne marque pas son but ?
2. Dylan tire deux coups francs successifs. Quel est l'événement contraire de l'événement « Dylan marque au moins un but » ?

93 On considère deux événements A et B tels que $P(A)=0,4$; $P(B)=0,65$ et $P(A\cap B)=0,15$.
1. Déterminer $P(\overline{A})$.
2. Déterminer $P(A\cup B)$.

94 Soient A et B deux événements incompatibles tels que $P(A)=0,1$ et $P(B)=0,45$.
1. Déterminer $P(\overline{B})$.
2. Déterminer $P(A\cup B)$.

95 **Vrai ou faux ?**
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
On considère deux événements A et B tels que $P(A)=0,5$ et $P(B)=0,8$.
1. $P(\overline{A})=P(A)$.
2. Les événements A et B sont incompatibles.
3. $P(A\cup B)\geqslant 0,8$.

96 On sait que :
$P(\overline{A})=0,6$; $P(\overline{B})=0,7$; $P(A\cup B)=0,55$
Calculer $P(\overline{A\cap B})$.

97 On sait que :
$P(A\cup B)=P(\overline{A\cap B})=0,85$; $P(A)=2\times P(B)$
Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

98 **Vrai ou faux ?** LOGIQUE
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère A et B deux événements. Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.
1. $0\leqslant P(A)+P(B)\leqslant 1$
2. $P(A\cap B)\leqslant P(A\cup B)$
3. $P(A)\leqslant P(A\cup B)$
4. $P(A\cap B)\leqslant P(A)+P(B)$

99 Une étude est menée auprès de 500 élèves pour connaître leur genre de film préféré. On regroupe les résultats dans le tableau suivant.

	Action	Comédie	Sc-fiction
Primaire	20	30	25
Collège	55	35	35
Lycée	125	95	80

On choisit un élève au hasard parmi les 500.
1. Déterminer la probabilité qu'il préfère les films d'action.
2. Déterminer la probabilité de choisir un lycéen.
3. Déterminer la probabilité que ce soit un collégien préférant les comédies.

100 On lance deux fois successivement un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4, et on fait le produit des deux résultats obtenus.
1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre à deux niveaux de branches.
2. Quelle est la probabilité que le produit obtenu soit :
a. égal à 1 ?
b. un nombre premier ?
c. un nombre impair ?
d. un multiple de 3 et un nombre impair ?
e. un multiple de 3 ou un nombre impair ?

SPECIMEN

101 Un triathlon par équipe regroupe trois types de participants, selon leur âge : Junior, Senior et vétéran. Chaque participant a la possibilité de s'inscrire dans un seul des sports proposés. On récapitule le nombre d'inscrits dans chaque discipline dans le tableau suivant.

	Cyclisme	Natation	Course à pied	**Total**
Junior		247	377	945
Senior	398	139		710
Vétéran	257	456	342	
Total	976		892	2 710

Le jour de l'épreuve on interroge un participant au hasard. *On arrondira les résultats au dixième.*

1. Reproduire et compléter le tableau.

2. Déterminer la probabilité d'interroger un Junior.

3. Déterminer la probabilité d'interroger un participant inscrit en natation.

4. Déterminer la probabilité d'interroger un vétéran inscrit au cyclisme.

5. Déterminer la probabilité d'interroger un vétéran ou un candidat inscrit en cyclisme.



102 La fréquence des jeux de hasard et d'argent chez les 18-75 ans est donnée par le tableau suivant.

	Joueur régulier	Joueur occasionnel
18-24 ans	4,3	39,3
25-34 ans	9,0	46,4
35-44 ans	11,0	43,0
45-54 ans	14,0	37,3
55-64 ans	14,0	30,1
65-75 ans	10,2	20,8

Source insee – en % par rapport à la tranche d'âge

1. On rencontre une personne âgée de 19 ans. Quelle est la probabilité qu'elle ait joué au moins une fois à un jeu d'argent dans l'année ?

2. a. On choisit une tranche d'âge de manière aléatoire dans le tableau.
Quelle est la probabilité de tomber sur la tranche 25-34 ans ?

b. Quelle est la probabilité de choisir une tranche d'âge dans laquelle au moins 50 % des personnes ont joué au moins une fois à un jeu d'argent ?

103 **1.** Alric rencontre une personne dans la rue. Quelle est la probabilité que cette personne soit née le même jour et le même mois que lui ?

2. Sur une production de 4 500 000 tickets à gratter Astro, la Française des jeux répartit les gains de la façon suivante :

Nombre de tickets	Montant du gain
3	25 000 €
8	1 000 €
415	100 €
45 000	20 €
101 350	10 €
150 000	6 €
476 000	4 €
661 500	2 €

Alric achète un Astro.

a. Quelle est la probabilité que son ticket soit gagnant ?

b. Quelle est la probabilité que son ticket lui permette un gain supérieur ou égal à 100 € ?

3. Comparer la probabilité qu'Alric rencontre au hasard une personne née le même jour que lui avec la chance de gagner 100 € ou plus avec un Astro.

104 Léa n'a pas noté le numéro de téléphone d'un ami et n'a aucun moyen de le retrouver. Elle se souvient seulement qu'il débute par « 06 ». Elle doit absolument joindre cet ami, et décide donc de composer le 06, suivi de huit chiffres qu'elle compose au hasard sur son clavier.

Sacha, joueur régulier à l'EuroMillions, se moque d'elle et elle lui répond : « J'ai plus de chances de tomber sur le numéro de mon ami que toi de gagner le jackpot lorsque tu composes une grille à l'EuroMillions ». Commenter, sachant qu'il y a environ une chance sur 139 millions de gagner le jackpot à l'EuroMillions en composant une grille.



info

Les exercices **102** à **104** illustrent une méthode initiée par deux chercheurs de l'école polytechnique de Milan pour lutter contre la dépendance aux jeux d'argent. À l'aide des mathématiques, ils sensibilisent les joueurs en comparant leurs chances de gagner à des phénomènes issus de la vie quotidienne.

SPÉCIMEN

Analyse d'un énoncé

105 **Exercice commenté**

Un sondage est effectué auprès des 924 élèves d'un lycée pour connaître le nombre de sports qu'ils pratiquent.

Nombre de sport	0	1	2	3 et plus
Filles	48	235	135	34
Garçons	35	248	168	21

On choisit un élève du lycée au hasard.
On considère les événements suivants.
- F « l'élève est une fille » ;
- A « l'élève pratique au plus un sport » ;
- B « l'élève pratique au moins un sport ».

1. Calculer les probabilités de F, A et B.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille ou pratique au moins un sport.

› Le terme « ou » montre que l'on doit calculer la probabilité d'une réunion.

3. On choisit un élève parmi les garçons.
Calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$.

› On choisit au hasard parmi les garçons uniquement. Pour calculer la probabilité d'un événement contraire, on applique la formule du cours.

106 **Application immédiate**

Une entreprise effectue un sondage auprès de ses 270 salariés pour connaître leur moyen de transport pour se rendre sur leur lieu de travail.

	Voiture	Bus	Vélo
Femme	82	39	6
Homme	114	24	5

On choisit un salarié au hasard.
On considère les événements suivants.
- F « le salarié est une femme » ;
- A « le salarié utilise sa voiture » ;
- B « le salarié utilise un vélo ».

1. Calculer les probabilités de F, A et B.
2. Calculer la probabilité que le salarié soit une femme ou que le salarié utilise sa voiture.
3. Le salarié vient en bus. Calculer la probabilité que ce soit une femme.

107 Un samedi, Zoé souhaite rendre visite à ses grands-parents, à sa meilleure amie et à sa sœur.
Elle décide d'organiser au hasard l'ordre de ses visites.
1. Déterminer le nombre de circuits possibles.
2. On considère les événements :
- E : « le circuit commence par sa sœur » ;
- F : « le circuit se termine par ses grands-parents ».

a. Calculer la probabilité des événements E et F.
b. Calculer la probabilité que la visite commence avec sa sœur et se termine avec ses grands-parents.
c. Calculer la probabilité que la visite commence avec sa meilleure amie ou se termine avec sa sœur.
3. Calculer la probabilité que ses visites débutent ou se terminent avec sa sœur.

108 Lors d'un goûter, des amis sont regroupés autour de trois galettes : deux à la frangipane et une brioche. Chaque galette possède une seule fève et chacune est découpée en dix parts égales.



1. Recopier et compléter le tableau suivant avec le nombre de parts correspondantes dans chaque cas.

	Frangipane	Brioche	Total
Avec fève			
Sans fève			
Total			

2. La première personne choisit une part au hasard.
On considère les événements F « la part est à la frangipane » et S « la part est sans fève ».
a. Calculer la probabilité que la part choisie soit à la frangipane et sans fève.
b. Décrire par une phrase l'événement $\overline{F} \cup \overline{S}$ et calculer sa probabilité.
c. A-t-on l'égalité $P\left(\overline{F \cup S}\right) = P\left(\overline{F} \cup \overline{S}\right)$?
3. La première personne a choisi une part briochée et n'a pas eu de fève.
Une deuxième personne choisit une part.
Calculer la probabilité que la part possède une fève.

109 On place dans un sac trois boules indiscernables au toucher, deux vertes et une rouge.
On procède au tirage avec remise de trois boules du sac, en notant à chaque tirage la couleur de la boule obtenue avant de la remettre.
1. Quelle est la probabilité de tirer trois boules rouges ?
2. Quelle est la probabilité de tirer trois boules vertes ?
3. Quelle est la probabilité de tirer trois boules qui ne sont pas toutes de la même couleur ?
4. Calculer la somme des probabilités obtenues aux trois questions précédentes. Comment ce résultat peut-il s'expliquer ?

SPÉCIMEN

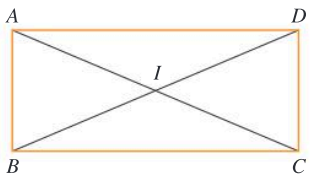
110 La grille ci-dessous représente un jeu de « bataille navale » sur lequel sont disposés cinq « navires » : deux « croiseurs » occupant deux cases, et trois « torpilleurs » occupant une seule case.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		■						
B		■						
C						■		
D								
E					■	■		
F								■
G								
H	■							

1. Un joueur, qui ignore le placement des navires, choisit au hasard une case de la grille pour son premier « tir » (par exemple, F-3).
Calculer la probabilité des événements suivants :
a. le tir est « dans l'eau » ;
b. le tir touche un navire ;
c. le tir touche un torpilleur.
2. Dans cette question, on suppose que le joueur, pour son premier tir, choisit toujours une case située au bord de la grille.
Quelle est la probabilité que ce joueur touche un navire ?
3. Dans cette question, on suppose que le joueur, pour son premier tir, choisit toujours l'un des quatre coins de la grille.
Quelle est la probabilité qu'il touche un navire ?

111 Un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, a été truqué de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face soit proportionnelle au numéro marqué sur cette face. On lance ce dé une fois.
1. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un 5 ou un 6 », ainsi que celle de son événement contraire.

112 $ABCD$ est un rectangle de centre I qui n'est pas un carré.



On place dans un sac cinq jetons indiscernables au toucher portant chacun l'une des lettres A, B, C, D ou I. On tire au hasard trois jetons représentant trois points du plan.
Calculer les probabilités des événements suivants :
1. les trois points sont alignés ;
2. les trois points forment un triangle rectangle ;
3. les trois points forment un triangle isocèle.

113 Une agence de voyage propose des circuits touristiques passant par les trois plus grandes villes françaises : Paris, Marseille et Lyon. Un client intéressé choisit l'ordre dans lequel il visitera les trois villes.
1. Parmi combien de circuits différents un client a-t-il le choix ?
2. Un client décide de prendre un circuit au hasard parmi toutes les possibilités. Calculer la probabilité que :
a. son circuit commence par Paris ;
b. son circuit se termine par Marseille ;
c. son circuit commence par Paris et se termine par Marseille ;
d. son circuit passe par Lyon juste avant de passer par Marseille.

114 PYTHON Un jeu consiste à tirer un premier jeton dans une urne qui en contient dix numérotés de 1 à 10. On lance ensuite un dé équilibré. La partie est gagnée si la valeur du dé est strictement supérieure à celle du jeton.
1. On donne ci-dessous une fonction Python simulant le tirage du jeton.

```
#importation de la fonction randint
from random import randint

def jeton():
    return randint(1,10)

def dé():
    ...

def jeu():
    if ...
        return 1
    else :
        return ...
```

Compléter la fonction dé renvoyant la valeur du dé et la fonction jeu qui renvoie 1 si la partie est gagnée et 0 si elle est perdue.
2. La fonction victoire ci-contre donne la fréquence de victoires pour n parties.

```
def victoire(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S += jeu()
    return S/n
```

Interpréter les résultats ci-contre.

```
>>> victoire(1000)
0.242
>>> victoire(1000)
0.234
>>> victoire(1000)
0.245
```

3. À l'aide d'un tableau à double entrée, calculer la valeur exacte de la probabilité de gagner.

SPÉCIMEN

3 Probabilités conditionnelles

115 On lance une fois deux dés tétraédriques équilibrés, numérotés de 1 à 4. On s'intéresse à la somme des résultats obtenus.
On note A et B les événements respectifs « Le premier dé donne 2 » et « Le résultat est pair ».
1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. Calculer $P(A \cap B)$.
3. En déduire $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

116 On donne le tableau d'effectifs suivant, où A, B, C, D et E sont des événements.

	A	B	C	Total
D	240	510	450	1 200
E	260	90	450	800
Total	500	600	900	2 000

On choisit un élément au hasard parmi les 2 000 constituant l'univers décrit ci-dessus.
Calculer les probabilités suivantes :
1. $P(A)$. **2.** $P(B \cap E)$.
3. $P_B(E)$. **4.** $P_E(B)$.
5. $P_A(D)$. **6.** $P_D(C)$.

117 Dans une classe de première comptant 35 élèves, 30 suivent la spécialité mathématiques et 21 la spécialité Anglais Monde Contemporain (AMC).
On choisit au hasard un élève de cette classe. On note M et A les événements respectifs « L'élève suit la spécialité mathématiques » et « L'élève suit la spécialité AMC ».
1. Construire un diagramme représentant la situation, sachant que $\frac{4}{7}$ des élèves suivent les deux spécialités.
2. Calculer la probabilité que l'élève suive la spécialité mathématiques mais pas la spécialité AMC.
3. Calculer la probabilité que l'élève suive la spécialité AMC sachant qu'il suit la spécialité mathématiques.
4. Calculer $P_{\overline{M}}(\overline{A})$.

118 On considère deux événements A et B de probabilités non nulles, tels que $P(\overline{A}) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}16$. Déterminer $P_A(\overline{B})$.

119 Vrai ou faux ?
On considère deux événements C et D tels que $P(C) = 0{,}3$; $P_C(D) = 0{,}25$ et $P_{\overline{C}}(D) = 0{,}3$.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
1. $P(\overline{C}) = 0{,}7$ **2.** $P(C \cap D) = 0{,}05$
3. $P_C(\overline{D}) = 0{,}75$ **4.** $P(\overline{C} \cap D) = 0{,}21$

120 Dans chaque cas, construire l'arbre correspondant à la situation.
1. Sur les réseaux sociaux, on estime que 40 % des utilisateurs seulement vérifient une information avant de la partager. Parmi eux, 10 % partagent tout de même une fake news, mais cette valeur monte à 45 % pour ceux qui ne vérifient pas l'information. On choisit au hasard un utilisateur des réseaux sociaux confronté à une fake news.
2. On s'intéresse à l'orientation d'un groupe d'élèves de seconde. 55 % des élèves du groupe souhaitent suivre la spécialité mathématiques ; et, parmi eux, 60 % souhaitent également suivre la spécialité physique chimie. Parmi les élèves ne souhaitant pas prendre la spécialité mathématiques, 95 % ne souhaitent pas non plus suivre la spécialité physique chimie.
On choisit au hasard un élève du groupe.

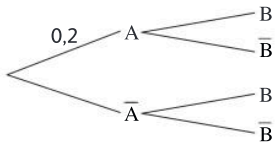
121 À l'entrée d'un parc naturel, un sondage est distribué aux randonneurs. On leur demande s'ils utilisent des bâtons de randonnée et s'ils ont un niveau débutant, confirmé ou expert. Au total, 200 personnes ont répondu.
Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau suivant :

	Avec bâtons	Sans bâtons	Total
Débutant	15	75	90
Confirmé	43	42	85
Expert	22	3	25
Total	80	120	200

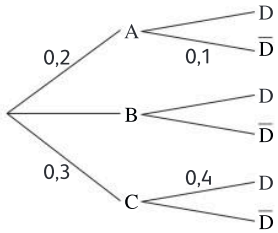
On choisit au hasard un randonneur ayant répondu à cette étude.
On considère les événements :
B : « Le randonneur utilise des bâtons »,
D : « Le randonneur est d'un niveau débutant »,
C : « Le randonneur est d'un niveau confirmé »,
et E : « Le randonneur est d'un niveau expert ».
1. Calculer la probabilité que le randonneur n'utilise pas de bâtons.
2. Calculer la probabilité que le randonneur soit débutant et n'utilise pas de bâtons.
3. Sachant que le randonneur est débutant, quelle est la probabilité qu'il utilise des bâtons ?
4. On sait que $P_{\overline{B}}(C) = 0{,}35$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

122 Recopier et compléter l'arbre suivant sachant que :
$P(A \cap B) = 0{,}14$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}32$.

SPECIMEN



123 Soient A, B, C et D quatre événements de probabilités non nulles. On considère l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Calculer $P(B)$, $P_A(\overline{D})$ et $P_C(D)$.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(C \cap D)$.
3. Déterminer $P_B(D)$ sachant que $P(B \cap D) = 0{,}1$.
4. On suppose que $P(D) = 0{,}4$.
Calculer $P_D(A)$, $P_D(B)$ et $P_D(C)$.

124 Un sac contient 10 billes qui sont soit de couleur bleue, soit de couleur rouge. Chaque couleur est présente à parts égales dans le sac. On tire au hasard, successivement et sans remise deux billes. On note B_1 l'événement « La première bille tirée est bleue » et B_2 l'événement « La seconde bille tirée est bleue ».
1. Décrire l'événement $\overline{B_1}$ à l'aide d'une phrase, puis calculer sa probabilité.
2. Calculer la probabilité que la seconde bille :
a. soit bleue sachant que la première l'est.
b. soit rouge sachant que la première l'est.
3. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
4. Calculer la probabilité d'avoir tiré deux billes de couleurs différentes.

125 Chaque semaine Loéva achète des cornichons. Six fois sur dix elle choisit des extra-fins, sinon elle prend des normaux.
Lorsqu'elle achète des extra-fins, elle finit le bocal avant la fin de la semaine dans 85 % des cas, contre 55 % sinon.
On s'intéresse à une semaine choisie au hasard et on note E l'événement « Loéva achète des cornichons extra-fins » et F l'événement « Loéva finit le bocal avant la fin de la semaine. »
1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité $P(E \cap F)$.
3. Calculer la probabilité que Loéva finisse le bocal de cornichons qu'elle vient d'acheter avant la fin de la semaine.
4. En déduire $P_F(E)$. On arrondira le résultat au centième.

126 Pour aller au lycée, Titouan prend son vélo une fois sur trois, sinon il prend le bus. Lorsqu'il fait le trajet à vélo, il ne pleut qu'une fois sur dix, mais lorsqu'il prend le bus, il pleut une fois sur 5. On s'intéresse à une journée au hasard où Titouan se rend au lycée.
On considère les événements :
V : « Titouan prend son vélo pour aller au lycée » et F : « Il pleut ».
1. Donner les probabilités $P_V(F)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{F})$.
2. Construire l'arbre pondéré traduisant la situation.
3. Sachant que $P(F) = \frac{1}{6}$, calculer :
a. $P_F(V)$
b. $P_{\overline{F}}(V)$
4. Construire l'arbre pondéré « inversé » du précédent, c'est-à-dire lorsque les événements F et $\overline{F}$ sont placés au premier niveau.

127 Une entreprise fabrique et vend des dés de toute sorte. Elle ne vend que les dés qui sont parfaitement équilibrés et donc ne présentent pas de défaut. La production de cette entreprise repose sur deux machines dont voici les caractéristiques :
- La machine A produit 65 % des dés, dont 95 % ne présentent pas de défaut ;
- 33,95 % des dés proviennent de la machine B et ne présentent pas de défaut.
On choisit un dé au hasard dans la production. On note les événements A : « Le dé provient de la machine A » et D : « Le dé ne présente pas de défaut ».
1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que le dé provienne de la machine B et présente un défaut.
3. Un employé de l'entreprise affirme que moins de 5 % des dés produits présentent un défaut. A-t-il raison ?
4. Calculer la probabilité que le dé provienne de la machine B sachant qu'il présente un défaut. On arrondira le résultat au centième.

128 À l'occasion du mois de l'imaginaire, un élève décide d'emprunter au hasard un livre au CDI, parmi 60 romans de fantasy et 40 de science-fiction. Parmi les romans de fantasy 30 % sont des romans d'auteurs français, contre 20 % pour ceux de science-fiction.
On note S l'événement « le livre choisi est un roman de science-fiction » et F « le livre choisi est un roman d'auteur français ».
1. Calculer la probabilité que l'élève choisisse un roman de fantasy.
2. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
3. Calculer la probabilité $P(S \cap F)$.
4. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse un roman dont l'auteur est français ?

SPÉCIMEN

BILAN

129 10min Activités sportives



À la salle de sport, Stéphane pratique trois activités : musculation (M), course (C) et corde à sauter (S).
Il décide d'organiser sa séance en choisissant l'ordre des activités au hasard.

1. a. Construire un arbre permettant de décrire toutes les façons d'organiser sa séance de sport.

b. De combien de façons peut-il organiser sa séance ?

2. On considère les événements suivants :

- A : « la séance commence par la course » ;
- B : « la corde à sauter est avant la musculation ».

a. Écrire A et B sous forme d'ensemble.

b. Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$ et indiquer le nombre d'issues que possède $A \cap B$.

c. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ et indiquer le nombre d'issues que possède $A \cup B$.

d. Décrire par une phrase l'événement $\overline{B}$ et indiquer le nombre d'issues que possède $\overline{B}$.

130 10min Lancer de deux dés

On lance deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4. On s'intéresse à l'écart entre le plus grand résultat et le plus petit.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant afin de connaître tous les écarts possibles.

2nd dé \ 1er dé	1	2	3	4
1	0	1	…	…
2	1	…	…	…
3	…	…	…	…
4	…	…	…	…

2. Établir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

3. a. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus ne soit pas nul.

b. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit au moins égal à 2.

c. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit un nombre premier.

4. Calculer la probabilité que l'écart entre les deux résultats obtenus soit divisible par 2 et que le premier dé affiche un résultat supérieur au deuxième dé.

5. Calculer la probabilité que l'écart soit un nombre impair ou égal à 2.

131 10min Habitude de paiement

À la sortie d'un centre commercial, on a enquêté sur les paiements des clients selon leur montant :

- les paiements par chèque ne sont pas acceptés pour des montants de 20 € ou moins ;
- les paiements par carte bancaire représentent la moitié de l'ensemble des paiements ;
- 60 % des paiements ont un montant inférieur ou égal à 20 €.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	Carte bancaire	Espèces	Chèque	Total
Paiement de 20 € au plus	220			
Paiement de plus de 20 €				
Total			60	1 000

On interroge un client au hasard.

2. Quelle est la probabilité qu'il ait réglé en espèces ?

3. Quelle est la probabilité qu'il ait réglé au plus 20 € par carte bancaire ?

4. Quelle est la probabilité que le client ait réglé en espèce ou un montant supérieur à 20 € ?

5. Quelle est la probabilité que le client ait réglé par carte bancaire sachant qu'il a payé plus de 20 € ?

6. Peut-on dire qu'il y a…

a. plus d'une chance sur deux que ce client ait payé plus de 20 € ?

b. moins d'une chance sur trois que ce client n'ait pas réglé par carte bancaire pour plus de 20 € ?

c. plus de deux chances sur trois que le client ait réglé en espèce sachant qu'il a payé 20 € au plus ?

132 20min Fractions aléatoires

Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher. L'urne A contient des boules numérotées 1, 2, 3 et 4 ; l'urne B contient des boules numérotées 2, 3, 4 et 6.
On tire une boule numérotée a dans l'urne A et une boule numérotée b dans l'urne B pour former la fraction $\frac{a}{b}$, écrite sous sa forme irréductible.

1. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2. On considère les événements :
U : « la fraction est supérieure à 1 » ;
V : « le dénominateur est pair ».

a. Calculer $p(U)$ et $p(V)$.

b. Calculer $p(\overline{U} \cap V)$.

c. Calculer $p(U \cup V)$.

SPECIMEN

133 15min **QCM**

Dans les questions 1 et 2, on considère les événements A et B tels que
$P(A)=0,44$; $P(B)=0,4$; $P(\overline{A}\cup B)=0,8$.

1. $P(\overline{A})$ est égale à :

a. 0,56 **b.** 1,44 **c.** −0,56 **d.** $1-P(1)$

2. $P(\overline{A}\cap B)$ est égale à :

a. 0,04 **b.** 0,84 **c.** 0,16 **d.** 0,96

3. Dans un univers on a deux événements C et D tels que $P(C)=0,3$ et $P(\overline{D})=0,4$.

a. $P(D)=0,6$ **b.** $P(C\cup\overline{D})=0,7$

c. $P(\overline{C}\cap\overline{D})\leqslant 0,4$ **d.** $P(C\cup D)\leqslant 0,9$

Dans la suite, on considère deux événements E et F tels que $P(E)=0,45$; $P(F)=0,38$, $P_E(F)=0,6$ et $P_{\overline{E}}(\overline{F})=0,8$.

4. $P_E(\overline{F})$ est égale à :

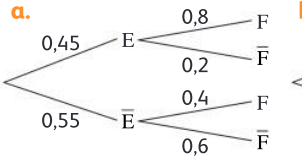
a. 0,55 **b.** 0,4 **c.** 0,62 **d.** 0,27

5. $P(E\cap F)$ est égale à :

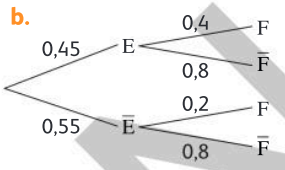
a. 0,27 **b.** 0,11 **c.** 0,171 **d.** 0,228

6. L'arbre pondéré correspondant est :

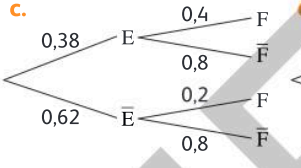
a.



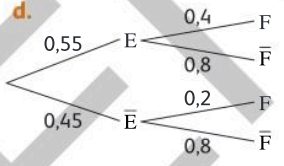
b.



c.



d.

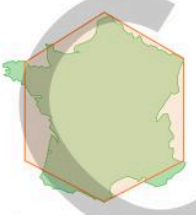


APPROFONDISSEMENT

134 Répartition de la population

Si on choisit une personne au hasard en France métropolitaine, la probabilité qu'elle habite l'Île-de-France est d'environ 0,19 (données au 01/01/2022).

On considère la France comme un hexagone régulier de 5 cm de côté, et la région Île-de-France comme un disque de 5 mm de rayon centré sur Paris, et on suppose une répartition équitable de la population sur le territoire.



Calculer, selon ce modèle, la probabilité qu'une personne choisie au hasard habite en Île-de-France. Que peut-on en conclure ?

Arrondir le résultat à 0,01.

Indice

Un hexagone régulier peut se décomposer en 6 triangles équilatéraux.

135 PRISE D'INITIATIVES On considère deux événements A et B tels que $P(\overline{A})=0,6$; $P(B)=0,5$ et $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,3$.

On cherche à déterminer la probabilité de l'événement $A\cap B$ de deux façons différentes.

1. Sans les probabilités conditionnelles

a. Comparer les événements $\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}$.

b. En déduire la probabilité de l'événement $A\cup B$.

c. Conclure.

2. Avec les probabilités conditionnelles

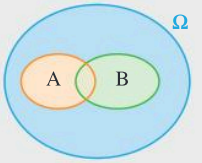
a. Déterminer $P_{\overline{A}}(\overline{B})$, puis $P_{\overline{A}}(B)$.

b. Comparer les événements B ; $A\cap B$ et $\overline{A}\cap B$.

c. Conclure.

Indice

Il peut être judicieux d'utiliser les diagrammes de Venn (schéma ci-contre) pour représenter certains événements à première vue complexes.



136 Tests diagnostiques

Informations

Pour l'étude des performances d'un test de dépistage d'une maladie, on choisit au hasard un volontaire ayant subi le test.

Si on appelle T l'événement « le test est positif » et M l'événement « l'individu souffre de la maladie étudiée », alors :

- la **sensibilité** du test est $P_M(T)$;
- la **spécifité** du test est $P_{\overline{M}}(\overline{T})$;
- lorsque le test est positif sur un individu non atteint par la maldie, on parle de **faux-positif** et lorsqu'il est négatif sur un individu malade, on parle de **faux-négatif**.

On considère une région dans laquelle 1 % de la population est atteinte d'une maladie.

Un laboratoire a mis au point un test pour le dépistage de cette maladie. Il donne les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu souffrant de la maladie présente un test positif est 0,95 ;
- la probabilité qu'un individu ne souffrant pas de la maladie présente un test négatif est 0,99.

SPECIMEN

1. Donner la sensibilité et la spécificité du test étudié.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. a. Comment note-t-on l'événement « un individu est un faux-positif » ? Calculer sa probabilité.
b. Calculer la probabilité qu'un individu soit un faux-négatif.
c. En déduire la probabilité que le test fournisse une indication erronée.

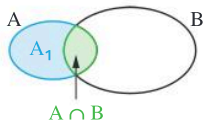
Démo
137 Démonstration d'une propriété du cours

On rappelle que si A *et* B *sont deux événements incompatibles alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Soient A et B deux événements non incompatibles.
L'objectif de l'exercice est de démontrer la propriété :

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On note A_1 l'événement formé des issues de A qui ne sont pas dans B.



1. a. Que peut-on dire des événements A_1 et $A \cap B$?
En déduire la probabilité de la réunion de A_1 et $A \cap B$.
b. Quelle est la réunion des événements A_1 et $A \cap B$?
En déduire l'égalité $P(A \cap B) = P(A) - P(A_1)$.
2. a. Que peut-on dire des événements A_1 et B ?
En déduire la probabilité de la réunion de A_1 et B.
b. Justifier que $P(A_1 \cup B) = P(A \cup B)$.
3. Démontrer que $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

138 Gagner à l'EuroMillions ?

1. L'ancienne version du loto de la Française des jeux consistait à cocher 6 numéros parmi 49 possibles.
À l'aide d'une ébauche d'arbre, dénombrer le nombre de grilles possibles.
En déduire la probabilité de gagner au loto avec cette version.



2. On admet que dans la version actuelle de l'EuroMillions, il existe environ 140 000 000 combinaisons possibles.
Des chercheurs canadiens ont évalué que la probabilité qu'une pièce tombe sur sa tranche est d'environ $\frac{1}{6\,000}$.
a. Calculer la probabilité que deux lancers consécutifs d'une pièce de monnaie tombent sur la tranche.
b. Comparer cette probabilité avec celle de gagner à l'EuroMillions.

3. On admet qu'une grille d'EuroMillions contenant une seule combinaison mesure 0,1 mm d'épaisseur.
En les plaçant les unes sur les autres, déterminer la hauteur obtenue par l'ensemble de toutes les combinaisons possibles, dont une seule est gagnante, d'un tirage de l'EuroMillions.

139 Paradoxe des anniversaires

Trois élèves se retrouvent convoqués dans une salle de classe, ils notent chacun leur anniversaire sur un papier. On cherche la probabilité qu'au moins deux d'entre eux aient noté la même date.
On supposera que les années ne sont pas bissextiles, il y a donc 365 jours dans l'année.
1. On va d'abord traiter le cas où seulement deux élèves sont convoqués. On pose l'événement A : « au moins deux élèves ont la même date d'anniversaire ».
a. Décrire l'événement contraire à l'aide d'une phrase.
b. On s'intéresse à l'événement $\overline{A}$. Combien de dates possibles a-t-on pour le premier élève ? Pour le second ?
c. Calculer la probabilité $P(\overline{A})$.
d. En déduire la probabilité $P(A)$.
2. Répondre à la question initiale.

Info
Dès qu'une classe comporte au moins 23 élèves, il y a plus d'une chance sur deux que deux élèves aient la même date d'anniversaire.

140

En supposant la répartition des naissances équitable sur tous les jours de l'année, quelle est la probabilité d'être né un 29 février ?

141 PRISE D'INITIATIVES

Valentin souhaite acheter un mini-croissant à 70 centimes. Il prend deux pièces au hasard dans son portemonnaie qui contient : 1 pièce de 50 centimes, 2 pièces de 20 centimes et 1 pièce de 10 centimes.
1. Quelle est la probabilité qu'il puisse acheter un mini-croissant ?
2. Un mini-pain au chocolat coûte 85 centimes. Quelle est la probabilité qu'il puisse l'acheter en prenant trois pièces au hasard ?

142 PRISE D'INITIATIVES

Chaque jour, 35 % des mails reçus par Benjamin sont indésirables. 95 % des mails indésirables sont automatiquement supprimés par son logiciel antivirus. Parmi les mails qui ne sont pas indésirables, l'antivirus en supprime 2 %.
Le fournisseur de l'antivirus affirme que son logiciel se trompe dans moins de 2 % des cas. Est-ce vrai ?

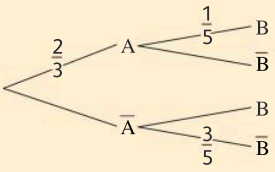
SPÉCIMEN

exercices Accompagnement personnalisé

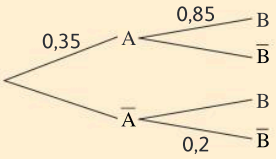
Maîtriser l'essentiel

143 Pour chacun des arbres suivants :

1. Arbre 1



2. Arbre 2



a. Lire la probabilité de A.
b. Lire la probabilité $P_A(B)$.
c. Calculer la probabilité $P(A \cap B)$.
d. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

144 On lance un dé truqué à six faces dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

1	2	3	4	5	6
0,1	0,1	0,2	0,1	0,2	p

1. Calculer la probabilité p_1 d'obtenir 6 au lancer.
2. Calculer la probabilité p_2 d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 3.

145 Dans une urne, il y a dix boules rouges, cinq boules vertes, quatre boules bleues et une boule noire, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule et on note sa couleur.
1. Établir la loi de probabilité de cette expérience.
2. Calculer la probabilité de ne pas avoir de boule noire.

146 On choisit au hasard une famille parmi les familles de deux enfants, en admettant qu'il y a autant de chances que chaque enfant soit un garçon (G) ou une fille (F). L'issue FG par exemple, indique une famille dont le premier enfant est une fille et dont le deuxième enfant est un garçon.
1. À l'aide d'un arbre, décrire toutes les compositions possibles de familles.
2. On note les événements A « le premier enfant est une fille » et B « la famille a un seul garçon ».
Calculer les probabilités suivantes puis interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

$$P(A) ; P(B) ; P(A \cap B) ; P(A \cup B) ; P(\overline{B})$$

147 On considère deux événements A et B de probabilités non nulles, tels que $P(A) = 0{,}4$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}39$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$.
1. Calculer $P_A(B)$.
2. Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation.

Aller plus loin

148 **Prise d'initiative**
Une urne contient cinq morceaux de papier indiscernables au toucher. Les morceaux de papier portent les inscriptions suivantes : 0, 3, 6, 9 et 10.
On en tire deux successivement et sans remise.
1. Calculer la probabilité que la somme des valeurs des morceaux de papier soit paire.
2. Même question si l'on tire trois morceaux de papier.

149 Lors d'un contrôle, Philippe doit répondre à trois questions d'un Vrai-Faux sans justifier sa réponse.
À chaque question, il décide de répondre au hasard.
Pour chaque question, on note les événements C « il répond correctement » et F « il répond faux ».
1. Construire un arbre traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que Philippe réponde correctement aux trois questions.
b. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à au moins une question.
3. Une réponse correcte rapporte un point, une réponse fausse ne rapporte aucun point.
Calculer la probabilité que Philippe ait obtenu deux points à ce Vrai-faux.

150 PRISE D'INITIATIVES Loïc organise un anniversaire pour trois de ses amis. Il a emballé les cadeaux avec des papiers de couleurs différentes : rouge, bleu et vert, mais il a oublié à qui ils étaient destinés. Il les distribue alors à tour de rôle et au hasard.

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2107

1. a. Déterminer le nombre total d'issues possibles pour cette expérience aléatoire.
b. Quelle est la probabilité que les cadeaux aient été correctement distribués ?
2. Calculer la probabilité que le cadeau bleu ait été distribué en premier ou en dernier.
3. Calculer la probabilité que les cadeaux vert et rouge aient été distribués à la bonne personne.
4. Calculer la probabilité que le cadeau rouge n'ait pas été distribué à la bonne personne.

151 PRISE D'INITIATIVES On lance une pièce de monnaie équilibrée trois fois de suite.

COUP DE POUCE hachette-clic.fr/26de2108

1. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir Pile.
2. Combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité de ne jamais obtenir Pile soit inférieure à 0,001 ?

SPECIMEN

TP Utiliser les outils numériques

Le problème du « grand-duc de Toscane »

Objectif TABLEUR
Simuler un lancer simultané de trois dés.



Au XVII^e siècle, en Toscane, le jeu « passe dix » consistait à lancer trois dés et à additionner les résultats : on gagnait si l'on obtenait plus de 10.
À ce jeu, les joueurs constataient qu'on obtenait plus souvent la somme 10 que la somme 9 alors qu'à partir de trois entiers compris entre 1 et 6, il y avait autant de façons d'obtenir ces deux sommes.
Comment expliquer ce paradoxe ?
On considère les événements :
- A : « la somme est égale à 9 » ;
- B : « la somme est égale à 10 ».

Partie A Une première approche

1. Pour obtenir une somme égale à 9 avec trois entiers compris entre 1 et 6, il y a six façons.
Par exemple 6 + 2 + 1 en est une.
Donner les cinq autres façons.

2. Pour obtenir une somme égale à 10 avec trois entiers compris entre 1 et 6, il y a également six façons. Lesquelles ?

3. Que semble-t-on pouvoir conjecturer pour les probabilités des événements A et B ?

Partie B Simulation à l'aide d'un tableur

À l'aide d'un tableur, on souhaite simuler un très grand nombre de lancers de trois dés et calculer les fréquences des sommes égales à 9 et à 10.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme		Nombre N de lancés	9649
2	4	4	5	13			
3	6	2	5	13		Sommes égale à 9	1066
4	6	2	1	9		Sommes égale à 10	1145
5	1	5	5	11			
6	2	1	6	9		Fréquence de la somme 9	0,11
7	6	5	2	13		Fréquence de la somme 10	0,119

1. a. Reproduire la feuille de calcul précédente (possibilité de partir du fichier fourni).

- Pour obtenir le nombre N de lancers, on utilise en G1 la fonction =NB(plage).
- Pour obtenir le nombre de sommes égales à 9, on utilise en G3 la fonction =NB.SI(plage;critère).

b. Quelle formule est entrée en G6 pour obtenir la fréquence de la somme 9 ?
- =1066/9649 • =G3/G1 • =G1/G3

2. Comparer les fréquences des sommes égales à 9 et à 10.

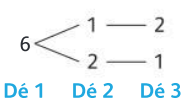
3. a. À l'aide de la touche F9, simuler plusieurs séries de N lancers.

b. Que peut-on conjecturer pour les probabilités des événements A et B ?
Est-ce cohérent avec la conjecture de la partie A ?

Partie C Modélisation du problème

1. On lance les trois dés et on s'intéresse au résultat de chaque dé.
Chaque dé possédant six issues, combien l'univers de cette expérience aléatoire possède-t-il d'issues ?

2. On suppose que le premier dé affiche 6.
Le « sous-arbre » ci-contre décrit les seules possibilités pour les deuxième et troisième dés donnant une somme égale à 9.



Construire cinq sous-arbres similaires indiquant toutes les possibilités pour obtenir une somme égale à 9 à partir du résultat du premier dé.

3. De la même manière, construire les six sous-arbres qui permettent d'obtenir une somme égale à 10.

4. En déduire les probabilités des événements A et B.
Comparer ces probabilités.

Partie D Réponse au problème historique

Comment expliquer le problème des joueurs toscans ? Quelle erreur était commise dans leur raisonnement ?

SPECIMEN

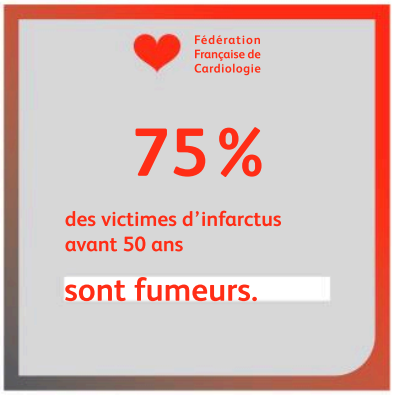
TP Mener une recherche

Compétence Chercher et communiquer

TP1 Journée mondiale sans tabac

TRAVAIL DE GROUPE

À l'occasion de la journée mondiale sans tabac 2023, dédiée au risque cardio-vasculaire lié au tabagisme, la Fédération française de cardiologie alerte sur les méfaits du tabac pour le cœur à travers cette infographie.



1. D'après l'infographie, quel est l'effet du tabac sur les victimes d'infarctus ?

2. On estime, qu'en France, en 2023, environ 15 % des personnes de moins 50 ans fument.

On prélève une personne parmi les Français de moins de 50 ans.

On note I : « la personne choisie a été victime d'un infarctus » et F : « la personne est fumeuse ».

a. Interpréter l'infographie en termes de probabilité.

b. Montrer que $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I}) = \dfrac{P_{\mathrm{I}}(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{I})}{P(\mathrm{F})}$.

c. En déduire que $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I}) = 5 \times P(\mathrm{I})$.

d. Exprimer $P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{I})$ en fonction de $P(\mathrm{I})$.

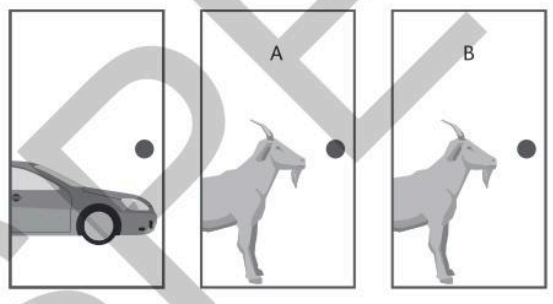
e. En déduire que $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{I}) = 17 \times P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{I})$.

Interpréter ce résultat.

TP2 Jeu de Monthy-Hall

Le jeu de Monty hall est une énigme probabiliste bien connue des mathématiciens. Elle est inspirée d'un jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*. Le principe est simple : face au candidat se trouvent trois portes fermées mais il ne peut en ouvrir qu'une seule. Derrière une de ces portes se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres une chèvre. Pour gagner il faut donc choisir la porte cachant la voiture.

Le candidat choisit une porte sans l'ouvrir.



Pour ménager le suspense, le présentateur du jeu ouvre une des deux portes que le candidat n'a pas choisies et derrière laquelle se trouve une chèvre !

Il laisse alors au candidat la possibilité de modifier son choix ou de le maintenir.

Le but de ce TP est de déterminer la meilleure stratégie que doit adopter le candidat.

Cas 1 : On suppose que le candidat reste sur son choix.

1. Énoncer les différents scénarios possibles.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. Déterminer la probabilité que le candidat gagne la voiture s'il ne change pas d'avis après l'ouverture de la porte par le présentateur.

Cas 2 : On suppose que le candidat modifie son choix.

4. Déterminer la probabilité que le candidat gagne la voiture s'il modifie son choix après l'ouverture de la porte par le présentateur.

5. Quel conseil donneriez-vous au candidat ?

Remarque

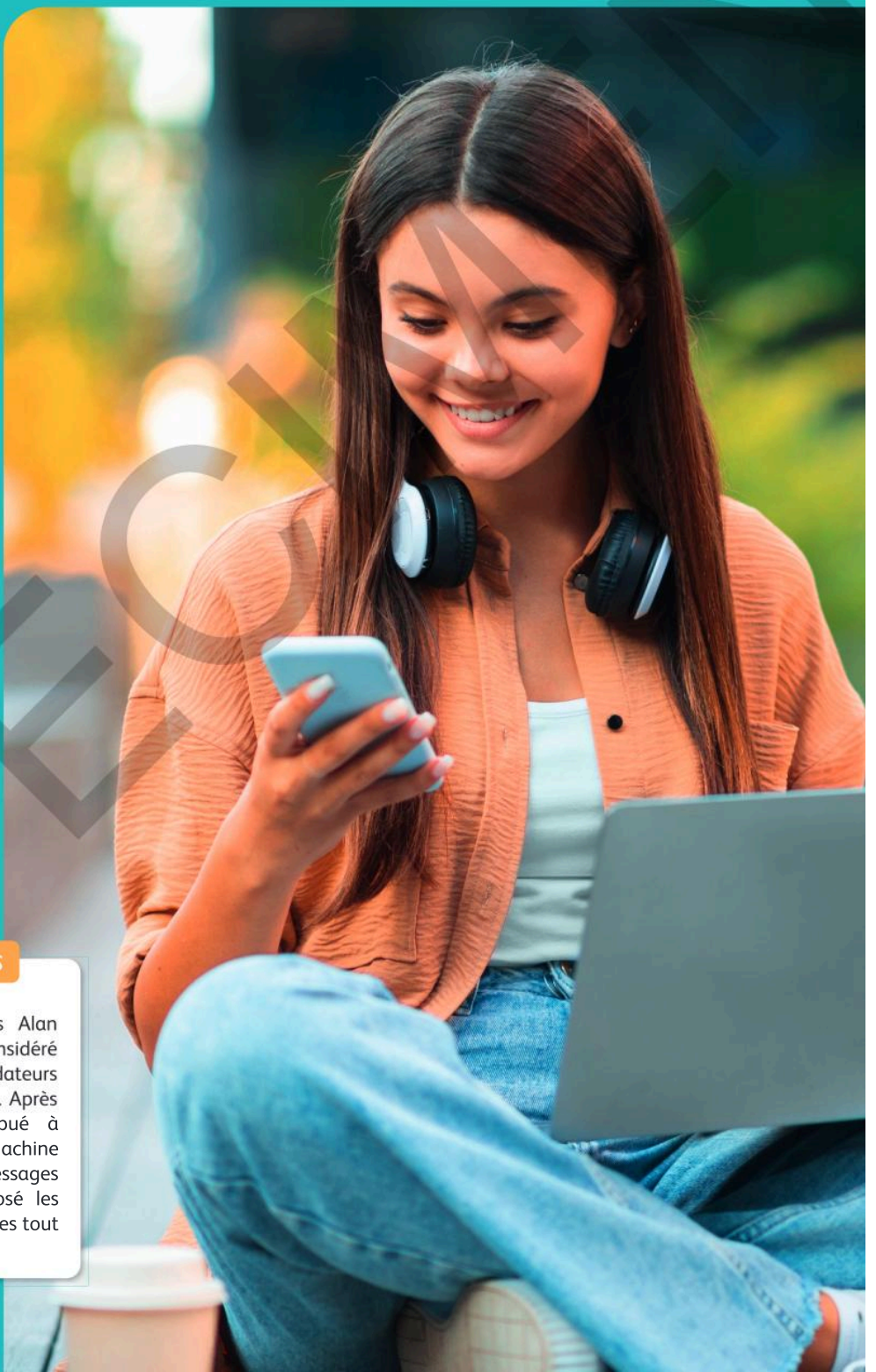
Ce jeu a alimenté des controverses pendant très longtemps à la fin du XX^{e} siècle, y compris entre mathématiciens de renom qui défendaient des raisonnements conduisant à des résultats différents. Il a ainsi été longtemps considéré comme un paradoxe en probabilités. La simulation statistique d'un très grand nombre de parties a toutefois permis de rallier une grande majorité à la solution suggérée dans l'énoncé ci-dessus.

SPÉCIMEN

Algorithmique et programmation

Les capacités du chapitre

- CAPACITÉ 1 — Concevoir une séquence d'instructions conditionnelles
- CAPACITÉ 2 — Lire, comprendre, modifier ou compléter un algorithme ou un programme
- CAPACITÉ 3 — Concevoir une séquence d'instructions itératives





Au fil du temps

Le mathématicien anglais Alan Turing (1912-1954) est considéré comme l'un des pères fondateurs de l'informatique moderne. Après avoir grandement contribué à casser les codes de la machine *Enigma*, qui cryptait les messages de l'armée nazie, il a posé les bases du fonctionnement des tout premiers ordinateurs.

SPÉCIMEN



Des maths partout !

La plupart des appareils électroniques qui nous entourent utilisent des programmes informatiques : des cartes à puce aux Smartphones, tablettes, montres connectées et même certains appareils électroménagers, trottinettes électriques et autres véhicules autonomes.

RESSOURCES DU CHAPITRE
hachette-clic.fr/26de2109

Partir d'un bon pied

A Diaporama pour tester les bases

ACTIVITÉS MENTALES RAPIDES

B Enchaînement d'opérations élémentaires

On considère les opérations suivantes.

A : « ajouter 3 »
B : « multiplier par 2 »
C : « élever au carré »
D : « prendre l'opposé »

1. a. Quelle est l'image de 2 par l'enchaînement « A suivi de B » ? Et celle de –5 ?

b. Mêmes questions pour l'enchaînement « B suivi de A ».

c. Mêmes questions pour l'enchaînement « A suivi de C, suivi de D ».

d. Un nombre a pour image –1 après avoir exécuté l'enchaînement A suivi de B suivi de A. Quel est ce nombre ?

2. On considère un nombre x.
Exprimer, en fonction de x, son image par :

a. l'enchaînement « A suivi de B » ;

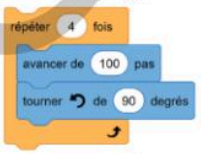
b. l'enchaînement « B suivi de A, suivi de C » ;

c. l'enchaînement « C suivi de D, suivi de A ».

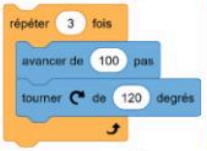
C Programmes en géométrie

On considère les trois scripts réalisés avec Scratch et les trois figures suivantes. Au début du programme, le chat est placé sur le rond et se déplace en direction de la flèche. Associer les scripts aux figures en justifiant votre choix.

Script ①



Script ②



Script ③

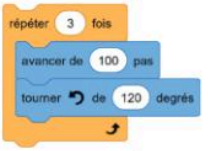


Figure ⓐ

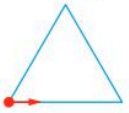


Figure ⓑ

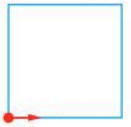
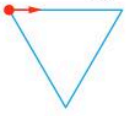
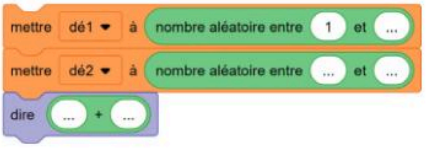


Figure ⓒ



D Compléter un programme

On lance deux dés cubiques et on ajoute les résultats obtenus. Compléter le programme Scratch ci-dessous de façon à simuler cette expérience.



SPECIMEN

activités

1 Variables et affectations

Objectif
Découvrir la syntaxe du langage Python.

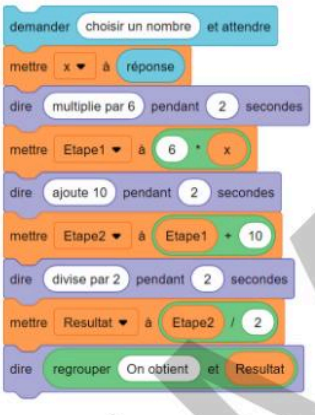
Partie A. Étude d'un programme de calcul

On propose ci-dessous une version d'un même programme réalisé avec Scratch et en Python.

Ce programme utilise quatre variables : x, Etape1, Etape2 et Resultat.

D'après un sujet du diplôme national du brevet.

```
x=int(input("Choisis un nombre"))
print("Multiplie par 6")
Etape1=6*x
print("Ajoute 10")
Etape2=Etape1+10
print("Divise par 2")
Resultat=Etape2/2
print("On obtient ",Resultat)
```



Pour chaque question, indiquer la bonne réponse.

1 La variable x contient :
a. un nombre
b. un texte
c. une image

2 L'instruction *dire* du langage Scratch se traduit en Python par :
a. `int()` b. `input()` c. `print()`

3 Louna a fait fonctionner ce programme en choisissant l'entier 5. À la fin de l'exécution le programme affiche :
a. On obtient 20 b. On obtient 15 c. On obtient 25

4 Si on appelle x le nombre choisi au départ, l'expression obtenue à la fin du programme est :
a. $3x+5$ b. $6x+5$ c. $3x+10$

Info



Le créateur du langage Python, Guido van Rossum, fan de la série *Monty Python's Flying Circus* a décidé de s'inspirer de ce nom pour baptiser son projet.

Partie B. Un second programme de calcul

Samuel a écrit en Python le programme ci-dessous.

```
x=int(input("Choisis un nombre"))
x=x+2
x=x*5
print("On obtient ",x)
```

Info Python

L'instruction `x=x+2` se lit « x prend la valeur $x+2$ »

1 Exécuter à la main le programme lorsque Samuel saisit la valeur 5 ; puis vérifier en exécutant le programme.

2 Trouver un nombre pour lequel le résultat affiché est le même avec le programme de Samuel qu'avec celui de Louna.

2 Écrire un programme de calcul

Objectif
Rédiger un programme en Python correspondant à une expression algébrique.

1 Écrire un programme en Python qui pour tout nombre choisi x affiche le nombre égal à $-2(x+4y)$ avec $y=-2x+1$.

2 Tester ce programme en calculant « à la main » les valeurs attendues pour $x=0$; $x=-4$ et $x=3$ puis comparer avec les valeurs affichées par le programme.

SPÉCIMEN

Activités

3 Instruction conditionnelle

Objectif
Comprendre l'affectation d'une variable et la manipulation d'une instruction conditionnelle.

On considère l'algorithme de calcul ci-contre où x désigne un nombre réel saisi par l'utilisateur.

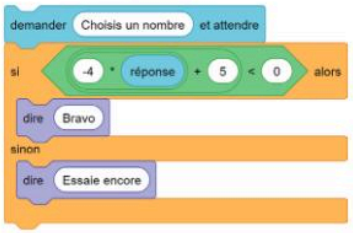
$x \leftarrow 4 \times x$
$x \leftarrow x + 5$

1 Vérifier que lorsque l'on choisit 2 pour valeur de x au départ, la variable x contient la valeur 13 à la fin de l'algorithme.

2 Quel nombre faut-il choisir au départ pour obtenir -3 au terme de l'algorithme ?

3 Soit le programme suivant écrit en Scratch et en Python.

Scratch



Python

```
1 x=float(input(
2 "Choisis un nombre"))
3
4 if -4*x+5<0:
5     print("Bravo")
6 else:
7     print("Essaie encore")
```

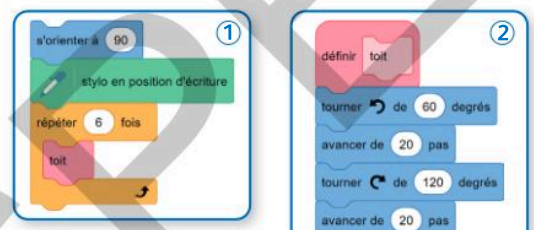
a. Salomé exécute ce programme. Quelle sera la réponse affichée si elle choisit le nombre 12 ?
b. Résoudre l'inéquation $-4x+5<0$. À quelle condition, portant sur le nombre choisi, est-on certain que la réponse du script sera « Bravo » ?

4 Proposer un programme écrit en langage Python qui demande un nombre et affiche son signe « positif » ou « négatif ».

4 Boucles et fonctions

Objectif
Découvrir la syntaxe d'une boucle en langage Python.

Le programme suivant, écrit dans les deux langages Scratch et Python, permet de dessiner une étoile à 6 branches.




```
from turtle import*
def toit():          ⓐ
    left(60)
    forward(20)
    right(120)
    forward(20)

setheading(0)        ⓑ
down()
for i in range(6):
    toit()

mainloop()
```

1 Associer chaque partie du programme Scratch (① ou ②) à une partie du programme Python (ⓐ ou ⓑ).

2 Que permet de tracer la fonction `toit()` ?

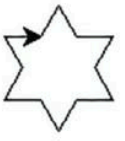
3 Ajouter une instruction à la fin de la fonction `toit()` afin d'obtenir le motif en zig-zag ci-contre.

4 Écrire une fonction `toit2()` permettant d'obtenir le motif ci-contre.

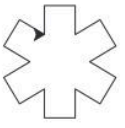
Scratch



Python







SPECIMEN

Cours

1 Variable et affectation

Définition Une **variable** est un *casier* de mémoire qui contient une information d'un certain **type**. Elle est désignée par un **nom**.

Type dans les algorithmes	Type en langage Python
• Nombre entier • Nombre réel • Booléen • Chaîne de caractères • Liste	• `int` : nombre entier • `float` : nombre réel • `boolean` : booléen • `str` : chaîne de caractères (*string* en anglais) • `list` : liste d'éléments

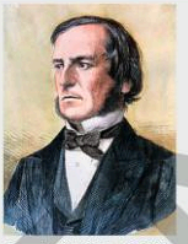
Remarque

Un booléen est une variable ne pouvant prendre que deux états notés Vrai (`True` ou 1) et Faux (`False` ou 0).

Définition L'**affectation** d'une variable est l'instruction permettant de « remplir » le *casier* correspondant.

Algorithmes	Langage Python
$X \leftarrow 5$	$X = 5$

Info



George Boole (1815-1864) est le créateur de l'algèbre binaire manipulant des éléments ne pouvant prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

Remarque

Quand on voit dans un programme Python `x=5`; il est prudent de dire « x prend la valeur 5 ».

2 Structure conditionnelle

a Langage algorithmique

Dans un algorithme, il peut être nécessaire d'exécuter un bloc d'instructions uniquement lorsque certaines conditions sont satisfaites.

Syntaxes

```
Si condition Alors
    instructions à exécuter lorsque
    la condition est vraie
Fin Si
```

```
Si condition Alors
    instructions à exécuter lorsque
    la condition est vraie
Sinon
    instructions à exécuter lorsque
    la condition est fausse
Fin Si
```

Exemple

L'algorithme suivant indique à l'utilisateur s'il est majeur ou mineur, *âge* étant un entier saisi par l'utilisateur.

```
Si âge ⩾ 18 Alors
  | Afficher « Vous êtes majeur. »
Sinon
  | Afficher « Vous êtes mineur. »
Fin Si
```

b Langage Python

```
x=float(input("Entrer un nombre relatif : "))

if x<0 :
    x = -x
print("La valeur absolue de ce nombre est :",x)
```

```
age=int(input("Quel est votre âge ?"))

if age>=18 :
    print("Vous êtes majeur.")
else :
    print("Vous êtes mineur.")
```

Les doubles points : marquent la fin des instructions de test ainsi que le début des instructions à exécuter. Ce bloc est indenté (le texte est décalé vers la droite).

La fin de l'indentation signifie la fin de la structure conditionnelle.

Remarque

L'instruction Si … alors … sinon si … se traduit par `if … :` `elif … :`

Voir programme exercice 2

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 1 Concevoir une séquence d'instructions conditionnelles

Énoncé Une compagnie de transports en commun propose à ses usagers deux modes de tarification.

Tarif A : 1,50 € le trajet.

Tarif B : 20 € par mois, puis 0,80 € le trajet.

1. L'algorithme ci-contre permet d'indiquer le tarif le plus avantageux suivant le nombre de trajets n effectués dans le mois, n étant un entier entré par l'utilisateur.

Compléter cet algorithme en précisant la signification des variables A et B.

```
A ← 1,5×n
B ← ...
Si ... Alors
    Afficher « Le tarif A est le plus intéressant. »
Sinon
    Afficher « Le tarif B est le plus intéressant. »
Fin Si
```

2. Programmer cet algorithme en langage Python, puis le tester pour différentes valeurs de n.

3. À partir de combien de trajets le tarif B est-il plus intéressant ? Justifier.

Solution rédigée

1. n représente le nombre de trajets effectués dans le mois. La variable A (resp. B) représente le prix d'achat pour n trajets mensuels au tarif A (resp. au tarif B). On complète l'affectation $B \leftarrow 20+0{,}80\times n$.

2. L'algorithme en Python

```
n=int(input("Nombre de trajets ?"))
A=1.5*n
B=20+0.8*n
if A<=B:
    print("Le tarif A est le plus intéressant.")
else:
    print("Le tarif B est le plus intéressant.")
```

3. Pour n trajets effectués, le prix de revient avec le tarif A (resp. B) est $1{,}5n$ (resp. $0{,}8n+20$). Le tarif B est plus intéressant que le A si et seulement si :

$$1{,}5n \geqslant 0{,}8n+20 \Leftrightarrow 0{,}7n \geqslant 20 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{20}{0{,}7} \Leftrightarrow n \geqslant 29$$

car n est un entier

À partir de 29 tickets, le tarif B est plus intéressant que le tarif A.

Point méthode

2. Les erreurs de syntaxe sont courantes et sont indiquées lors de l'exécution du programme. Attention, l'absence d'erreurs de syntaxe ne garantit pas que le programme est correct. Il est utile de le tester pour plusieurs valeurs de n.

Point méthode

3. Ne pas oublier que n est un entier !

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 400

1 Un imprimeur élabore des cartes de visite et propose à ses clients une facturation dégressive.

Le tarif est de 0,2 € par carte de visite jusqu'à la centième unité, puis de 0,15 € par carte supplémentaire.

1. Calculer le prix facturé pour 50 cartes de visite commandées, puis celui pour 150 cartes commandées.

2. Le programme Python ci-dessous affiche le tarif facturé pour x cartes de visite commandées.

Compléter ce programme, puis le tester.

```
x=int(input("Nombre de cartes commandées ?"))

if ... :
    tarif=0.2*x
else:
    tarif= ...

print(tarif)
```

2 Zorana a écrit un programme Python qui permet de savoir si un triangle est rectangle. Elle donne la longueur des côtés (par exemple $a=5$; $b=9$ et $c=8$) et le programme affiche si le triangle est rectangle, et précise alors la longueur de l'hypoténuse ou bien il affiche que le triangle n'est pas rectangle.

```
a, b, c = 5, 9, 8
if a**2 == b**2 + c**2 :
    print("tri. rect. et hypoténuse=",a)
elif b**2 == c**2 ...
    print("tri. rect. et hypoténuse=",...)
elif ...
    print(...)
else:
    print(...)
```

1. Compléter les parties manquantes du programme sachant que pour les côtés $a=5$; $b=9$ et $c=8$ le programme doit afficher « le triangle n'est pas rectangle ».

Rappel

en Python a**2 signifie a^2 et == teste une égalité.

2. Tester le programme dans les cas suivants :

- $a=5$; $b=3$ et $c=4$
- $a=12$; $b=13$ et $c=5$
- $a=1$; $b=5$ et $c=7$
- $a=12$; $b=35$ et $c=37$

SPÉCIMEN

Cours

3 Fonctions

La notion de fonction est très importante en informatique, elle permet de structurer un programme en le décomposant en sous-programmes.

a Qu'est-ce qu'une fonction ?

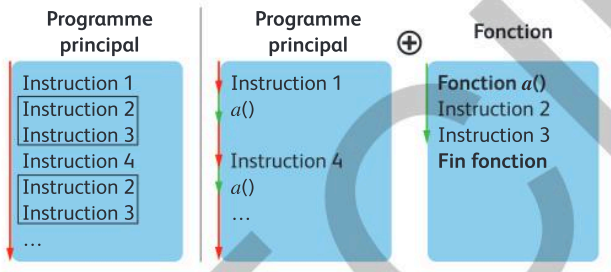
Définition Une **fonction** est une succession d'instructions regroupées dans un bloc que l'on désigne par un nom.

Intérêt des fonctions

- **Lisibilité** : elles rendent le programme principal plus lisible.
- **Répétabilité** : elles permettent d'éviter la redondance du programme. Il est assez courant d'avoir à répéter des blocs d'instructions, on les regroupe alors dans une fonction.
- **Flexibilité** : il est plus rapide de modifier une fonction que de modifier l'ensemble des parties du programme où elle est utilisée.

Remarque

Le schéma ci-dessous illustre la différence entre l'exécution d'un programme sans fonction (à gauche) et d'un programme avec fonction (à droite), où les instructions 2 et 3 sont regroupées dans une fonction a.



Exemple

On considère l'algorithme suivant calculant plusieurs volumes de pyramides à base carrée.
Soient c, h et v des variables réelles.

Sans fonction

$c \leftarrow 2$
$h \leftarrow 5$
$v \leftarrow (1/3)*c**2*h$
Afficher(v)
$c \leftarrow 0.5$
$h \leftarrow 10$
$v \leftarrow (1/3)*c**2*h$
Afficher(v)

Avec fonction

Fonction volume qui prend en paramètre les variables c et h.

Fonction volume(c, h)
  return $(1/3)*c**2*h$
Fin Fonction

Programme principal

Afficher(volume(2,5))
Afficher(volume(0.5,10))

b Construire une fonction en Python

Le langage Python permet aux programmeurs d'enrichir les bibliothèques de fonctions prédéfinies en créant leurs propres fonctions.

Structure générale d'une fonction en langage Python

```
def nomFonction(paramètres):
    #bloc d'instructions
    ...
    return ...
```

`def` est le mot clé permettant la construction d'une fonction.

Les paramètres (ou *arguments*) sont des variables nécessaires à sa bonne exécution. Certaines fonctions n'admettent aucun paramètre.

`return` est le mot clé qui permet à la fonction de renvoyer un contenu. Il n'est pas obligatoire.

Remarques

- On choisit un nom de fonction en rapport avec ce qu'elle fait pour rendre le programme principal plus intelligible.
- Sous Python, on retrouve le double-point « : » et l'indentation, indiquant le début et la fin de la fonction.
- De nombreuses bibliothèques de fonctions sont disponibles. Il faut au préalable les importer avec le mot clé `import`.

Exemple

```
from math import sqrt # Importe la fonction racine carrée.
from random import * # Importe toutes les fonctions de random.
import pylab as pl # Définit un raccourci pour utiliser pylab.
```

Exemple

L'algorithme ci-dessus en Python devient :

```
def volume(c , h):
    return (1/3)*c**2*h

print(volume(2,5))
print(volume(0.5,10))
```

Info Python

« c**2 » signifie c^2 en langage Python.

Info Python

La commande `help(fonction)` permet de donner une documentation sur la fonction saisie.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 2 Lire, comprendre, modifier ou compléter un algorithme ou un programme

Énoncé Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.

1. a. Exprimer le carré AB^2 de la distance AB en fonction des coordonnées x_A, y_A, x_B et y_B.

b. Programmer en langage Python une fonction `carre_dist` qui prend comme paramètres les coordonnées des points A et B et qui renvoie le carré de la distance AB.

2. Trois points A, B et C étant définis par leurs coordonnées, on se demande si le triangle ABC est isocèle. On souhaite résoudre ce problème en faisant appel à la fonction `carre_dist` et en utilisant la fonction `est_isocele` incomplètement reproduite ci-dessous. La compléter.

```
Fonction est_isocele(xA,yA,xB,yB,xC,yC)
    Si carre_dist(xA,yA,xB,yB) = ... Alors Afficher(« le triangle est isocèle en A ») Fin Si
    Si carre_dist(xA,yA,xB,yB) = ... Alors Afficher(« le triangle est isocèle en B ») Fin Si
    Si ... = ... Alors Afficher(« le triangle est isocèle en C ») Fin Si
Fin Fonction
```

3. Programmer en langage Python la fonction `est_isocele`, puis déterminer si le triangle ABC est isocèle ou non, dans chacun des cas suivants.

a. $A(-6\,;9)\,;B(3\,;11)\,;C(1\,;2)$ **b.** $A(4\,;-1)\,;B(2\,;5)\,;C(-1\,;3)$

Solution rédigée

1. a. $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$ Voir Chap. 6 p. 144

b.
```
def carre_dist(xA,yA,xB,yB):
    return(xB-xA)**2+(yB-yA)**2
```

2. On obtient :

```
Fonction est_isocele(xA,yA,xB,yB,xC,yC)
    Si carre_dist(xA,yA,xB,yB) = carre_dist(xA,yA,xC,yC) Alors
        Afficher(« le triangle est isocèle en A ») Fin Si
    Si carre_dist(xA,yA,xB,yB) = carre_dist(xB,yB,xC,yC) Alors
        Afficher(« le triangle est isocèle en B ») Fin Si
    Si carre_dist(xA,yA,xC,yC) = carre_dist(xB,yB,xC,yC) Alors
        Afficher(« le triangle est isocèle en C ») Fin Si
Fin Fonction
```

Point méthode

2. Pour nommer une fonction, il est intéressant d'utiliser un nom qui explicite ses caractéristiques. Ici, on a choisi l'adjectif isocèle et les coordonnées des sommets du triangle examiné, qui sont les paramètres utilisés par la fonction.

3. Cette fonction se traduit en langage Python par :

```
def est_isocele(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
    if carre_dist(xA,yA,xB,yB)==carre_dist(xA,yA,xC,yC):
        print("Le triangle ABC est isocèle en A.")
    if carre_dist(xA,yA,xB,yB)==carre_dist(xB,yB,xC,yC):
        print("Le triangle ABC est isocèle en B.")
    if carre_dist(xA,yA,xC,yC)==carre_dist(xB,yB,xC,yC):
        print("Le triangle ABC est isocèle en C.")
```

a. Le triangle ABC est isocèle en B.

b. L'exécution du programme n'affiche rien : ce triangle n'est pas isocèle.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 400

3 La fonction ci-contre est écrite en Python.

```
def f(x):
    if x>2:
        return x**2
    else:
        return 2*x
```

1. Que renvoie-t-elle lorsque x vaut 3 ?

2. On saisit `f(1)` dans la console. Qu'obtient-on ?

4 **1.** Compléter la fonction ci-contre pour qu'elle renvoie le maximum de deux valeurs passées en argument.

```
def maximum(a,b):
    if a<b:
        return...
    else:
        return...
```

2. Tester la fonction avec ces arguments :

a. a=2, b=5 **b.** a=5, b=3 **c.** a=3, b=3

SPECIMEN

Cours

4 Structures itératives : boucles

Les structures d'instructions itératives permettent de répéter un nombre fini de fois un même bloc d'instructions, on parle de **boucles**.

a Boucle bornée (Boucle *Pour* ou *for*)

Lorsque le nombre de répétitions est connu à l'avance, on parle de boucle *bornée* ou encore de boucle *Pour* (*for*).

Syntaxe

Pour i allant de a à b **Faire**
    bloc d'instructions
Fin Pour

Le **compteur** i prend successivement toutes les valeurs entières de a à b : il est automatiquement **incrémenté** d'une unité à chaque passage dans la boucle.

Pour chaque valeur prise par i, le bloc d'instructions est exécuté.

Syntaxe en langage Python

```
epargne=100
for i in range(1,25):
    versement=10*i
    epargne=epargne+versement

print(epargne)
```

En Python `range(a,b)` représente l'intervalle d'entiers $[a\,;b[$; donc `range(1,25)` est l'intervalle d'entiers $[1;25[$, soit tous les entiers compris entre 1 et 24 inclus.

Exemple

On dispose initialement de 100 € d'épargne. On verse 10 € le premier mois et ensuite chaque mois 10 € de plus que le mois précédent. On calcule l'épargne disponible au bout de 24 mois.

```
epargne ← 100
Pour i allant de 1 à 24 Faire
    versement ← 10×i
    epargne ← epargne+versement
Fin Pour
```

b Boucle non bornée (Boucle *Tant que* ou *while*)

Lorsque le nombre de répétitions est *a priori* inconnu, mais que l'on connaît un test d'arrêt, on parle de boucle *non bornée* ou encore de boucle *Tant que* (*while*).

Syntaxe

Tant que *condition* **Faire**
    bloc d'instructions
Fin Tant que

Si la *condition* est *vraie*, le bloc d'instructions est exécuté puis la *condition* est réévaluée. Si elle est *fausse*, on sort de la boucle.

Syntaxe en langage Python

```
epargne=100
i=0          #compteur initialisé
while epargne<1000:
    i=i+1 #compteur incrémenté
    versement=10*i
    epargne=epargne+versement

print(i)
```

Dans ce cas, il faut penser à initialiser le compteur **i** avant la boucle, puis l'incrémenter à chaque passage dans la boucle.

Exemple

On reprend l'exemple précédent et on souhaite déterminer à partir de quel mois l'épargne atteindra ou dépassera 1 000 €.

```
epargne ← 100
i ← 0
Tant que epargne<1 000
    i←i+1
    versement ← 10×i
    epargne ← epargne+versement
Fin Tant que
```

Remarque

De nombreux bugs informatiques sont liés à des boucles non bornées. En effet lorsque la condition de sortie est mal définie et n'est jamais atteinte, le programme ne peut sortir de la boucle et exécute une boucle infinie. Dans ce cas, il faut forcer le programme à cesser son exécution.

SPECIMEN

méthode

CAPACITÉ 3 Concevoir une séquence d'instructions itératives

Énoncé Tom dispose de 30 jetons. Il en pose un sur la 1re case d'un échiquier, puis deux sur la 2e, trois sur la 3e et ainsi de suite.

1. a. On souhaite appliquer l'algorithme ① ci-contre avec $n = 3$.
Compléter un tableau d'état des variables au fur et à mesure de l'exécution de l'algorithme.
Quelle est la valeur finale de la variable S ?

b. Comment utiliser cet algorithme dans le contexte de l'exercice ?

2. En construisant un tableau similaire au précédent, appliquer l'algorithme ②.
Quelle est la valeur finale de la variable k ?
Que représente-t-elle dans le contexte de l'exercice ?

①
```
S ← 0
Pour k variant de 1 à n Faire
    S ← S + k
Fin Pour
```

②
```
S ← 0
k ← 0
Tant que S ⩽ 30 Faire
    k ← k + 1
    S ← S + k
Fin Tant que
```

Solution rédigée

1. a. D'après le tableau d'état des variables, la valeur finale de S est 6.

Étapes	Valeurs de n	Valeurs de k	Valeurs de S
Initialisation	3	-	0
1er passage	3	1	0+1=1
2e passage	3	2	1+2=3
Dernier passage	3	3	3+3=6

b. Cet algorithme calcule la somme des entiers consécutifs de 1 à n. Ainsi, S contient au final la valeur $1+2+3+\cdots+n$. Il s'agit du nombre total de jetons posés sur les n premières cases de l'échiquier.

2. D'après le tableau d'état des variables, la valeur finale de k est 8.

Étapes	Valeurs de k	Valeurs de S	Test $S \leqslant 30$
Initialisation	0	0	Vrai
1er passage	1	0+1=1	Vrai
2e passage	2	1+2=3	Vrai
⋮	⋮	⋮	⋮
7e passage	7	21+7=28	Vrai
8e passage	8	28+8=36	Faux : sortie de boucle

Lorsque l'on dispose de trente jetons, on ne peut empiler des jetons de cette manière que sur les 8 premières cases de l'échiquier.

Point méthode
1. a. On applique pas à pas les instructions de l'algorithme en indiquant, à chaque étape, la valeur courante de chacune des variables de l'algorithme.
Ce tableau permet de bien comprendre le fonctionnement de l'algorithme et comment il agit sur chacune des variables mises en jeu.

Point méthode
2. Dans le cas des boucles *Tant que*, on peut indiquer, dans une colonne, le résultat (Vrai ou Faux) du test apparaissant dans la condition (ici $S \leqslant 30$). Cela permettra de connaître le moment où on sort de la boucle *Tant que*.

J'applique en autonomie

Voir corrigés p. 400

5 Modifier, programmer puis exécuter l'algorithme ② de l'exercice ci-dessus afin de déterminer le plus petit entier n pour lequel la somme $S = 1+2+3+\cdots+n$ dépasse 1 000.

6 Une fourmilière compte 200 fourmis. Chaque année, cette population augmente de 5 %.
On souhaite étudier son évolution sur 10 ans. Pour cela, on élabore l'algorithme incomplet ci-dessous.

```
pop ← …
Pour i variant de 1 à … Faire
    augmentation ← …
    pop ← pop+…
Fin Pour
Afficher pop
```

1. Compléter puis programmer cet algorithme en Python.
2. Modifier puis programmer cet algorithme afin qu'il affiche le nombre d'années nécessaires pour que cette fourmilière dépasse 1 000 fourmis.

7 On considère le programme Python ci-contre.

```
1def f(x):
2    return 2*x-3
3
4for a in range(-2 , 3):
5    print(a,f(a))
```

1. a. Exécuter le programme à la main.
b. Quel est son objectif ?
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2$ sur $I = [-5;5]$. Modifier le programme pour qu'il affiche le tableau de valeurs de f pour tous les entiers de I.

SPÉCIMEN

TP1 Des ensembles de points étonnants (affecter une variable)

Partie A Milieux successifs et triangle de Sierpiński

ABC est un triangle et M_0 le milieu du côté $[AB]$.
M_1 est défini à l'aide des instructions suivantes :
- choisir un des sommets de ABC au hasard : on l'appelle S ;
- construire M_1 milieu de $[SM_0]$.

M_2 est défini à l'aide des instructions suivantes :
- choisir un des sommets de ABC au hasard : on l'appelle S ;
- construire M_2 milieu de $[SM_1]$.

De façon générale, M_{k+1} est défini à l'aide des instructions suivantes :
- choisir un des sommets de ABC au hasard : on l'appelle S ;
- construire M_{k+1} milieu de $[SM_k]$.

L'objectif est de visualiser l'ensemble des points M_k à l'aide du programme ci-contre.

1. Compléter la fonction milieu sachant que xM et yM sont les coordonnées du milieu des points de coordonnées (xA,yA) et (xB,yB).
2. Tester le programme pour 100 points à l'aide de la commande sierp(100), puis pour 1 000 ou 10 000 points.

```
from random import randrange
from matplotlib import pyplot as plt

def milieu(xA, yA, xB, yB):
    xM = ...
    yM = ...
    return xM, yM

def sierp(nbpts):
    X_ABC, Y_ABC = [-1, 1, 0], [0, 0, 1.73205]
    X, Y = [0], [0]

    for k in range(nbpts):
        sommet = randrange(3)
        xM, yM = milieu(X_ABC[sommet], Y_ABC[sommet], X[k], Y[k])
        X.append(xM)
        Y.append(yM)

    plt.axis ([-1.1, 1.1, -0.1, 1.8])
    plt.plot(X_ABC, Y_ABC, 'or', markersize = 3)
    plt.plot(X, Y, '.b', markersize = 3)
    plt.show()
```

Partie B Symétrique de deux points

ABC est un triangle et M_0 le milieu du côté $[AB]$.
M_1 est défini à l'aide des instructions suivantes :
- choisir un des sommets de ABC au hasard : on l'appelle S ;
- construire P_0 symétrique de M_0 par rapport à S ;
- construire M_1 milieu de $[SP_0]$.

De façon générale, M_{k+1} est défini à l'aide des instructions suivantes :
- choisir un des sommets de ABC au hasard : on l'appelle S ;
- construire P_k symétrique de M_k par rapport à S ;
- construire M_{k+1} milieu de $[SP_k]$.

L'objectif est de visualiser l'ensemble des points M_k à l'aide du programme ci-contre.

1. Compléter la fonction milieu.
2. Compléter la fonction symetrique sachant que xS et yS sont les coordonnées du symétrique du point de coordonnées (xB,yB) par rapport au point de coordonnées (xA,yA).
3. Tester le programme pour 100 points à l'aide de la commande sierp(100), puis pour 1 000 ou 10 000 points.

```
from random import randrange
from matplotlib import pyplot as plt

def symetrique(xA, yA, xB, yB):
    xS = ...
    yS = ...
    return xS, yS

def milieu(xA, yA, xB, yB):
    xM = ...
    yM = ...
    return xM, yM

def sierp(nbpts):
    X_ABC, Y_ABC = [-1,1,0], [0, 0, 1.73205]
    X, Y = [0], [0]

    for k in range(nbpts):
        sommet = randrange(3)
        xS, yS = symetrique(X_ABC[sommet],Y_ABC[sommet], X[k], Y[k])
        xM, yM = milieu(X_ABC[sommet],Y_ABC[sommet], xS, yS)
        X.append(xM)
        Y.append(yM)

    plt.axis([min(X), max(X), min(Y), max(Y)])
    plt.plot(X_ABC, Y_ABC, 'or', markersize = 3)
    plt.plot(X, Y, '.b', markersize = 3)
    plt.show()
```

SPECIMEN

TP2 Nombres parfaits (for, if)

Un nombre parfait est un entier égal à la somme de ses diviseurs propres (autres que lui-même).
Par exemple, 6 a pour diviseurs propres 1 ; 2 et 3 ; et $1 + 2 + 3 = 6$, donc 6 est un nombre parfait.
L'objectif de ce TP est d'écrire un programme permettant de trouver tous les nombres parfaits inférieurs ou égaux à une valeur saisie par l'utilisateur.

1. a. 9 est-il un nombre parfait ?
b. Montrer que 28 est un nombre parfait.
2. a. Effectuer, à la main, la division euclidienne de 124 par 11.
b. Dans la console Python, saisir `124%11`, et observer le résultat.
3. Recopier le code suivant et l'expliquer.

```
for i in range(1,124):
    if 124%i == 0:
        print(i,"est un diviseur propre de 124")
```

4. Écrire la fonction `somme_diviseurs(n)` qui renvoie la somme des diviseurs propres de l'entier `n` entré en paramètre.
5. Construire la fonction `est_parfait(n)` qui affiche tous les entiers parfaits strictement inférieurs à `n`.
6. Déterminer les cinq premiers nombres parfaits.

TP3 Nombres amicaux (for, if)

Des nombres amicaux sont deux entiers tels que la somme des diviseurs propres (différents du nombre lui-même) de chacun des deux nombres est égale à l'autre nombre.
Par exemple, les nombres 220 et 284 sont amicaux :
- diviseurs propres de 220 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 et 110. Leur somme est 284.
- diviseurs propres de 284 : 1 ; 2 ; 4 ; 71 et 142. Leur somme est 220.

Le but du TP est d'écrire un programme qui trouve et affiche toutes les paires de nombres amicaux inférieures ou égales à un nombre donné par l'utilisateur.
1. La fonction `input()` permet à l'utilisateur de saisir une chaîne de caractères.
Expliquer l'instruction suivante :

```
n=int(input("Entrer un entier"))
```

2. À l'aide d'une boucle `for`, rechercher tous les couples de nombres amicaux qui sont tous les deux inférieurs ou égaux à un nombre entier choisi par l'utilisateur.

TP4 Variantes

Partie A Nombres « copains » (for, if)

Deux nombres sont « copains » si chacun est la somme des diviseurs pairs de l'autre.

Construire la fonction `copains(n)` qui affiche la liste de toutes les paires de nombres inférieurs ou égaux à `n` qui sont « copains ».

Partie B Nombres qui ont le « Déclic » (for, if)

Deux nombres ont le « Déclic » si les sommes des carrés de leurs diviseurs sont égales.
Par exemple, 6 et 7 ont le « Déclic » en effet :
– pour 6, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 = 50$
– pour 7, on a : $1^2 + 7^2 = 50$

1. Construire la fonction `declic(n)` qui affiche la liste de toutes les paires de nombres inférieurs ou égaux à `n` qui ont le « Déclic ».
2. Adapter le programme pour déterminer s'il existe des entiers qui ont le « Triple Déclic » : les sommes des cubes de leurs diviseurs sont égales.

SPECIMEN

TP5 Le jeu du juste prix (while, if)

À la fin du jeu télévisé « Le juste prix », les joueurs pouvaient estimer le prix d'une vitrine de cadeaux dans un temps limité.
À chaque proposition, l'animateur indiquait si elle était plus petite ou plus grande que le prix exact.
Le but du programme est de recréer cette partie du jeu. Pour que le jeu ne soit pas trop long, on fera deviner un nombre entre 0 et 100.

1. La bibliothèque `random` de Python permet d'accéder à bon nombre de fonctions générant le hasard. L'une d'entre elles, `randint()`, permet de choisir aléatoirement des nombres entiers compris entre deux valeurs entrées en paramètre. Saisir le code suivant dans la console Python, puis l'exécuter :

```
from random import randint
randint(1,100)
```

2. Recopier le code suivant et l'expliquer.

```
from random import randint

vitrine = randint(1,100)
c = int(input("Choisir un entier"))
if c < vitrine:
    print("trop petit")
```

Aide

`int()` permet de convertir ce qui est passé en paramètre en une valeur entière.

3. Compléter cette partie du programme pour traiter les autres cas possibles (« trop grand » et « gagné ») en utilisant les instructions `elif` et `else`.

4. La durée du jeu étant inconnue, le choix de la boucle est clair. En revanche, la condition d'arrêt l'est moins.

a. Indiquer la ligne du programme où la fin du programme doit se décider.

b. En s'inspirant de l'exemple (à ne pas saisir dans le programme) ci-dessous, l'adapter pour finir le programme.

```
# ~ Tant que je n'ai pas saisi
# ~ "Oui", la boucle continue

fin = False
while fin == False:
    c=input("Oui ou Non")
    if c=="Oui":
        fin = True
```

5. Pour améliorer le jeu, créer un compteur de coups, le nommer coups. Terminer le programme pour qu'il affiche le nombre de coups utilisés pour trouver le prix.

Remarque

Pour insérer le contenu d'une variable dans une chaîne de caractère, on peut utiliser la concaténation qui permet de « coller » des chaînes de caractères.
Par exemple :

```
texte="Vous avez gagné en"+str(coups)+"coups."
```

TP6 Le jeu des allumettes (While, if)

On dispose de 20 allumettes.
À chaque tour, le joueur ou l'ordinateur retire 1, 2 ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette a perdu.
En s'inspirant du TP5 programmer le jeu en respectant le cahier des charges suivant :

- Si le joueur choisit un nombre illégal d'allumettes, le programme lui redemande obligatoirement une nouvelle saisie. *On admet que le joueur n'est pas malveillant et saisit bien un entier.*
- Le nombre d'allumettes restantes est indiqué à chaque tour.
- L'ordinateur retire un nombre aléatoire d'allumettes entre 1 et 3, inférieur au nombre d'allumettes restantes.
- **Bonus :** Les allumettes s'affichent à chaque tour (on peut créer une fonction dédiée à l'affichage).

```
||||||||||||||||||||
Il reste  20  allumettes
Combien d'allumettes enlevez-vous ? 2
||||||||||||||||||
Il reste  18  allumettes
L'ordinateur enlève  3
|||||||||||||||
Il reste  15  allumettes
Combien d'allumettes enlevez-vous ? 4
saisie invalide
Combien d'allumettes enlevez-vous ? 3
||||||||||||
Il reste  12  allumettes
L'ordinateur enlève  3
|||||||||
Il reste  9  allumettes
Combien d'allumettes enlevez-vous ?
```

SPECIMEN

TP7 Initiation à Pygame (while, if) – Partie 1

Le module Pygame est dédié à la création de jeux en 2D. Il permet de poser des éléments graphiques et de les dessiner plusieurs fois par seconde donnant ainsi l'impression de mouvement.

Remarque

Il faut vérifier que l'environnement de programmation utilisé permet d'utiliser Pygame ; EduPython le permet.

Le but du programme est de créer un jeu dans lequel une balle rebondit sur les parois de la fenêtre mais elle ne doit pas toucher le sol. Un personnage, dirigé par un joueur, doit l'en empêcher. Ce TP permet de gérer le personnage.

1. Télécharger le fichier *chapAlgo_TP7.py* qui contient le corps du programme ainsi que l'image *chapAlgo_TP7perso.png*.

Remarques

- *chapAlgo_TP7perso.png* est un carré de 100 × 100 pixels.
- Ce programme est décomposé en plusieurs zones dans lesquelles des instructions sont à écrire pour créer le jeu.

2. Sachant que la fenêtre a une taille de 640 × 480 et que l'origine du repère est située dans le coin supérieur gauche de la fenêtre, modifier le programme pour que le personnage soit situé au milieu et en bas de la fenêtre.

Aide

position_perso.topleft gère la position du dessin de l'image perso.

3. Saisir le code suivant et le placer dans la zone *#gestion des touches* au niveau de la zone *#zone jeu 2*.

```
if event.type = KEYDOWN:
    if event.key == K_RIGHT
        print("flèche droite appuyée")
```

Tester le code et observer ce qu'il se passe.

4. Pour déplacer le personnage horizontalement, il faut créer une variable `x_perso` qui contient son abscisse et `x_vecteur` qui modélise son déplacement.
Définir ces variables dans la *#zone des variables*.

5. Modifier le programme pour que, à chaque pression KEYDOWN, le déplacement `x_vecteur` augmente de 0,5 px lorsque la flèche droite est appuyée et −0,5 px lorsque la flèche gauche est appuyée.

Aide

- On peut changer cette valeur pour jouer sur la sensibilité du déplacement.
- Penser à déplacer le personnage en saisissant : `x_perso=x_perso+x_vecteur` dans la *#zone de jeu 1*.

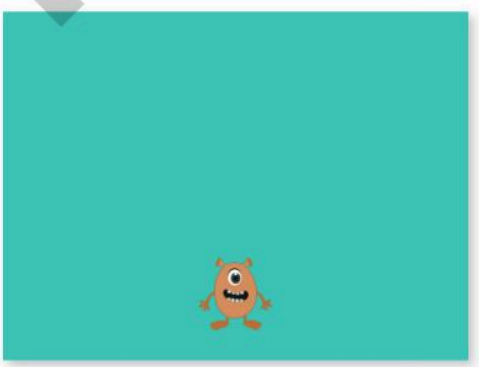
6. Gérer l'arrêt du déplacement lorsqu'on relâche la touche KEYUP.

7. Il faut empêcher le personnage de sortir de l'écran. Pour cela :

- si le bord du personnage déborde rendre la vitesse nulle ;
- replacer le personnage sur le bord.

Aide

Saisir cette partie dans la *#zone jeu 1* après avoir calculé la position du personnage.



TP8 Initiation à Pygame (while, if) – Partie 2

Après avoir réalisé le TP7 ou en téléchargeant le fichier *chapAlgo_TP8.py*, créer une balle qui rebondit sur les parois ou sur le personnage.
Si la balle touche le sol la partie se termine en indiquant `running=False`.

Remarque

Pour construire la balle, dans *#gestion balle*, on utilise l'instruction `pygame.draw.circle(fenetre,(255,255,255),(x_balle, y_balle),20)` où `x_balle` et `y_balle` sont des variables à définir.

SPECIMEN

TP9 Les équations de Pell-Fermat (affectation et type de variables/fonction)

Pierre de Fermat (1601-1665) a démontré que toute équation de la forme $nx^2+1=y^2$ avec n entier qui n'est pas un carré parfait, et x et y entiers non nuls, admet une infinité de solutions.

Partie A Recherche de solution

Pour certaines valeurs de n, on peut trouver un couple $(x\,;y)$ solution de l'équation en procédant par essai – erreur ; pour cela on teste les valeurs successives de x.

Trouver un couple solution pour :
$n=80$; c'est-à-dire $80x^2+1=y^2$
$n=2$; c'est-à-dire $2x^2+1=y^2$
$n=110$; c'est-à-dire $110x^2+1=y^2$
$n=5$; c'est-à-dire $5x^2+1=y^2$

Partie B Utilisation d'un programme

Le procédé étant répétitif, on peut utiliser un programme informatique.

```
1 from math import sqrt, floor
2
3 for x in range(1, 1000):
4     y = ...
5     if floor(y) == y:
6         print(x, y)
7 print("fin de la recherche")
```

La fonction `sqrt` permet d'obtenir la racine carrée et la fonction `floor` donne la partie entière.

1. Recopier le programme ci-dessus et compléter la ligne 4 afin de calculer la valeur de `y`.
2. Modifier la ligne 4 afin d'obtenir des solutions pour les équations de la partie A.
3. Pour éviter de changer à chaque fois l'expression de la ligne 4 et pour obtenir plus de solutions (c'est-à-dire tester plus de valeurs de `x`), on peut écrire la fonction suivante.

```
def equation(n, xmax):
    for x in range(1, xmax):
        y = ...
        if floor(y) == y:
            print(x, y)
    print("fin de la recherche")
```

Par exemple, pour résoudre l'équation $80x^2+1=y^2$ pour les valeurs de x allant de 1 à 10 000, il faudra demander `equation(80,10001)`.
Vérifier que `equation(80,10001)` donne trois couples $(x\,;y)$ solutions.

4. Déterminer (par essais-erreurs) une valeur de `xmax` permettant d'obtenir cinq couples $(x\,;y)$ solution de l'équation $5x^2+1=y^2$.
5. À l'aide de ce programme, trouver au moins une solution aux deux équations suivantes :
   - $73x^2+1=y^2$
   - $94x^2+1=y^2$

Partie C Typage des variables

1. Tester le programme précédent avec `equation(61,100000001)` (pour `x` allant jusqu'à cent millions !) et vérifier que l'on obtient six couples solutions. On note $(X\,;Y)$ les valeurs du premier couple affiché (aide : X vaut environ 42 millions !).
2. En utilisant la valeur de X trouvée par le programme, démontrer que le chiffre des unités de X^2 est 1.
3. En déduire quel devrait être le chiffre des unités de Y^2.
4. Interpréter le résultat obtenu par le programme.
Explication : la variable `y` est de type `float`(décimal) et le programme la compare à `floor(y)` de type `int` (entier) : à causes des approximations, c'est source d'erreur !

5. Compléter la fonction ci-dessous.

```
def equation(n, xmax):
    for x in range(1, xmax):
        # résultat dans une variable z
        ... = n * x**2 + 1
        # part. ent. de rac. carrée de z
        y = ...
        # comparaison de deux entiers
        if z == ...
            print(x, y)
    print("fin de la recherche")
```

6. À l'aide de cette dernière fonction, déterminer la plus petite valeur de x solution de l'équation (l'algorithme étant assez naïf, cela peut prendre quelques minutes…)

SPECIMEN

TP10 Nature d'un triangle (structure conditionnelle et opérateur booléen "or")

On choisit trois points A, B et C au hasard sur les nœuds d'un quadrillage 9×9 (les coordonnées de ces points sont donc des entiers de l'intervalle $[0;10[$).
Le but de ce travail est de répondre à la question suivante.
Déterminer l'événement qui a la plus grande probabilité parmi :

- « Obtenir un triangle ABC rectangle (éventuellement isocèle) » ;
- « Obtenir un triangle ABC isocèle (éventuellement rectangle) » ;
- « Obtenir un triangle ABC équilatéral ».

Partie A Expérimentation

Expérimenter sur un quadrillage (obtenir un nombre au hasard à l'aide de la calculatrice, d'un tableur, d'un dé…).

Partie B Programme

L'objectif est d'obtenir un grand nombre de simulations à l'aide du programme suivant :

```
1  from random import randrange
2
3  def cotes2(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
4      a2 = (xC - xB)**2 + ...
5      b2 = ...
6      c2 = ...
7      return a2, b2, c2
8
9  def est_tri(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
10     a2, b2, c2 = cotes2(xA, yA, xB, yB, xC, yC)
11     return a2*b2*c2!=0
12
13 def est_rect(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
14     a2, b2, c2 = cotes2(xA, yA, xB, yB, xC, yC)
15     if (a2 == b2 + c2) or (b2 == c2 + a2) or ... :
16         return 1
17     else:
18         return 0
19
20 def nature(tests):
21     n, nb_tri = 0, 0
22     for k in range(tests):
23         xA, yA = randrange(10), randrange(10)
24         xB, yB = randrange(10), randrange(10)
25         xC, yC = randrange(10), randrange(10)
26         if est_tri(xA, yA, xB, yB, xC, yB):
27             n = n + est_rect(xA, yA, xB, yB, xC, yC)
28             nb_tri = nb_tri + 1
29     return n / nb_tri
```

1. Compléter la fonction `cotes2` sachant qu'elle prend en paramètres les coordonnées des sommets du triangle et elle renvoie le carré des longueurs des côtés. Par exemple, si le triangle a pour sommets $A(0;1)$, $B(3;4)$ et $C(5;8)$, la fonction `cotes2(0,1,3,4,5,8)` doit retourner `(20,74,18)`.

2. Compléter la fonction `est_rect` sachant qu'elle prend en paramètres les coordonnées des sommets du triangle et elle renvoie `1` si le triangle est rectangle et `0` sinon.
Vérifier le programme : `est_rect(0,1,3,4,5,8)` doit renvoyer `0` et `est_rect(0,1,5,1,5,8)` doit renvoyer `1`.

3. À l'aide du programme, donner une estimation de la probabilité d'obtenir un triangle rectangle.
`nature(1000)` testera environ 1 000 triangles (pas de test pour ceux réduits à un point, mais les triangles aplatis seront pris en compte).

Aide

- `randrange(10)` renvoie un entier de l'intervalle $[0;10[$.
- `or` signifie « ou ».

4. S'inspirer du code de la fonction `est_rect` pour définir une fonction `est_isocele` qui prend en paramètres les coordonnées des sommets du triangle et qui renvoie `1` si le triangle est isocèle (éventuellement rectangle ou équilatéral) et `0` sinon.
Adapter la ligne 27 afin d'avoir une estimation de la probabilité d'obtenir un triangle isocèle.

5. a. S'inspirer du code de la fonction `est_rect` pour définir une fonction `est_equi` qui prend en paramètres les coordonnées des sommets du triangle et qui renvoie `1` si le triangle est équilatéral et `0` sinon.

b. À l'aide du programme, donner une estimation de la probabilité d'obtenir un triangle équilatéral (adapter la ligne 27).

c. On peut démontrer ce résultat à l'aide d'une démonstration par l'absurde : on suppose qu'il existe un triangle équilatéral ABC dont les sommets sont sur les nœuds du quadrillage.
① Démontrer alors que $\mathscr{A}$, l'aire du triangle, est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$; en déduire que $\mathscr{A}$ n'est pas un nombre rationnel.
② $\mathscr{A}$ peut être calculée comme la différence de l'aire d'un rectangle et de celle de trois triangles rectangles ; en déduire alors la nature du nombre $\mathscr{A}$.
③ Conclure.

SPÉCIMEN

TP11 Une rencontre improbable ?

Roméo et Juliette se sont donné rendez-vous dans le jardin des Capulet. On suppose que chacun arrive au hasard entre 22 h et 23 h, mais que le premier arrivé n'attend pas l'autre plus de 10 minutes.
Quelle est la probabilité p que Roméo et Juliette se rencontrent ?
Pour répondre à cette question, on va simuler un grand nombre de fois l'expérience et calculer la fréquence des rencontres.

1. Dans la console Python écrire :

```
>>> from random import randrange
>>> randrange(0,61)
```

Info

Cette fonction renvoie un entier dans l'intervalle $[0;61[$.

Le premier appel donne l'heure d'arrivée de Roméo, le second celui de Juliette.
Exemple :

```
>>> randrange(0, 61)
32
>>> randrange(0, 61)
7
```

signifie que Roméo arrive à 22 h 32 et Juliette à 22 h 07 : ils ne se sont pas rencontrés !

Répéter un certain de nombre de fois l'expérience et mettre en commun les résultats afin d'estimer la probabilité qu'ils se rencontrent.

2. Le programme ci-dessous simule n fois les heures d'arrivées de Roméo et de Juliette, et renvoie le nombre de fois où ils se sont rencontrés parmi ces n expériences simulées.

```
from random import randrange

def rdv(n):
    rencontre = 0
    for k in range(n):
        R, J = randrange(0, 61), randrange(0, 61)
        if abs(R - J) <= 10:
            rencontre = ...
    return ...
```

a. Sachant que la fonction `abs(x)` renvoie la valeur absolue de `x`, justifier que si le test est vrai alors la rencontre a lieu.

b. Compléter le programme, puis le tester en exécutant `rdv(1000)` pour effectuer 1 000 simulations.

3. Dans le programme suivant (*chapAlgo_TP11_3.py*) on place les points de coordonnées (R, J) où R (resp. J) est le nombre de minutes après 22 h correspond à l'arrivée de Roméo (resp. Juliette).
Si le rendez-vous a lieu, le point est de couleur verte, sinon il est de couleur rouge.

```
def aire(n):
    x_ok, y_ok, x_non, y_non = [], [], [], []
    for k ... :
        R, J = ...
        if ... :
            x_ok.append(R)
            y_ok.append(J)
        else:
            x_non.append(R)
            y_non.append(J)
    plt.plot(x_ok, y_ok, 'g.')
    plt.plot(x_non, y_non, 'r.')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```

a. Compléter les pointillés à l'aide du programme précédent ; puis exécuter la fonction `aire(5000)`.

b. Justifier que le graphique est dans un carré de côté 60.

c. Calculer l'aire exacte de la forme verte (remarquer qu'elle partage le carré en deux triangles rectangles).

d. La probabilité de la rencontre correspond à l'aire de la forme verte divisée par celle du carré : calculer cette probabilité.

TP12 Un segment, deux points

Sur un segment de longueur 1, on choisit aléatoirement deux points A et B en choisissant au hasard leurs abscisses respectives x_A et x_B entre 0 et 1.
On considère l'événement D : « la distance AB est supérieure à 0,5 ». L'objectif de l'exercice est de calculer la probabilité de D.

1. La fonction `random()`, laisser les parenthèses vides, renvoie un nombre dans l'intervalle $[0;1[$.

Reprendre la fonction `aire` du TP11 et adapter les parties en pointillés (on peut garder les variables R et J ou préférer les nommer xA et xB).
Tester le programme : `aire(5000)`.

2. La partie verte de la figure obtenue représente la réalisation de l'événement D : la probabilité cherchée est le rapport de l'aire de la partie verte sur l'aire du carré. Calculer cette probabilité.

SPECIMEN

TP13 Pour aller plus loin : travail avec les listes

Créer et utiliser une interface graphique

La bibliothèque `matplotlib.pyplot` permet de créer une fenêtre graphique munie d'un repère orthogonal.

Info

Si on considère plusieurs points dont on liste les abscisses dans `liste_x` et les ordonnées dans `liste_y` (dans le même ordre), l'instruction `plot(liste_x,liste_y)` permet de relier ces points par des segments.

Partie A Paramétrage et premiers tracés dans une fenêtre graphique

1. a. Recopier et exécuter le programme suivant.

```
1 from matplotlib.pyplot import*
2 axis([0,6,0,5])
3 liste_x=[0,3,6]
4 liste_y=[5,0,5]
5 plot(liste_x,liste_y)
6 show()
```

b. Que permet l'instruction écrite en ligne 2 ?

c. Définir les points reliés par des segments. Mettre en relation avec les listes `liste_x` et `liste_y`.

Info

`show()` permet d'afficher la fenêtre graphique. Cette instruction est à placer **en fin de programme**.

2. On peut paramétrer l'instruction `plot` en choisissant la couleur des segments tracés (`color`) ou leur épaisseur (`lw`).

a. On considère le programme suivant.

```
1 from matplotlib.pyplot import*
2 liste1_x=[0,5]
3 liste1_y=[5,0]
4 plot(liste1_x,liste1_y,color="blue",lw=2)
5 liste2_x=[0,5]
6 liste2_y=[0,5]
7 plot(liste2_x,liste2_y,color="red",lw=4)
8 show()
```

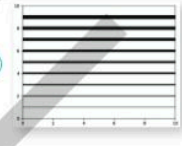
Que fait-il ?

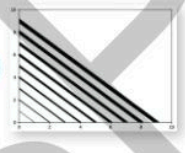
b. Le programmer et vérifier.

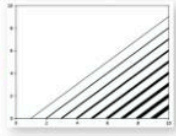
Partie B Tracer une suite de segments

On considère les figures et les programmes en Python suivants. Sans programmer sur ordinateur, associer les figures à leur programme.
Justifier, puis vérifier à l'aide de l'ordinateur.

a 

b 

c 

d 

①
```
for i in range(10):
    liste_x=[i,0]
    liste_y=[0,i]
    plot(liste_x,liste_y,color="k",lw=i)
show()
```

②
```
for i in range(10):
    liste_x=[i,i]
    liste_y=[0,10]
    plot(liste_x,liste_y,color="k",lw=i)
show()
```

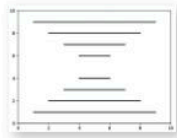
③
```
for i in range(10):
    liste_x=[i,10]
    liste_y=[0,10-i]
    plot(liste_x,liste_y,color="k",lw=i)
show()
```

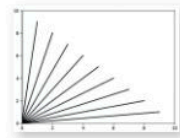
④
```
for i in range(10):
    liste_x=[0,10]
    liste_y=[i,i]
    plot(liste_x,liste_y,color="k",lw=i)
show()
```

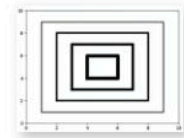
Partie C Sans aide

Réaliser les figures données ci-dessous à l'aide de programmes Python.

1. 

2. 

3. 

4. 

SPECIMEN

Vocabulaire ensembliste et logique

a Ensembles de nombres

• $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots\}$.

• $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -1 ; 0 ; 1 ; \ldots\}$.

• $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

• $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme quotient de deux entiers $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et b un entier relatif non nul.

• $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. $\mathbb{R}$ contient tous les nombres connus en classe de Seconde.

• $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est l'ensemble des réels autres que a. On lit « $\mathbb{R}$ privé de a ».

Les intervalles de $\mathbb{R}$

• $[a ; b]$ est l'ensemble des réels **compris entre** a **et** b inclus :
$$x \in [a ; b] \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$$
• $[a ; +\infty[$ est l'ensemble des réels **supérieurs ou égaux** à a.
• $]-\infty ; b[$ est l'ensemble des réels **strictement inférieurs** à b.

Exemple

Sur la droite numérique ci-dessous, on a représenté les intervalles $I =]-3 ; 2]$, $J = [4 ; +\infty[$ et $K = [-1 ; 6[$:



x étant un nombre réel, $x \in I$ signifie que $-3 < x \leqslant 2$, $x \in J$ signifie que $x \geqslant 4$.

Exemples

• 59 appartient à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
• -13 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ mais appartient à tous les autres ensembles.
• $\frac{4}{5}$ appartient à $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
• $\frac{1}{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{D}$ mais il appartient à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
• $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ mais il appartient à $\mathbb{R}$.

Remarque

On note aussi $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ des réels non nuls, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble $[0 ; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble $]-\infty ; 0]$.

Remarque

Pour exclure de l'intervalle une de ses extrémités, on tourne le crochet vers l'extérieur de l'intervalle. Par exemple :
$$x \in]a ; b] \Leftrightarrow a < x \leqslant b$$

b Géométrie

En géométrie plane

AB : **distance** entre les points A et B, longueur du segment $[AB]$.
$[AB]$: **segment** d'extrémités A et B.
(AB) : **droite** passant par A et B.
$[AB)$: **demi-droite** d'origine A passant par B.
$\overrightarrow{AB}$: **vecteur** d'origine A et d'extrémité B.
ABC : **triangle** de sommets A, B et C.
$\widehat{ABC}$: **angle** de sommet B et de côtés $[BA)$ et $[BC)$.

Avec des coordonnées

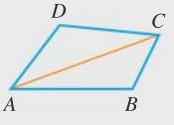
◗ $(O ; I ; J)$ désigne un repère :
• le point O est l'origine du repère.
• la droite orientée $(O ; I)$ est l'axe des abscisses ; le point I définit l'unité sur cet axe.
• la droite orientée $(O ; J)$ est l'axe des ordonnées ; le point J définit l'unité sur cet axe.

◗ Les **coordonnées d'un point** dans un repère se notent $(x ; y)$.

◗ Les **coordonnées d'un vecteur** dans un repère se notent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarque

Pour nommer un polygone, on nomme consécutivement ses sommets en suivant ses côtés. Par exemple, les **côtés** du quadrilatère $ABCD$ sont $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Le segment $[AC]$ est une **diagonale** de ce quadrilatère.

Remarque

Un repère du plan peut être :
① défini par trois points non alignés O, I et J. Ce repère est alors noté $(O ; I ; J)$.
② défini par un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. Ce repère est alors noté $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

SPECIMEN

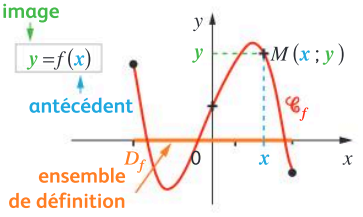
c Fonctions

• $f : x \mapsto f(x)$ ou $f : x \mapsto y$ est la **fonction** qui à x associe $f(x)$ ou y.
• Si $f(x) = y$ alors y est l'**image** du réel x par la fonction f et x est **un antécédent** de y par la fonction f.

• D_f est l'**ensemble de définition** de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels ayant une image par f.

• $\mathscr{C}_f$ est la **représentation graphique** ou la **courbe représentative** de la fonction f dans un repère du plan. C'est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont telles que $x \in D_f$ et $f(x) = y$.

• $y = f(x)$ est l'**équation** de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est la fonction qui à $x \neq 1$ associe $\dfrac{1}{x-1}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(2) = 1$

1 est l'image de 2 par la fonction f et 2 est un antécédent de 1 par f.
Le point de coordonnées $(2\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$, car $f(2) = 1$.
La courbe de f a pour équation :

$$y = \frac{1}{x-1}$$

d Relations et ensembles

Appartenance ∈ se lit « appartient à » ou « est élément de » et s'utilise entre un élément et un ensemble.
Négation : ∉.

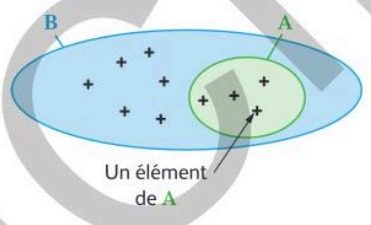
Exemples

• $-4 \in \mathbb{Z}$ mais $-4 \notin \mathbb{N}$.
• $A \in (AB)$
• $0 \notin]2\,;4]$

Inclusion ⊂ se lit « est contenu dans » ou « est inclus dans » et s'utilise entre deux ensembles.

Lorsque deux ensembles A et B vérifient $A \subset B$, on dit que A est un **sous-ensemble** de B ou encore que A est une **partie** de B.

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, on montre que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.



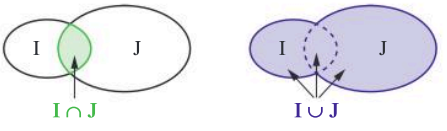
Exemples

• Tout entier naturel est également un entier relatif. Ainsi :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
$\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
Plus généralement, on a les inclusions des ensembles de nombres :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
• Tout point du segment $[AB]$ appartient à la droite (AB). Ainsi :
$[AB] \subset (AB)$

Intersection et réunion Soient I et J deux ensembles.

• **L'intersection** de I et de J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à l'ensemble I et à l'ensemble J.
• La **réunion** (ou l'union) de I et de J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des éléments appartenant à **au moins l'un** des deux ensembles I et J.

Lorsque les ensembles I et J n'ont aucun élément en commun, leur intersection est vide, on note $I \cap J = \varnothing$. On dit alors qu'ils sont **disjoints**.

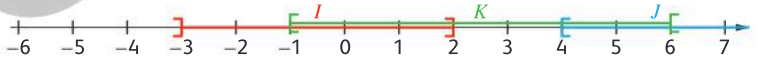


Exemples

• Soient $I = \{0\,;2\,;4\,;6\,;8\}$ et $J = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ alors :
$I \cap J = \{0\,;2\,;4\}$
et
$I \cup J = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\}$
• L'ensemble des réels x vérifiant $x \leqslant 3$ ou $x > 4$ s'écrit :
$]-\infty\,;3] \cup]4\,;+\infty[$
• L'ensemble I des entiers pairs et l'ensemble J des entiers impairs sont disjoints. On a ainsi :
$I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = \mathbb{N}$
• On considère l'épreuve aléatoire consistant à lancer un dé cubique et les événements A : « obtenir un résultat pair » et B : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 ».
Alors :
$A \cap B = \{2\,;4\}$ et
$A \cup B = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\}$.

Exemple : cas particuliers des intersections et réunions d'intervalles

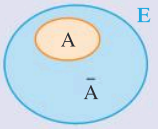
On considère les intervalles $I =]-3\,;2]$, $J = [4\,;+\infty[$ et $K = [-1\,;6[$:



Les intervalles I et J sont disjoints : leur intersection est donc vide : $I \cap J = \varnothing$.
On a $I \cap K = [-1\,;2]$ et $I \cup K =]-3\,;6[$. On a $K \cap J = [4\,;6[$ et $K \cup J = [-1\,;+\infty[$.

SPÉCIMEN

Complémentaire Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble, noté $\overline{A}$, de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



Exemple

- Si $E=\mathbb{N}$ et A est l'ensemble des entiers pairs alors son complémentaire $\overline{A}$ dans E est l'ensemble des entiers impairs.
- Si $E=\mathbb{R}$ et $A=]-\infty;4[$ alors : $\overline{A}=[4;+\infty[$

e Proposition, conjonctions « et » et « ou »

Définition Une **proposition** est une phrase (comportant un verbe) qui peut être vraie ou fausse.

Conjonction « et » « et » entre deux propositions (ou entre deux événements) signifie que les deux propositions doivent être **simultanément vraies** (ou les événements réalisés tous deux).

Exemples

- « $x>-5$ **et** $x<1$ » signifie « $-5<x<1$ ».
- Lors du lancer d'un dé cubique, on considère les événements A : « obtenir un multiple de 2 » et B : « obtenir un numéro supérieur ou égal à 3 ». On a alors $A=\{2;4;6\}$ et $B=\{3;4;5;6\}$. L'événement A **et** B noté $A\cap B$ signifie « obtenir 4 ou 6 ». On a $A\cap B=\{4;6\}$.

Exemples

- Si $E=\mathbb{N}$ et A est l'ensemble des entiers pairs alors son complémentaire $\overline{A}$ dans E est l'ensemble des entiers impairs.
- Si $E=\mathbb{R}$ et $A=]-\infty;4[$ alors : $\overline{A}=[4;+\infty[$

Conjonction « ou » « ou » entre deux propositions (ou entre deux événements) signifie que **l'une des propositions au moins** (ou l'un des événements) **et peut-être les deux** doivent être vraies (ou réalisés).

Exemples

- « $x\in[-1;2]$ **ou** $x\in]0;3]$ » signifie « $x\in[-1;2]\cup]0;3]$ », soit « $x\in[-1;3]$ ».
- Lors du lancer d'un dé cubique, on reprend les événements A et B de l'exemple précédent. L'événement A **ou** B noté $A\cup B$ signifie « obtenir 2, 3, 4, 5 ou 6 ». On a $A\cup B=\{2;3;4;5;6\}$.

Exemples

- La proposition « dans un triangle, la somme des angles vaut 180° » est vraie.
- La proposition « tout entier pair est multiple de 4 » est fausse. En effet 6 est pair sans être multiple de 4.

Remarque

Contrairement à l'utilisation fréquente en français du « ou » comme « ou bien », le « ou » en mathématique est « inclusif », c'est-à-dire qu'il inclut le cas où les deux propositions sont vraies simultanément.

f Implication, contraposée, réciproque et équivalence

Implication Une **proposition conditionnelle** ou une **implication** est une propriété de la forme suivante :

« **Si** la proposition P_1 est vraie, **alors** la proposition P_2 est vraie. »

Exemples

- « n est un multiple de 2 » est une condition nécessaire pour « n est un multiple de 6 ».
- Deux élèves sont dans la même classe est une condition suffisante pour qu'ils soient dans le même lycée.

Remarque

On dit dans ce cas que :
- P_1 est vraie est une **condition suffisante** pour que P_2 soit vraie.
- P_2 est vraie est une **condition nécessaire** pour que P_1 soit vraie.

Contraposée d'une implication La contraposée de l'implication « **Si** la proposition P_1 est vraie, **alors** la proposition P_2 est vraie. » est **l'implication équivalente** :

« **Si** la proposition P_2 est fausse, **alors** la proposition P_1 est fausse. »

Exemples

- La contraposée de « si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 » est « si n n'est pas un multiple de 3, alors n n'est pas un multiple de 6 ».
- La contraposée de « si deux élèves sont dans la même classe, alors ils sont dans le même lycée » est : « si deux élèves ne sont pas dans le même lycée, alors ils ne sont pas dans la même classe ».

Remarque

Dès lors qu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.
En pratique, il peut être parfois plus simple de démontrer qu'une implication est vraie en démontrant sa contraposée.

SPÉCIMEN

Réciproque d'une implication La réciproque d'une implication est l'implication obtenue en permutant hypothèse et conclusion. La réciproque de l'implication « **Si** la phrase P_1 est vraie, **alors** la phrase P_2 est vraie. » est :

« **Si** la phrase P_2 est vraie, **alors** la phrase P_1 est vraie. »

Une implication et sa réciproque ne sont pas toujours vraies (ou fausses) en même temps.

Exemples

• La réciproque de « si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 » est « si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 6 ». Cette réciproque est fausse.

• La réciproque de « si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors A, B et C sont alignés » est « si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ». Cette réciproque est vraie.

Équivalence Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « **équivaut à** » ou « **si, et seulement si** ». Il se place entre deux propositions P_1 et P_2 et signifie que l'on a simultanément : $\begin{cases}\text{Si } P_1 \text{ est vraie, alors } P_2 \text{ est vraie.}\\ \text{Si } P_2 \text{ est vraie, alors } P_1 \text{ est vraie.}\end{cases}$

Exemples

• ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

• Pour trois points distincts A, B et C, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires est une condition nécessaire et suffisante pour que A, B et C soient alignés.

• L'énoncé « un quadrilatère est un losange **si et seulement si** ses diagonales sont perpendiculaires » n'est pas une équivalence vraie. En effet : l'implication « Si un quadrilatère admet des diagonales perpendiculaires alors ce quadrilatère est un losange » est fausse.

g Quantificateurs « pour tout… », « il existe… »

• On considère les propositions vraies suivantes.

P_1 : « **Pour tout** réel $x \geqslant 1$, on a $x^3 \geqslant x^2$. »

P_2 : « **Quel que soit** le triangle considéré, ses hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle. »

Les locutions « **Pour tout**… » et « **Quel que soit**… » sont appelées **quantificateurs universels**. Les propositions P_1 et P_2 sont appelées **propositions universelles**.

Pour montrer qu'une proposition universelle est vraie, on montre qu'elle est vraie dans **tous les cas (un exemple ne suffit pas !)**.

Pour montrer qu'elle est fausse, il suffit de trouver un cas où elle est mise en défaut. On parle alors de **contre-exemple**.

• On considère la proposition suivante.

« **Il existe** un nombre entier à la fois pair et multiple de 3. »

Cette proposition est vraie : 6 est un entier pair et multiple de 3.

La locution « il existe… » est appelé **quantificateur existentiel**.

Pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie, il suffit d'**exhiber un exemple**.

En revanche, pour montrer qu'elle est fausse, il faut montrer qu'elle n'est **jamais** satisfaite.

Exemple

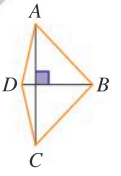
La proposition « **il existe** un entier premier pair supérieur ou égal à 3 » est fausse. En effet, tout entier pair supérieur ou égal à 3 admet au moins trois diviseurs distincts : 1, 2 et lui-même. Il n'est donc pas premier.

Remarque

On retiendra que la réciproque d'une implication vraie n'est pas systématiquement vraie.
Lorsqu'une implication et sa réciproque sont simultanément vérifiées, on a alors une équivalence.

Remarque

Lorsqu'une implication et sa réciproque sont vérifiées alors on parle d'équivalence.
Lorsque les propositions P_1 et P_2 sont équivalentes, on dit que P_1 est vraie est une **condition nécessaire et suffisante** pour que P_2 soit vraie (et réciproquement).



Remarque

P_1 s'énonce également « Quel que soit le réel $x \geqslant 1$, on a $x^3 \geqslant x^2$ ».
P_2 s'énonce également « dans un triangle, les hauteurs sont concourantes ». Le quantificateur universel est sous-entendu ici.

Exemple

La proposition universelle « Pour tout réel x, on a $x^3 \geqslant x^2$ » est fausse. En effet, $x = 0{,}5$ est un contre-exemple.

Remarque

La locution « il existe… » signifie « il existe **au moins un**… ».

SPÉCIMEN

h Négation d'une proposition

Soit une proposition P, on appelle (non P) la **négation** de P.

Si la proposition P est vraie alors (non P) est fausse et inversement.

• Soient deux propositions P_1 et P_2.

Proposition P	Négation de P
(P_1 **et** P_2)	((**non** P_1) **ou** (**non** P_2))
(P_1 **ou** P_2)	((**non** P_1) **et** (**non** P_2))

• **Négation d'une proposition comportant un quantificateur.**

On considère les deux propositions suivantes :

P_1 : « **tous** les élèves de la classe aiment étudier les mathématiques »

P_2 : « **il existe** un réel x tel que $f(x) > 0$ »

La négation de P_1 est : « **il existe au moins un** élève dans la classe qui **n'**aime **pas** étudier les mathématiques ».

La négation de P_2 est : « **pour tout** réel x, on a $f(x) \leqslant 0$ ».

Exemples

• La proposition P : « $ABCD$ est un carré » a pour négation (non P) : « $ABCD$ **n'**est **pas** un carré ».

• On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note P_1 : « la carte est une figure » et P_2 : « la carte est un cœur ». Ainsi, (P_1 ou P_2) : « la carte est une figure **ou** un cœur ». La négation de (P_1 **ou** P_2) est « la carte **n'**est **pas** une figure **et n'**est **pas** un cœur ».

Remarque

La négation d'une proposition universelle (resp. existentielle) est une proposition existentielle (resp. universelle).

i Des outils pour démontrer

• Utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle

Contre-exemple Pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, il suffit de donner un exemple qui la met en défaut. Un tel exemple est alors appelé un **contre-exemple**.

Exemple

Pour montrer que la proposition universelle « Tous les élèves de la classe sont nés la même année » est fausse, il suffit de citer deux élèves particuliers qui n'ont pas la même année de naissance.

• Utiliser des implications dans un raisonnement

Les propriétés du cours sont écrites sous forme d'implications ou d'équivalences logiques. On peut les utiliser pour mener un raisonnement hypothético-déductif.

Exemple

Soit un triangle ABC rectangle isocèle en A. On note D le point vérifiant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On souhaite montrer que $ABDC$ est un carré.

Pour effectuer cette démonstration, on utilise les trois propriétés du cours suivantes :

P_1 : « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme »

P_2 : « **Si** un parallélogramme admet un angle droit alors c'est un rectangle »

P_3 : « **Si** un rectangle admet deux côtés consécutifs de même longueur **alors** c'est un carré ».

Démonstration : Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est vraie alors, par la propriété P_1, on déduit que $ABDC$ est un parallélogramme. Puisque ABC est un triangle rectangle en A alors, par la propriété P_2, le parallélogramme $ABDC$ est un rectangle. Enfin, vu que $AB = AC$, par la propriété P_3, on déduit que ce rectangle est en fait un carré.

SPECIMEN

• Démontrer une implication

Pour montrer qu'une proposition P_1 implique une proposition P_2, on suppose que P_1 est vraie et on montre alors que P_2 est vraie.

Exemple

On souhaite prouver l'implication suivante :
« **Si** $\underbrace{m \text{ et } n \text{ sont des entiers pairs}}_{P_1}$ **alors** $\underbrace{\text{leur somme } m+n \text{ est paire}}_{P_2}$ »

On suppose que m et n sont deux entiers pairs alors, m et n s'écrivent sous la forme $m = 2k$ et $n = 2k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $m+n = 2k+2k' = 2(k+k')$ avec $k+k' \in \mathbb{Z}$. Donc $m+n$ est pair.
L'implication est démontrée.

• Raisonner par l'absurde

Raisonnement par l'absurde Pour montrer qu'un énoncé est vrai, on peut supposer qu'il est faux et aboutir à une absurdité (une contradiction, un résultat faux).

Exemple

Pour montrer que 0 n'a pas d'inverse, on suppose qu'il en a un que l'on note a.
Par la définition d'un inverse, on a $0 \times a = 1$, ou encore $0 = 1$.
Cette égalité est fausse, donc 0 n'a pas d'inverse.

• Raisonner par contraposition pour démontrer une implication

Raisonnement par contraposition Pour démonter l'implication « **Si** la phrase P_1 est vraie, **alors** la phrase P_2 est vraie. », on peut la remplacer par sa contraposée « **Si** la phrase P_2 est fausse, **alors** la phrase P_1 est fausse. »

Exemple

Pour démontrer la proposition « Si n^2 est pair alors, n est pair », on peut montrer que « Si n est impair, alors n^2 est impair » :
n étant impair, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$; on a alors :

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

$2k^2 + 2k$ est un entier, donc n^2 est impair.

• Raisonner par disjonction des cas

Raisonnement par disjonction des cas Pour montrer qu'une proposition universelle est vraie, on peut envisager tous les différents cas de figure possibles et montrer qu'elle est vraie dans chacun de ces cas.

Exemple

Pour montrer que, pour tout entier naturel n, $A = (n+1)(n+2)$ est pair, on peut envisager les seuls deux cas possibles : n est pair et n est impair.

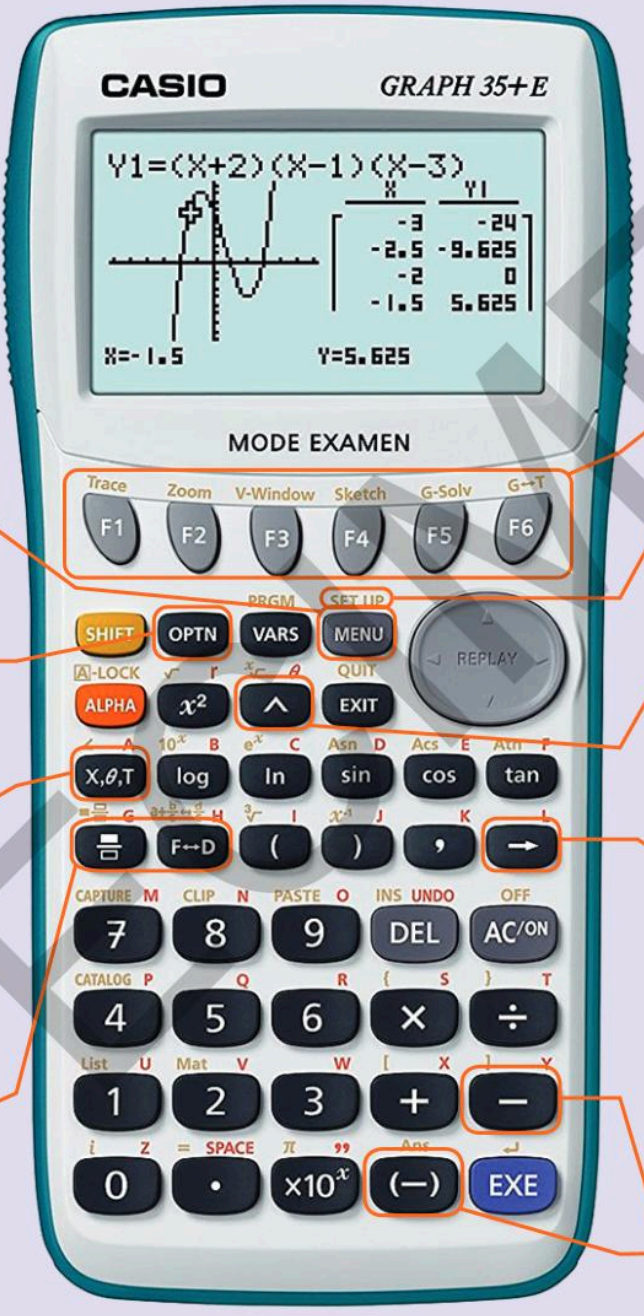
1er cas : soit n un entier naturel pair.
Alors $n+2$ est également pair et donc $(n+1)(n+2)$ est le produit de l'entier pair $(n+2)$ et d'un autre entier, donc A est également pair.

2e cas : soit n un entier naturel impair.
Alors $n+1$ est pair et donc $(n+1)(n+2)$ est le produit de l'entier pair $(n+1)$ et d'un autre entier, donc A est également pair.

Conclusion : on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)$ est pair.

SPECIMEN

Je retiens les principales touches de la GRAPH 35+ E



pour choisir le menu :
- pour calculer
- pour utiliser les fonctions de statistiques et de probabilités
- pour tracer des courbes et utiliser le solveur graphique
- pour tabuler une fonction
- pour écrire et exécuter un programme

pour choisir une commande écrite en bas de l'écran

pour paramétrer la calculatrice : angle en degré, quadrillage affiché ou non, …

pour accéder à des commandes, classées par grands thèmes : LIST, STAT ou PRB

pour élever à une puissance, exemple 2^3

la variable « x » lorsqu'on définit une fonction dans les menus et

pour stocker une valeur dans une variable

pour calculer avec des fractions

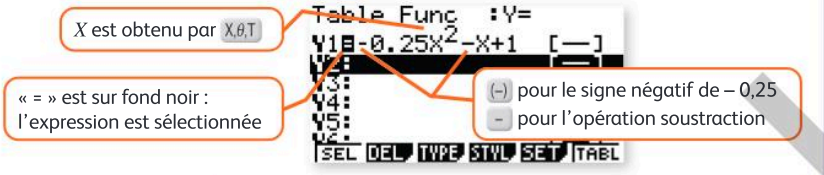
⚠ ne pas confondre ces deux touches :
(–) pour le signe négatif d'un nombre
– pour l'opération soustraction

SPÉCIMEN

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :
$f(x) = -0{,}25x^2 - x + 1$ sur $[-6\,;3]$

1. Saisir l'expression de f : menu GRAPH ou TABLE

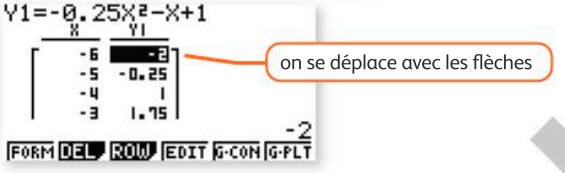


2. Dresser le tableau de valeurs de f : menu TABLE

a. Définir les paramètres de tabulation : SET



b. Afficher le tableau de valeurs : TABL

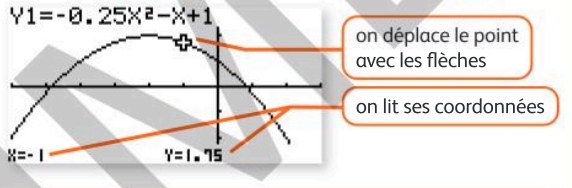


3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et se déplacer sur $\mathscr{C}_f$: menu GRAPH

a. Définir la fenêtre d'affichage : SHIFT V-WIN

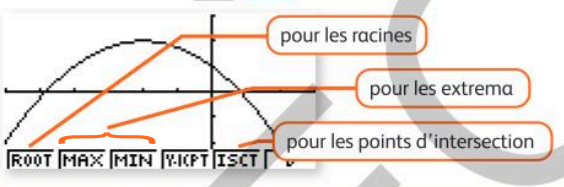


b. Tracer $\mathscr{C}_f$ DRAW et se déplacer sur $\mathscr{C}_f$ SHIFT TRCE

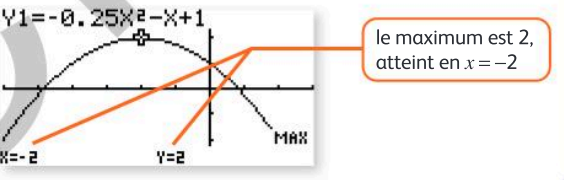


4. Utiliser le solveur graphique dans le menu GRAPH

a. Le sélectionner : SHIFT G-SLV



b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution.

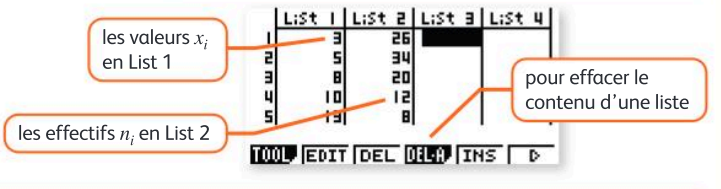


J'étudie une série statistique

On traite l'exemple de la série suivante :

Valeurs x_i	3	5	8	10	13
Effectifs n_i	26	34	20	12	8

1. Entrer la série : menu STAT



2. Calculer les paramètres statistiques

a. Définir les paramètres de calculs : CALC SET

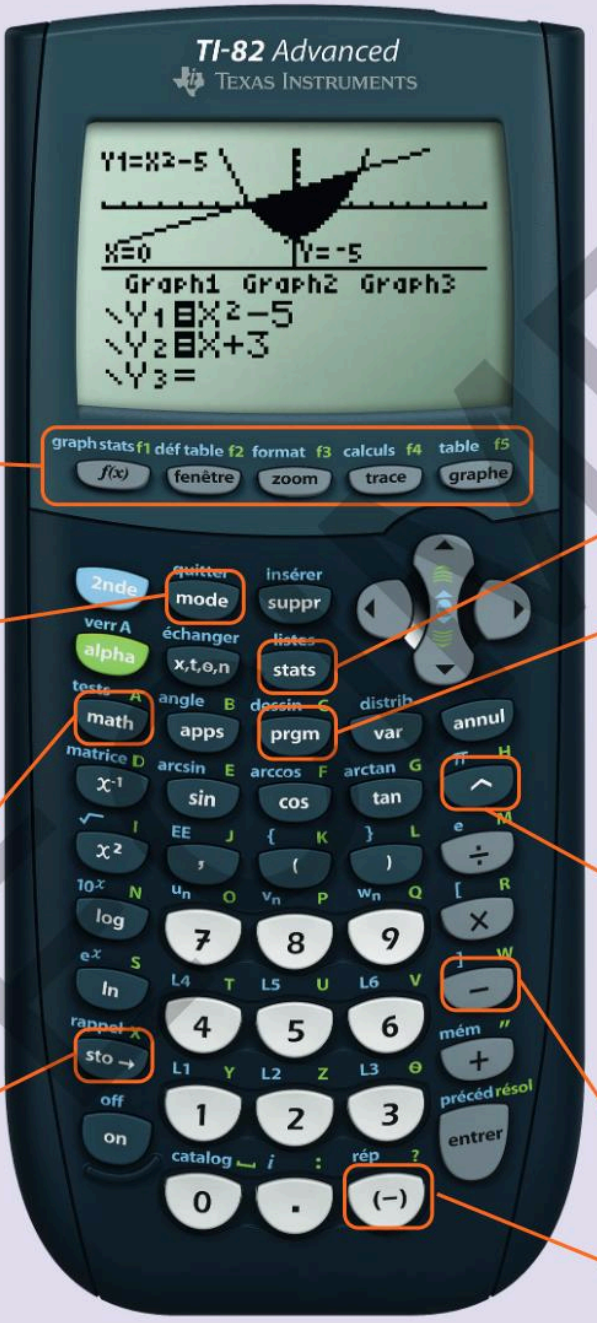


b. Obtenir les paramètres de la série : CALC 1VAR



SPECIMEN

Je retiens les principales touches de la TI 82-Advanced



pour accéder aux commandes liées aux graphiques ou aux tabulations

pour paramétrer la calculatrice : angle en degré, quadrillage affiché ou non, …

pour accéder à d'autres commandes, classées par grands thèmes : MATH, NUM ou PRB

pour stocker une valeur dans une variable

pour accéder aux commandes liées aux statistiques

pour accéder aux commandes liées à la programmation

pour élever à une puissance, exemple 2^3

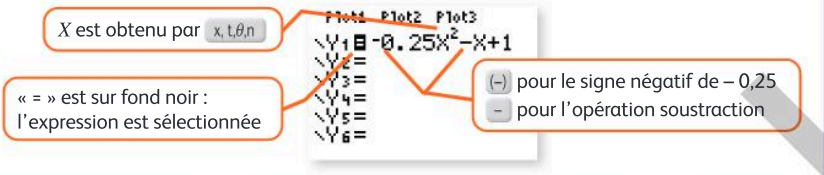
⚠ ne pas confondre ces deux touches :
(−) pour le signe négatif d'un nombre
− pour l'opération soustraction

SPÉCIMEN

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :
$f(x) = -0{,}25x^2 - x + 1$ sur $[-6\,;3]$

1. Saisir l'expression de f dans $f(x)$:



2. Dresser le tableau de valeurs de f.

a. Définir les paramètres de tabulation : 2nde déf table



b. Afficher le tableau de valeurs : 2nde table

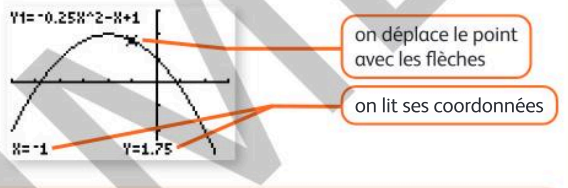


3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et se déplacer sur $\mathscr{C}_f$:

a. Définir la fenêtre d'affichage : fenêtre



b. Tracer $\mathscr{C}_f$ graphe et se déplacer sur : $\mathscr{C}_f$ trace

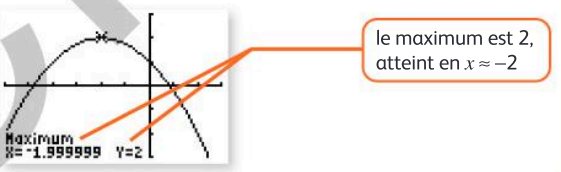


4. Utiliser le solveur graphique dans le menu : graphe

a. Le sélectionner : 2nde calculs



b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution :

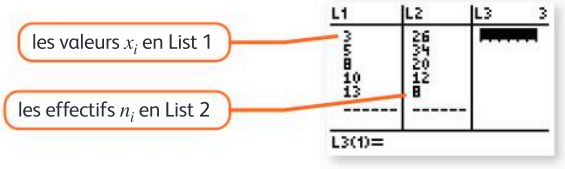


J'étudie une série statistique

On traite l'exemple de la série suivante.

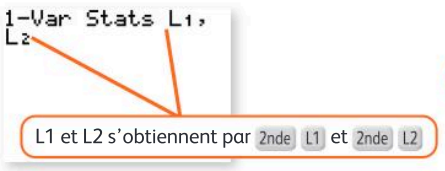
Valeurs x_i	3	5	8	10	13
Effectifs n_i	26	34	20	12	8

1. Entrer la série : stats 1 : Modifier

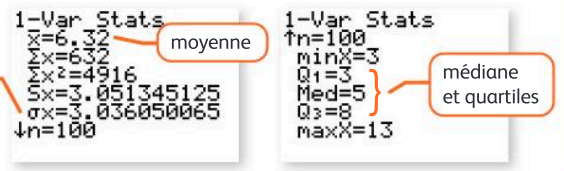


2. Calculer les paramètres statistiques.

a. Définir les paramètres de calculs : stats CALC 1 : Stats 1 Var



b. Obtenir les paramètres de la série en validant



SPECIMEN

Je retiens les principales touches de la NumWorks



pour choisir le menu :
- pour calculer
- pour utiliser les fonctions
- pour faire des statistiques
- pour programmer en Python
- pour paramétrer les calculs

la variable « x » lorsqu'on définit une fonction

pour valider une instruction

pour revenir au menu ou à l'instruction précédente

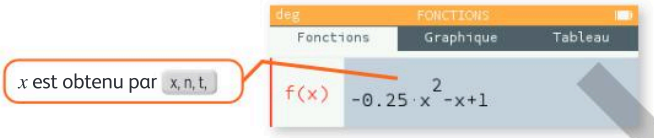
pour élever à une puissance, exemple 2^3

SPECIMEN

J'étudie une fonction

On traite l'exemple de la fonction f définie par :
$f(x) = -0{,}25x^2 - x + 1$ sur $[-6\,;3]$

1. Saisir l'expression de f dans :



2. Dresser le tableau de valeurs de f : **Afficher les valeurs** OK

a. Définir les paramètres de tabulation : **Régler l'intervalle**



début et fin de l'intervalle d'étude

pas de la tabulation

b. Afficher le tableau de valeurs :



on se déplace avec les flèches

3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et se déplacer sur $\mathscr{C}_f$: **Tracer le graphique** OK

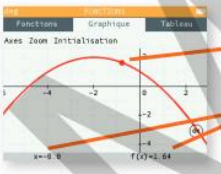
a. Définir la fenêtre d'affichage : **Axes**



x compris entre –6 et 3

(Oy) réglé de façon automatique

b. Tracer $\mathscr{C}_f$ et se déplacer sur $\mathscr{C}$:

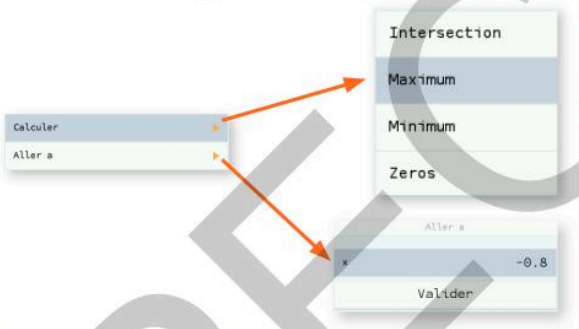


on déplace le point avec les flèches

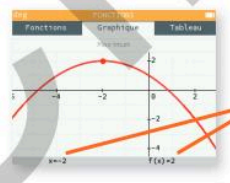
on lit ses coordonnées

4. Utiliser le solveur graphique

a. Le sélectionner : OK



b. Choisir l'instruction souhaitée et lire la solution :



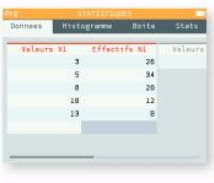
le maximum est 2, atteint en $x = -2$

J'étudie une série statistique

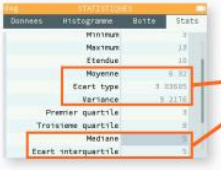
On traite l'exemple de la série suivante.

Valeurs x_i	3	5	8	10	13
Effectifs n_i	26	34	20	12	8

1. Entrer la série : menu



2. Calculer les paramètres statistiques : **Stats**



On lit les paramètres de la série

SPECIMEN

Chapitre 1

J'applique en autonomie

27 • $f(\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}$. $f(\sqrt{3}) \approx 5{,}4641$ donc : $5{,}464 < f(\sqrt{3}) < 5{,}465$.

• $f(\pi) = \pi^2 + 2\pi - 1$. $f(\pi) \approx 15{,}1528$ donc : $15{,}152 < f(\pi) < 15{,}153$.

28 **1.** $A = \pi r^2 = 6{,}25\pi$. $A \approx 19{,}635$, donc : $19{,}63 < A < 19{,}64$.

2. $V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = 4\pi$. $V \approx 12{,}5664$, donc : $12{,}566 < V < 12{,}567$.

29 $A = c^2 = 300$, donc $c = \sqrt{300}$. $c \approx 17{,}3$ cm.

30 $A = c^2 = 740$, donc $c = \sqrt{740}$. $c \approx 27{,}2$ cm.

31 $\frac{77}{100} \times 258 \approx 198{,}7$. Selon cette étude, 199 élèves choisiraient la spécialité maths en Première.

32 **1.** ABC est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
$BC^2 = 16 + 49 = 65$. Donc $BC = \sqrt{65}$.
$BC \approx 8{,}0623$, donc $8{,}062 < BC < 8{,}063$.

2. $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{7}$. Donc $\widehat{ABC} \approx 30°$.
$\widehat{ACB} = 90 - \widehat{ABC}$ donc $\widehat{ACB} \approx 60°$.

33 **1.** $x \in [4;8[$ **2.** $x \in [-0{,}5;+\infty[$ **3.** $x \in]-\infty;12[$

34 **1.** $-5 \leqslant x - 1 \leqslant 5$ donc $-4 \leqslant x \leqslant 6$. Ainsi $x \in [-4;6]$.

2. $-3 < x < 3$ donc $x \in]-3;3[$.

3. $-4 < x + 2{,}3 < 4$ donc $-6{,}3 < x < 1{,}7$. Ainsi $x \in]-6{,}3;1{,}7[$.

35 **1.** $I \cap J =]0{,}2;5[$ et $I \cup J =]-8;7]$.

2. $I \cap J = [3;+\infty[$ et $I \cup J =]-2;+\infty[$.

3. $I \cap J = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et $I \cup J =]-\infty;6[$.

36 $A = \frac{18}{42} + \frac{8}{42} - \frac{105}{42} = -\frac{79}{42}$; $B = \frac{3}{2} - \frac{8}{15} = \frac{45}{30} - \frac{16}{30} = \frac{29}{30}$

$C = \frac{2}{3} \times 5 - \frac{1}{5} = \frac{10}{3} - \frac{1}{5} = \frac{50}{15} - \frac{3}{15} = \frac{47}{15}$

$D = \frac{\frac{6}{6} - \frac{5}{6}}{\frac{4}{6} + \frac{9}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{13} = \frac{1}{13}$

37 $A = 3^{4-7} = 3^{-3}$; $B = 3^{8-12} = 3^{-4}$

$C = 3^{(-2)\times(-3)} \times 3^{-6} = 3^6 \times 3^{-6} = 3^0 = 1$

$D = \left(\frac{-9}{-3}\right)^{-1} = 3^{-1}$ $\qquad E = \frac{(3^2)^{-2} \times 3}{(3^3)^3} = \frac{3^{-4} \times 3}{3^9} = \frac{3^{-3}}{3^9} = 3^{-12}$

38 $C = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 25 \times 2 = -47$.
Donc C est un entier relatif.

39 $A = 5\sqrt{4\times2} - \sqrt{25\times2} = 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$B = \sqrt{9\times7} - 2\sqrt{4\times7} + \sqrt{100\times7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 10\sqrt{7} = 9\sqrt{7}$

40 **1.** ABC est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 216 - 24 = 192$.
$AB = \sqrt{192} = \sqrt{64\times3} = 8\sqrt{3}$.

2. $AB = 8\sqrt{3}$ et $AC = \sqrt{4\times6} = 2\sqrt{6}$.

$\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 8\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 24\sqrt{2}$.

3. $BC = \sqrt{36\times6} = 6\sqrt{6}$.
$P = AB + AC + BC = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{6}$.
$P = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 8\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. $-\frac{18}{3} = -6$. Réponses **a.** et **b.**

2. $\frac{2}{13}\left(3 - \frac{8}{7}\right) = \frac{2}{13}\left(\frac{21}{7} - \frac{8}{7}\right) = \frac{2}{13} \times \frac{13}{7} = \frac{2}{7}$. Réponses **b.** et **c.**

3. $\frac{3}{4} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{16}$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{5}{16} = \frac{24}{16} + \frac{2}{16} - \frac{5}{16} = \frac{21}{16}$. Réponses **b.** et **c.**

4. $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$. Réponse **a.**

5. $10^{-5} = 0{,}00001$. Réponse **c.** **6.** $\frac{10^2}{10^{-4}} = 10^{2-(-4)} = 10^6$. Réponse **a.**

7. $7^8 = 7^{3+5} = 7^3 \times 7^5$ et $7^8 = 7^{4\times2} = \left(7^4\right)^2$. Réponses **a.** et **c.**

8. $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 2{,}5 \times 10^{-1}$. Réponses **a.** et **c.**

9. $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{4\times2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{14}{7}} = \sqrt{2}$.
Réponses **b.** et **c.**

10. $\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 16 \times 3 = 48$. Réponse **a.**

11. Si x est un nombre négatif, alors $|x| = -x$. Réponse **b.**

12. $]-\infty;7] \cap [-5;21[= [-5;7]$. Réponse **c.**

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Faux, c'est $x \in]-9;4]$. **2.** Vrai.

3. Faux car $-7{,}65 < -7{,}6$.

4. Vrai car $\left|\frac{3}{8} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{9}{24} - \frac{4}{24}\right| = \left|\frac{5}{24}\right| = \frac{5}{24}$.

5. Faux. $]-5;+\infty[\cup]-8;-1] =]-8;+\infty[$. **6. a.** Faux car $-4 < -3$.

b. Vrai car la distance entre -3 et 13 est $13 - (-3) = 16$.

c. Vrai car le centre de l'intervalle est $\frac{13 + (-3)}{2} = 5$.

d. Faux car tous les réels x appartenant à cet intervalle vérifient $|x - 5| \leqslant 8$.

Partie B.

1. Faux car $DB \approx 8{,}6603$ donc un encadrement à 10^{-3} près de DB est $8{,}660 < DB < 8{,}661$.

2. Vrai. ABD est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore $DB^2 = AB^2 + AD^2$.
$AB^2 = DB^2 - AD^2 = 75 - 27 = 48$, donc $AB = \sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = 4\sqrt{3}$.
De plus : $\sqrt{27} + \sqrt{3} = \sqrt{9\times3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

3. Vrai car le périmètre de $ABCD$ est :
$\mathcal{P} = 2(AB + AD) = 2\left(4\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) = 2 \times 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$.

4. Faux car l'aire de $ABCD$ est : $\mathcal{A} = AB \times AD = 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 36$.

5. Faux car le périmètre du triangle ABD est :
$AB + AD + DB = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

6. Faux car l'aire du triangle ABD est : $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{2} = 18$.

exercices Application

54 $\pi \approx 3{,}142$ donc $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

60 $c^2 = 79$ donc $c = \sqrt{79}$. $c \approx 8{,}9$ m.

63 $x_A = 0{,}2$; $x_B = 0{,}3$; $x_C = -0{,}125$; $x_D = -0{,}05$.

70 **1.** $I \cap J =]6;12[$ et $I \cup J =]3;+\infty[$.

2. $I \cap J =]5;9]$ et $I \cup J = \mathbb{R}$. **3.** $I \cap J = \{9\}$ et $I \cup J = [-2;+\infty[$.

80 **1.** $43\,218 = 4{,}3218 \times 10^4$ **2.** $0{,}0000534 = 5{,}34 \times 10^{-5}$

3. $35\,384{,}5 = 3{,}53845 \times 10^4$

exercices Entraînement

97 **1.** $\frac{5}{5} = 1$ donc $\frac{5}{5} \in \mathbb{N}$. **2.** $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ donc $\frac{\pi}{2\pi} \in \mathbb{D}$.

3. $\frac{\pi + 1}{\pi + 2} \in \mathbb{R}$. **4.** $2\sqrt{3} + 1 \in \mathbb{R}$.

5. $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ donc $\left(\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{N}$. **6.** $\frac{0{,}45}{0{,}05} = 9$ donc $\frac{0{,}45}{0{,}05} \in \mathbb{N}$.

SPECIMEN

107 $\mathcal{V} = c^3 = \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 3^3 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 = 27 \times 2\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$ cm³.
$\mathcal{V} \approx 76{,}3675$ cm³.

118 **1.** $I \cap J = [2;5]$ et $I \cup J = [-1;7]$
2. $I \cap J = [-1;2[$ et $I \cup J =]-\infty;2]$
3. $I \cap J =]3{,}9;4[$ et $I \cup J = \mathbb{R}$
4. $I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J =]-2;8[\cup [12;+\infty[$

126 **1.** $A = \dfrac{16 \times 3 \times 7 \times 2}{7 \times 5 \times 3 \times 3} = \dfrac{32}{15}$ **2.** $B = 4\left(\dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6}\right) = 4 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
3. $C = \dfrac{25}{49} - \dfrac{14}{49} = \dfrac{11}{49}$ **4.** $D = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{15}{12} - \dfrac{2}{12} = \dfrac{13}{12}$

134 **1.** $A = 3^{2+(-4)+3} = 3$ **2.** $B = \left(\dfrac{-9}{-3}\right)^{-1} = 3^{-1}$
3. $C = \dfrac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3}$ **4.** $D = \dfrac{\left(3^2\right)^5}{\left(3^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{10}}{3^{-6}} = 3^{10-(-6)} = 3^{16}$

144 **1.** $A = \sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{16 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}$
$= 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $B = \sqrt{36 \times 5} + 3\sqrt{16 \times 5} - 2\sqrt{25 \times 5}$
$= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

Chapitre 2

J'applique en autonomie

22 **1.** Les multiples positifs de 7 inférieurs à 60 sont les entiers qui s'écrivent sous la forme $7k$ avec k entier tel que $0 \leqslant 7k \leqslant 60$. Ce sont : 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49 et 56.
2. L'ensemble des diviseurs positifs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Ainsi, ceux qui sont supérieurs ou égaux à 11 sont 20, 25, 50, 100.
3. Les diviseurs positifs de 36 sont : **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 9, **12**, 18, 36 et ceux de 60 sont : **1**, **2**, **3**, **4**, 5, **6**, 10, **12**, 15, 20, 30, 60. Les diviseurs positifs **communs** de 36 et 60 sont donc 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

23 Soient m et n deux entiers multiples de a. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $m = ka$ et $n = k'a$ et donc la différence $m - n$ s'écrit : $m - n = ka - k'a = (k - k') \times a$ avec $k - k'$ entier donc $m - n$ est aussi un multiple de a.

24 Soient m un entier multiple de 5 et n un entier multiple de 20 alors, il existe deux entiers k et k' tels que $m = 5k$ et $n = 20k'$ et donc la somme $m + n$ s'écrit : $m + n = 5k + 20k' = 5k + 5 \times 4k' = 5(k + 4k')$ avec $k + 4k'$ entier donc $m + n$ est un multiple de 5.
Autre méthode : Puisque n est un multiple de 20, c'est également un multiple de 5 puisque $20 = 4 \times 5$. Donc m et n sont tous deux multiples de 5 donc leur somme $m + n$ est également multiple de 5.

25 **1.** Le plus petit multiple commun positif de 3, 15 et 12 est 60 donc on choisit 60 comme dénominateur commun :
$$A = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} - \frac{7}{12} = \frac{2 \times 20}{3 \times 20} - \frac{4 \times 4}{15 \times 4} - \frac{7 \times 5}{12 \times 5}$$
$$= \frac{40}{60} - \frac{16}{60} - \frac{35}{60} = \frac{40 - 16 - 35}{60} = -\frac{11}{60}$$
2. Le plus petit multiple commun positif de 14, 2 et 3 est 42 donc on choisit 42 comme dénominateur commun. Le produit étant prioritaire, on a :
$$B = \frac{5}{14} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14} - \frac{7}{6} = \frac{5 \times 3}{14 \times 3} - \frac{7 \times 7}{6 \times 7}$$
$$= \frac{15}{42} - \frac{49}{42} = \frac{15 - 49}{42} = -\frac{34}{42} = -\frac{17 \times 2}{21 \times 2} = -\frac{17}{21}$$

26 Les premiers multiples de 15 entiers positifs sont 0, 15, 30, 45, **60**, 75, 90 etc. Ceux de 20 sont 0, 20, 40, **60**, 80, 100 etc. Donc le plus petit entier naturel non nul à la fois multiple de 15 et de 20 est 60.

27 **1.** Vrai. En effet, si un entier n est divisible par 8 alors il s'écrit sous la forme $n = 8k$ avec k entier. Par conséquent, n s'écrit également $n = 4 \times 2k = 4 \times k'$ avec $k' = 2k$ entier donc n est également divisible par 4.
2. Faux. Un entier divisible par 4 n'est pas divisible par 8 en général. 4 est un contre-exemple : 4 est divisible par 4 mais n'est pas divisible par 8 (12, 20 sont aussi d'autres contre-exemples possibles).
Remarque. L'énoncé de la question **2.** est l'énoncé réciproque de l'énoncé de la question **1.** On vient ainsi de voir que l'énoncé réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vrai.

28 **1.** Vrai. Si n est un multiple de 9 et m est un multiple de 12 alors il existe des entiers k et k' tels que $n = 9k$ et $m = 12k'$ et donc $m + n = 9k + 12k' = 3 \times 3k + 3 \times 4k' = 3(3k + 4k')$ avec $3k + 4k'$ entier donc $m + n$ est bien multiple de 3.
2. Faux. L'entier 12 est à la fois divisible par 4 et par 6 et pourtant il n'est pas divisible par 24.

29 **1.** Par la troisième identité remarquable, on a la factorisation : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Puisque $a^2 - b^2$ est premier alors ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même. Puisque $a + b \geqslant a - b$ étant donné que b est positif alors $a - b = 1$.
2. Par conséquent $a = b + 1$ donc a et b sont des entiers consécutifs.

30 **1.** $n + 1$ est le successeur de l'entier pair n donc $n + 1$ est impair.
2. $n - 1$ est l'entier qui précède l'entier pair n donc $n - 1$ est impair.
3. $n + 2$ étant la somme de deux entiers pairs, $n + 2$ est pair.
4. n^2 a la même parité que n donc n^2 est pair donc la somme $n^2 + 2$ est également paire (car somme de deux entiers pairs).

31 Soient m et n deux entiers pairs. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$ et donc la somme $m + n$ s'écrit : $m + n = 2k + 2k' = 2(k + k')$ avec $k + k'$ entier. Donc $m + n$ est multiple de 2 donc pair.
Autre méthode : la somme de deux entiers pairs autrement dit de deux multiples de 2 étant un multiple de 2, cette somme est donc paire.

32 **1.** Soient m et n deux entiers pairs. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$ et donc la différence $m - n$ s'écrit : $m - n = 2k - 2k' = 2(k - k')$ avec $k - k'$ entier. Donc $m - n$ est multiple de 2 donc pair.
2. Soient m et n deux entiers impairs. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $m = 2k + 1$ et $n = 2k' + 1$ et donc la différence $m - n$ s'écrit : $m - n = (2k + 1) - (2k' + 1) = 2k + 1 - 2k' - 1 = 2k - 2k' = 2(k - k')$ avec $k - k'$ entier. Donc $m - n$ est multiple de 2 donc pair.
3. Soient m un entier pair et n un entier impair. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $m = 2k$ et $n = 2k' + 1$ et donc la différence $m - n$ s'écrit : $m - n = 2k - (2k' + 1) = 2k - 2k' - = 2k - 2k' - 1 = 2(k - k') - 1$ avec $k - k'$ entier. Donc $m - n$ est impair.

33 **1.** Puisque n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, nécessairement l'un est pair et l'autre est impair.
2. Le produit $n(n + 1)$ est donc pair car c'est le produit de deux facteurs dont l'un est multiple de 2. Par conséquent, le quotient $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est entier.

34 Soient deux entiers n et m dont le produit $m \times n$ est impair. Montrons que nécessairement m et n sont tous deux impairs. On raisonne par l'absurde en supposant qu'au moins l'un d'eux est pair. Par conséquent, le produit $m \times n$ est pair ce qui contredit le fait que $m \times n$ est impair. Donc m et n sont tous deux impairs.

35 **1.** 2 étant le seul nombre premier pair, puisque p est un nombre premier tel que $p \neq 2$ alors p est nécessairement impair.
Par conséquent, $p - 1$ et $p + 1$ sont tous les deux des entiers pairs (puisque prédécesseur et successeur de p qui est impair).
2. Vu que $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$ avec $p - 1$ et $p + 1$ tous deux pairs, il existe deux entiers k et k' tels que $p - 1 = 2k$ et $p + 1 = 2k'$ et donc : $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1) = 2k \times 2k' = 4 \times kk'$ avec kk' entier donc $p^2 - 1$ est multiple de 4.

36 **1.** La somme des trois premiers multiples non nuls de 17 est égale à $17 + 34 + 51 = 102$. Cette somme est paire.

SPÉCIMEN

2. Pour l'entier 8, la somme de ses trois premiers multiples non nuls est égale à $8+16+24=48$. Cette somme est paire.
Pour l'entier 15, la somme de ses trois premiers multiples non nuls est égale à $15+30+45=90$. Cette somme est paire. Il semble que la somme des trois premiers multiples non nuls d'un entier quelconque est toujours paire.
3. Soit n un entier quelconque. Ses trois premiers multiples non nuls sont n, $2n$ et $3n$. Leur somme est égale à $n+2n+3n=6n$ or 6 étant pair, il en est de même de $6n$ donc la conjecture est démontrée.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. $260=4\times65$; donc 260 est un multiple de 4. $260=20\times13$; donc 260 est un multiple de 20. Il n'existe pas d'entier k tel que $260=k\times21$; donc 260 n'est pas un multiple de 21. Réponses **a.** et **b.**
2. Il n'existe pas d'entier k tel que $3=k\times15$; donc 15 n'est pas un diviseur de 3. $60=4\times15$; donc 15 est un diviseur de 60. $525=53\times15$; donc 15 est un diviseur de 525. Réponses **b.** et **c.**
3. Il n'existe pas d'entier k tel que $110=k\times6$; donc 110 n'est pas un multiple de 6. $486=81\times6$; donc 486 est un multiple de 6. Il n'existe pas d'entier k tel que $2223=k\times6$; donc 2 223 n'est pas un multiple de 6. Réponse **b.**
4. Réponses **a.** et **c.**
5. $120=2^3\times3\times5$ et $105=3\times5\times7$; des diviseurs communs à 120 et 105 sont donc 3 et 15. Réponses **a.** et **c.**
6. $60=12\times5=15\times4$; donc 60 est un multiple commun de 12 et 15. $180=12\times15$; donc 180 est un multiple commun de 12 et 15. Réponses **b.** et **c.**
7. $7524=2^2\times3^2\times11\times19$. Réponses **b.** et **c.**
8. $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{3}{5}-\frac{1\times4}{5\times3}=\frac{3}{5}-\frac{4}{15}=\frac{3\times3}{5\times3}-\frac{4}{15}$ Réponses **b.** et **c.**
$=\frac{9}{15}-\frac{4}{15}=\frac{9-4}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$;
9. $\sqrt{891}=\sqrt{9^2\times11}=\sqrt{9^2}\times\sqrt{11}=9\sqrt{11}$; Réponse **a.**
10. Si m est pair, alors $3m$ est pair ; la somme de deux entiers pairs est paire, donc $(n+3m)$ est pair ; un entier et son carré ont la même parité donc n^2 est pair et m^2 est pair ; la somme de deux entiers pairs est paire ; quelle que soit la parité de m, $4m$ est pair ; la somme de deux entiers pairs est paire, donc $(n+4m)$ est pair. Réponses : **a.**, **b.** et **c.**
11. Si m est impair, alors $3m$ est impair (produit de deux entiers impairs) ; la somme de deux entiers de parité différente est impaire, donc $(n+3m)$ est impaire ; un entier et son carré ont la même parité donc n^2 est pair et m^2 est impair ; la somme de deux entiers de parité différente est impaire ; quelle que soit la parité de m, $4m$ est pair ; la somme de deux entiers pairs est paire, donc $(n+4m)$ est pair. Réponse **c.**

vrai ou faux ?

Partie A.
1. $117=3^2\times13$; donc $117=1\times117=3\times39=9\times13$. Vrai.
2. Un multiple de 3 est de la forme $3n$ avec n entier ; un multiple de 5 est de la forme $5m$ avec m entier ; donc le produit est de la forme $3n\times5m=15\times n\times m$: c'est un multiple de 15. Vrai.
3. Soit les entiers impairs $A=2n+1$ (avec n entier) et $B=2m+1$ (avec m entier), alors $A+B=2n+1+2m+1=2\times(n+m+1)$: la somme est donc paire. Vrai.
4. Soit les entiers pairs $A=2n$ (avec n entier) et $B=2m$ (avec m entier), alors $A\times B=2n\times2m=4\times(n\times m)$: le produit est donc un multiple de 4 ; il est divisible par 4. Vrai.
5. Soit A un entier divisible par 30, donc $A=30n$ avec n entier.
$A=30\times n=5\times6\times n=5\times(6n)$; or $6n$ est un entier, donc A est divisible par 5 ; $A=30\times n=5\times6\times n=6\times(5n)$; or $5n$ est un entier, donc A est divisible par 6. Vrai.
6. A est divisible par 5 et par 6 donc $A=5\times6\times n=30n$, avec n entier ; donc A est divisible par 30. Vrai.
7. Les diviseurs de n sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 11 ; 22 ; 44 ; 88. Vrai
8. Si deux entiers sont consécutifs, l'un est pair, l'autre est impair : le produit est donc pair. Vrai.
9. Si deux entiers sont consécutifs, l'un est pair, l'autre est impair : la somme est donc impaire. Vrai.

Partie B.
1. $101=1\times101$; donc 101 est premier. Vrai.
2. $3977=41\times97$; donc 3 977 n'est pas premier. Vrai.
3. 2 est pair et est premier. Faux.
4. Tout entier pair strictement supérieur à 2 est la forme $2\times n$ (avec n entier), donc il n'est pas premier. Vrai.
5. 2 et 3 sont premiers et $2+3=5$; or 5 est premier. Faux.
6. Vrai : par définition des nombres premiers.
7. Faux : 35 n'est pas un nombre premier.
8. $\frac{572}{146}=\frac{2\times2\times11\times13}{2\times73}=\frac{2\times11\times13}{73}\neq\frac{11}{3}$. Faux.
9. $\frac{455}{525}=\frac{5\times7\times13}{3\times5\times5\times7}=\frac{13}{15}$. Faux.
10. $\sqrt{180}=\sqrt{2^2\times3^2\times5}=2\times3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$. Faux.
11. $\sqrt{3^2\times5^3\times11^4}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{5^2\times5}\times\sqrt{(11^2)^2}$ Faux.
$=3\times5\sqrt{5}\times11^2=1815\sqrt{5}$.

Exercices Application

60 **1.** Pour trouver le plus grand nombre d'équipes, il faut trouver le plus grand diviseur commun à 588 et à 420.
$588=2^2\times3\times7^2$ et $420=2^2\times3\times5\times7$ donc $588=(2^2\times3\times7)\times7$ et $420=(2^2\times3\times7)\times5$; le plus grand diviseur commun est $2^2\times3\times7=84$: on peut composer 84 équipes.
2. $588=84\times7$: donc 7 garçons par équipe ;
$420=84\times5$: donc 5 filles par équipe.

65 • $150\times10=(2\times3\times5^2)\times(2\times5)=2^2\times3\times5^3$
• $4\times49\times9^2=2^2\times7^2\times(3^2)^2=2^2\times3^4\times7^2$
• $42210=2\times3^2\times5\times7\times67$

88 Le triangle est rectangle, donc $c^2=a^2+b^2$.
Un entier et son carré ont la même parité, donc a^2 et b^2 sont pairs ; la somme de deux nombres pairs est paire, donc c^2 est pair. Or c^2 a la même parité que c donc c est pair.

92 **1.** $a^2=2\times(2q)+1$; donc a^2 est impair. Un entier et son carré ont la même parité, donc a est impair.
2. a est impair, donc il existe un entier n tel que $a=2n+1$.
$(a+5)^2=a^2+10a+25=(4q+1)+10\times(2n+1)+25$
$=4q+20n+1+10+25=4q+4\times5n+36=4\times(q+5n+9)$
Donc $(a+5)^2$ est divisible par 4.

Exercices Entraînement

111 **1.** $6804\times m=2^2\times3^5\times7\times m$; le plus petit entier m permettant d'obtenir un carré parfait est $m=3\times7=21$.
2. $1920\times m=2^7\times3\times5\times m$; le plus petit entier m permettant d'obtenir un cube parfait est $m=2\times3^2\times5^2=450$.

120 Soit A et B deux entiers pairs : il existe deux entiers n et p tels que $A=2n$ et $B=2p$. $A\times B=2n\times2p=2\times(2np)$; ce qui prouve que le produit de deux entiers pairs est pair. Soit A et B deux entiers impairs : il existe deux entiers n et p tels que $A=2n+1$ et $B=2p+1$.
$A\times B=(2n+1)\times(2p+1)=2\times(2np+n+p)+1$; ce qui prouve que le produit de deux entiers impairs est impair.
$n^2=n\times n$: n^2 a la même parité que n.
$n^3=n^2\times n$: n^3 a la même parité que n.
$n^4=n^3\times n$: n^4 a la même parité que n.
…
$n^{2024}=n^{2023}\times n$: n^{2024} a la même parité que n.

SPÉCIMEN

Chapitre 3

J'applique en autonomie

22 **a.** $2(x+3)=2\times x+2\times 3=2x+6$

b. $3x^2(2-x)=3x^2\times 2-3x^2\times x=6x^2-3x^3$

c. $(3x-4)(1+2x)=3x\times 1+3x\times 2x-4\times 1-4\times 2x$
$=3x+6x^2-4-8x=6x^2-5x-4$

d. $(2x+1)(x-3)=2x\times x-2x\times 3+1\times x-1\times 3$
$=2x^2-6x+x-3=2x^2-5x-3$

23 **a.** $8x+6=2\times 4x+2\times 3=2(4x+3)$

b. $6t^2+12t=6t\times t+6t\times 2=6t(t+2)$

c. $4x(3-2x)+(3-2x)(x+1)=(3-2x)(4x+(x+1))$
$=(3-2x)(4x+x+1)$
$=(3-2x)(5x+1)$

d. $5(x-1)-3x(x-1)=(x-1)(5-3x)$

24 **a.** $(x-5)(x+5)=x^2-25$ **b.** $(t+4)^2=t^2+8t+16$

c. $(3x-1)^2=9x^2-6x+1$ **d.** $(2x+9)^2=4x^2+36x+81$

e. $9x^2+30x+25=(3x+5)^2$ **f.** $16x^2-49=(4x-7)(4x+7)$

25 **1.** Longueur du côté du carré vert : n. Longueur du côté du carré bleu : $n+1$. Longueur du côté du carré rouge : $n+2$.
Aire $=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4$
$=3n^2+6n+5$

2. Longueur du côté du carré vert : $n-1$. Longueur du côté du carré bleu : n. Longueur du côté du carré rouge : $n+1$.
Aire $=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1$
$=3n^2+2$

3. Longueur du côté du carré vert : $n-2$. Longueur du côté du carré bleu : $n-1$. Longueur du côté du carré rouge : n.
Aire $=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2$
$=3n^2-6n+5$

4. **a.** L'expression obtenue à la question **2** semble la plus adaptée.

b. On cherche n tel que Aire $=245$.

$3n^2+2=245 \Leftrightarrow 3n^2=243 \Leftrightarrow n^2=\dfrac{243}{3}$
$\Leftrightarrow n^2=81 \Leftrightarrow n^2-9^2=0 \Leftrightarrow (n-9)(n+9)=0$

On a donc : $n-9=0 \Leftrightarrow n=9$ ou $n+9=0 \Leftrightarrow n=-9$. n étant positif, on a $n=9$. Or n représente la longueur du carré bleu. Il faut donc que les trois carrés aient pour longueurs respectives : 8, 9 et 10.

26 **1.** $f(x)=(3x-2)^2-49=9x^2-12x+4-49=9x^2-12x-45$.
$f(x)=(3x-2)^2-49=(3x-2)^2-7^2$
$=((3x-2)-7)((3x-2)+7)=(3x-9)(3x+5)$.

2. **a.** On remarque que $3\times\dfrac{2}{3}=2$. La forme d'origine semble pratique.

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(3\times\dfrac{2}{3}-2\right)^2-49=(2-2)^2-49=-49$

b. Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0;f(0))$. La forme développée semble adaptée.
$f(0)=9\times 0^2-12\times 0-45=-45$. Ses coordonnées sont donc $(0;-45)$.

c. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x)=0$. La forme factorisée est la plus adaptée. $f(x)=0 \Leftrightarrow (3x-9)(3x+5)=0$.
On a donc : $3x-9=0 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$
ou : $3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$.
Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$ et $(3;0)$.

d. $A\in\mathscr{C} \Leftrightarrow f(4)=51$
Aucune forme n'est à privilégier ici, on peut utiliser la forme de base.
$f(4)=(3\times 4-2)^2-49=(12-2)^2-49=10^2-49=100-49=51$
On en déduit que le point A appartient à $\mathscr{C}$.

e. Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ d'ordonnées 15 sont les solutions de l'équation $f(x)=15$.
La forme de base semble la plus adaptée, en effet :
$f(x)=15 \Leftrightarrow (3x-2)^2-49=15 \Leftrightarrow (3x-2)^2-64=0$
$\Leftrightarrow (3x-2)^2-8^2=0 \Leftrightarrow ((3x-2)-8)((3x-2)+8)=0$
$\Leftrightarrow (3x-10)(3x+6)=0$
On a donc : $3x-10=0 \Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$
ou : $3x+6=0 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$.
Les abscisses recherchées sont donc -2 et $\dfrac{10}{3}$.

27 **1.** Le dénominateur s'annule pour $x=3$ donc 3 est une valeur interdite.

2. Le dénominateur s'annule pour $x=0$ et $x=2$ donc 0 et 2 sont des valeurs interdites.

3. Les dénominateurs s'annulent pour $x=-4$ et $x=\dfrac{5}{2}$ donc -4 et $\dfrac{5}{2}$ sont des valeurs interdites.

4. x^2+1 ne s'annule pas, il n'y a pas de valeur interdite.

28 **1.** L'équation est une équation quotient nul.
$\dfrac{4x+1}{3-x}=0 \Leftrightarrow 4x+1=0$ et $3-x\neq 0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$ et $x\neq 3$
On a $-\dfrac{1}{4}\neq 3$ donc $S=\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

2. L'équation est une équation quotient nul.
$\dfrac{2}{x+1}=0 \Leftrightarrow 2=0$ et $x+1\neq 0$
C'est impossible donc $S=\varnothing$.

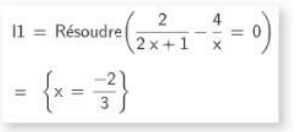
3. L'équation est une équation quotient nul.
$\dfrac{x(3x-9)}{x-2}=0 \Leftrightarrow x(3x-9)=0$ et $x-2\neq 0$
Or $x(3x-9)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $3x-9=0$.
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$
On a $0\neq 2$ et $3\neq 2$. Donc $s=\{0;3\}$.

4. L'équation est une équation quotient nul.
$\dfrac{4-x^2}{x}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0$ et $x\neq 0$
Or $4-x^2=0 \Leftrightarrow 2^2-x^2=0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x)=0$
$\Leftrightarrow 2-x=0$ ou $2+x=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$.
On a $2\neq 0$ et $-2\neq 0$. Donc $S=\{-2;2\}$.

29 **1.** Les dénominateurs s'annulent pour $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=0$. Les valeurs interdites sont donc $-\dfrac{1}{2}$ et 0.

2. $\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{4}{x}=\dfrac{2\times x}{(2x+1)x}-\dfrac{4\times(2x+1)}{x(2x+1)}=\dfrac{2x-8x-4}{x(2x+1)}=\dfrac{-6x-4}{x(2x+1)}$

3. $\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{4}{x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x-4}{x(2x+1)}=0$
C'est une équation quotient nul.
$\dfrac{-6x-4}{x(2x+1)}=0 \Leftrightarrow -6x-4=0$ et $x\neq 0$, $x\neq -\dfrac{1}{2}$
Or $-6x-4=0 \Leftrightarrow -6x=4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.
On a $-\dfrac{2}{3}\neq 0$ et $-\dfrac{2}{3}\neq -\dfrac{1}{2}$.
Donc $S=\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$. À l'aide de Geogebra on obtient :



30 $5-\dfrac{3x+1}{x(x-2)}=\dfrac{5x(x-2)}{x(x-2)}-\dfrac{3x+1}{x(x-2)}=\dfrac{5x^2-10x-3x-1}{x(x-2)}$
$=\dfrac{5x^2-13x-1}{x(x-2)}$

$\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{x+2}{2x-5}=\dfrac{4(2x-5)}{(x+4)(2x-5)}+\dfrac{(x+2)(x+4)}{(2x-5)(x+4)}$
$=\dfrac{8x-40+x^2+4x+2x+8}{(2x-5)(x+4)}=\dfrac{x^2+14x-32}{(2x-5)(x+4)}$

31 **1.** $x\in[0;10]$

2. Aire $=AM^2+NH^2=x^2+(10-x)^2=x^2+100-20x+x^2$
$=2x^2-20x+100$

SPECIMEN

32 **1.** Dans ABC rectangle en A d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow x^2 = 2^2 + AC^2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = AC^2$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = AC^2$
Donc $AC = \sqrt{(x-2)(x+2)}$
2. Il faut que $x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.
3. $A = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{(x-2)(x+2)}}{2} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$
$p = AB + AC + BC = 2 + x + \sqrt{(x-2)(x+2)}$

33 **1.** $60 = 50 + 10$. Il a donc dépassé son forfait de 10 Go.
Il devra payer $25 + 10 \times 5$ soit 75 €.
2. Si $x \leqslant 50$ alors il n'a pas dépassé son forfait, il devra payer 25 €.
Si $x > 50$ alors il a dépassé son forfait de $x - 50$ Go.
Il devra payer $25 + 5(x-50) = 25 + 5x - 250 = 5x - 225$.

34 **1.** $U = e - rI \Leftrightarrow U + rI = e$
2. $U = e - rI \Leftrightarrow U - e = rI \Leftrightarrow \dfrac{(U-e)}{r} = I$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. $(x+3)(2x-1) = x \times 2x + x \times (-1) + 3 \times 2x + 3 \times (-1) = 2x^2 + 5x - 3$
Réponse **b**.
2. $(2x-1)^2 = 4x^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$. Réponse **c**.
3. $(4x-3)(4x+3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$. Réponse **c**.
4. $(x-2)(5x+1) - (x-2)(2x-3) = (x-2)(5x+1-2x+3)$
$= (x-2)(3x+4)$.
Réponse **b**.
5. Identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 8$.
Réponse **a**.
6. Identité remarquable de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 9x$ et $b = 1$. Réponse **b**.
7. Identité remarquable de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 1$. Or $2ab = 2x$ donc la réponse n'est ni **a.**, ni **b.** En développant on trouve que la réponse est **c**.
8. $3 - \dfrac{x+1}{x+2} = 3 \times \dfrac{x+2}{x+2} - \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2x+5}{x+2}$. Réponse **a**.
9. $(3x+9)(1-2x) = 0$. On a donc : $3x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$
ou : $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Réponses **b.** et **c.**
10. $\dfrac{x(5x+10)}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow x(5x+10) = 0$ et $2x - 4 \neq 0$.
Donc $x = 0$ ou $5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ et $x \neq 2$. Réponses **a.** et **b.**
11. $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \geqslant 2a$ car $a^2 \geqslant 0$ et $1 > 0$. Réponse **b.**
12. $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$. Contre-exemple au **b** : $x = 0$ et $y = -1$: $\dfrac{x}{y} = 0$
Contre-exemple au **c** : $x = 4$ et $y = 1$: $\dfrac{x}{y} = 4$. Réponse **a**.

vrai ou faux ?

Partie A.
1. Vrai. $f(x) = 3(x \times 2x + x \times 1 - 1 \times 2x - 1 \times 1 - 2(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2)$
$= 3(2x^2 + x - 2x - 1) - 2(x^2 - 2x + 1)$
$= 6x^2 - 3x - 3 - 2x^2 + 4x - 2 = 4x^2 + x - 5$.
2. Vrai. On factorise $f(x)$:
$f(x) = (x-1)[3(2x+1) - 2(x-1)] = (x-1)(6x+3-2x+2)$
$= (x-1)(4x+5) = A(x)$.
3. Faux. $f(0) = B(0) = 4 \times 0^2 + 0 - 5 = -5$.
4. Vrai. $B(x) = 5 \Leftrightarrow 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(4x+1) = 0$. C'est une équation produit nul, elle admet donc deux solutions.
5. Faux. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x+5) = 0$. On a donc : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
ou : $4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$.

Partie B.
1. Faux. $3x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{3}$.
2. Vrai. $(E) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3x+1} - \dfrac{4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1) - 4(3x+1)}{(3x+1)(x+1)} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-10x - 2}{(3x+1)(x+1)} = 0$.
3. Faux. C'est une équation quotient elle admet une seule solution, celle de $-10x - 2 = 0$.

Exercices Application

47 **a.** $3 \times 5 - 3 \times 3t^6 = 3(5 - 3t^6)$ **b.** $4u \times 3 + 4u \times 2u^2 = 4u(3 + 2u^2)$
c. $2a^3 \times a^2 - 2a^3 \times 3 = 2a^3(a^2 - 3)$

56 **1.** $A(x) = 5 \times 9 - 5 \times 3x - (9 \times x + 9 \times 1 + (-3x) \times x + (-3x) \times 1)$
$= 45 - 15x - (9x + 9 - 3x^2 - 3x)$
$= 45 - 15x + 3x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - 21x + 36$
2. $A(x) = (9 - 3x)(5 - (x+1)) = (9 - 3x)(4 - x) = 3(3 - x)(4 - x)$
3. a. $A(x) = 0 \Leftrightarrow 3(3-x)(4-x) = 0$. Donc, $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou
$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$
b. $A(\sqrt{2}) = 3 \times \sqrt{2}^2 - 21\sqrt{2} + 36 = 42 - 21\sqrt{2}$
$A(3) = 3(3-3)(4-3) = 0$

62 **1.** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x}{x} + \dfrac{5}{x} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{x}{2x} + \dfrac{10}{2x} = \dfrac{x+10}{2x}$
2. $\dfrac{x}{3x-2} \times \dfrac{3}{3} - \dfrac{2+x}{3} \times \dfrac{3x-2}{3x-2} = \dfrac{3x - (2+x)(3x-2)}{3(3x-3)} = \dfrac{-3x^2 - x + 4}{3(3x-3)}$

70 $E = -3a + (-a+1) = -4a + 1$ $\quad (-4) \times (-2) + 1 = 9$
$(-4) \times 4 + 1 = -15$ $\quad -4a + 1 = -19 \Leftrightarrow -4a = -20 \Leftrightarrow a = \dfrac{-20}{-4} = 5$
$(-4) \times \dfrac{1}{3} + 1 = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{3} = -\dfrac{1}{3}$

$a =$	-2	4	5	$\frac{1}{3}$
$E =$	9	-15	-19	$-\frac{1}{3}$

78 **1.** $\dfrac{\pi \times \text{diamètre}}{2} + x + x = \dfrac{3\pi}{2} + 2x$
2. $\dfrac{\pi \times \text{diamètre}}{2} + 3 + 3 = \dfrac{x\pi}{2} + 6$

Exercices Entraînement

83 **1.** $2xy^2 - 3x - xy^2 - 5x = xy^2 - 8x$ **2.** $\dfrac{3ab^4 \times 3a}{3ab^4 \times 2b} = \dfrac{3a}{2b}$

86 **1.** $4x(7x-6) + 2(7x-6) = (7x-6)(4x+2)$
2. $(3x-4)^2 - 7x(3x-4) = (3x-4)(3x-4-7x)$
$= (3x-4)(-4x-4) = -4(3x-4)(x+1)$
3. $(2x+1)(3-x) + (3-x) = (3-x)(2x+1+1)$
$= (3-x)(2x+2) = 2(3-x)(x+1)$

114 **1.** $(4x+1)(x-2) = 0$, donc $4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ ou
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Dans $\mathbb{N}$ la seule solution est $x = 2$.
2. $(6x-1)(-2x+6) = 0$, donc $6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$ ou
$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Dans $\mathbb{N}$ la seule solution est $x = 3$.

140 On note x le nombre de places à 30 £ vendues.
Le spectacle est complet avec 500 spectateurs, il y a alors $500 - x$ places à 45 £ vendues. On a donc :
$30 \times x + 45(500 - x) = 18\,000$
$\Leftrightarrow 30x + 22\,500 - 45x = 18\,000$
$\Leftrightarrow -15x = -4\,500 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4\,500}{-15} = 300$.
Il y a 300 places à 30 £ et 200 places à 45 £ vendues.

Chapitre 4

J'applique en autonomie

19 $A - B = (a-b)^2 - (a^2 + b^2) = a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = -2ab$.
a et b étant de même signe, on a $ab \geqslant 0$ donc $-2ab \leqslant 0$
On a donc $A \leqslant B$.

SPECIMEN

20 $A-B=(a^2+1)-(a+1)^2=a^2+1-a^2-2a-1=-2a$

- Si $a<0$ alors $A-B>0$ et donc $A>B$.
- Si $a>0$ alors $A-B<0$ et donc $A<B$.
- Si $a=0$ alors $A=B$.

21 $A-B=(a+b)^2-(a^2+3b^2)=a^2+2ab+b^2-a^2-3b^2$
$=2ab-2b^2=2b(a-b)$

$0<a<b$ donc $b>0$ et $a-b<0$. Donc $2b(a-b)<0$. Ainsi $A<B$.

22 $A-B=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}$. a et b sont strictement positifs donc $ab>0$ et $(a-b)^2\geqslant 0$, donc $\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$.

On a donc $A\geqslant B$. Si $a=b$ alors $(a-b)^2=0$ et donc $A=B$.

23 **1.** B est strictement positif. $\frac{A}{B}=\frac{3a^4}{6a^3}=\frac{a}{2}$.

Comme $a<1$ alors $\frac{a}{2}<\frac{1}{2}<1$. Donc $A<B$.

2. $A-B=3a^4-6a^3=3a^3(a-2)$. $0<a<1$ donc $a-2<-1<0$ et $3a^3>0$. On a donc $3a^3(a-2)<0$ et ainsi $A<B$.

24 **1.** $A-B=\frac{a-1}{b-1}-\frac{a+1}{b+1}=\frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$
$=\frac{2a-2b}{(b-1)(b+1)}=\frac{2(a-b)}{(b-1)(b+1)}$

2. $b>1$ donc $b-1>0$ et $b+1>0$, donc $(b-1)(b+1)>0$.

- Si $a>b$ alors $a-b>0$ donc $2(a-b)>0$ et ainsi $A-B>0$ donc $A>B$.
- Si $a<b$ alors $a-b<0$ donc $2(a-b)<0$ et ainsi $A-B<0$ donc $A<B$.
- Si $a=b$ alors $a-b=0$ donc $A-B=0$ et ainsi $A=B$.

3. a. On applique le résultat de la question **2** avec $a=123456789$ et $b=987654322$. $a<b$ donc $A<B$.

b. Avec $a=10,000001$ et $b=6,000002$. $a>b$ donc $A>B$.

25 **1.** $9x+4\leqslant 3x-2\Leftrightarrow 6x\leqslant -6\Leftrightarrow x\leqslant -1$ donc $S=]-\infty;-1]$.

2. $\frac{x+4}{5}\leqslant 2x\Leftrightarrow x+4\leqslant 10x\Leftrightarrow -9x\leqslant -4\Leftrightarrow x\geqslant \frac{4}{9}$

donc $S=\left[\frac{4}{9};+\infty\right[$.

26 On pose $AM=x$. On a $x\in[0;6]$. Aire$(ABM)=\frac{9x}{2}=4,5x$ et Aire$(DCM)=\frac{9(6-x)}{2}=27-4,5x$.

Aire$(ABM)\leqslant\frac{1}{4}$Aire$(DCM)\Leftrightarrow 4,5x\leqslant 6,75-1,125x$
$\Leftrightarrow 5,625x\leqslant 6,75\Leftrightarrow x\leqslant 1,2$.

Donc $x\in[0;1,2]$. M doit être entre 0 et 1,2 cm de A sur $[AD]$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. Pour $x=-2$: $x^2+1=5$ et $4x=-8$; $5>-8$
$-\frac{1}{2}x+3=4$ et $4>1$. Réponses **b.** et **c.**

2. $-8x+5>x+6\Leftrightarrow -9x>1\Leftrightarrow x<-\frac{1}{9}$. Réponse **a.**

3. $x+3\leqslant\frac{2x}{5}\Leftrightarrow 5x+15\leqslant 2x\Leftrightarrow 3x\leqslant -15\Leftrightarrow x\leqslant -5$. Réponse **c.**

4. Si $x\geqslant 3$ alors $\frac{x}{2}\geqslant 1,5$; $-x\leqslant -3$ et $x-3\geqslant 0$. Réponses **a.** et **c.**

5. Si $-2<x<5$ alors $-6<x-4<1$
$-5<-x<2$ et $-15<-3x<6$. Réponses **a.** et **c.**

6. $6x+9>0\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$. Réponse **b.**

7. $(3x+2)^2-(12x+4)=9x^2\geqslant 0$. Réponse **b.**

8. $0<x<1$ donc en multipliant par $x^2>0$, on a : $0<x^3<x^2$.
$0<x<1$ donc $x-1<0$ donc en multipliant par $x^2>0$, on a : $x^2(x-1)<0$. Réponses **a.** et **c.**

9. $BM=4-x$ donc comme $x\in[0;4]$ alors $BM\in[0;4]$ et $2x\in[0;8]$. Réponses **a.** et **b.**

10. Si $x>y$ alors $x-y>0$. On ne connaît pas le signe de y donc on ne peut pas conclure sur les réponses **b.** et **c.** Réponse **a.**

vrai ou faux ?

Partie A.

1. $-7x+5>0\Leftrightarrow x<\frac{5}{7}$. Donc **a.** : faux ; **b.** : faux ; **c.** : vrai.

2. a. Vrai car $f(x)-(-3)=4(x+2)^2$ et pour tout réel x, $4(x+2)^2\geqslant 0$ donc $f(x)\geqslant -3$.

b. Faux car $f(0)=13>0$. **c.** Faux car $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{73}{9}>\frac{61}{9}$.

d. Vrai car $f(x)\leqslant 2x(x-1)$
$\Leftrightarrow 4(x^2-4x+4)-3\leqslant 4x^2-2x\Leftrightarrow -14x\leqslant -13\Leftrightarrow x\geqslant\frac{13}{14}$.

Partie B.

1. Faux car $M\in[AB]$ donc $x\in[0;4]$.

2. Vrai d'après la question 1.

3. Vrai car les droites (MN) et (AC) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AC}$

4. Vrai car $\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AC}\Leftrightarrow\frac{4-x}{4}=\frac{MN}{8}\Leftrightarrow MN=8-2x$.

5. Vrai car le périmètre de $AMNP$ est : $2x+2(8-2x)=-2x+16$.

6. Faux car $-2x+16\geqslant 14\Leftrightarrow x\leqslant 1\Leftrightarrow x\in[0;1]$.

Exercices Application

35 **1.** $a-5<b-5$ **2.** $3a<3b$ **3.** $-0,2a>-0,2b$ **4.** $\frac{a}{6}<\frac{b}{6}$

50 **1.** $12x+8\geqslant 4\Leftrightarrow 12x\geqslant -4\Leftrightarrow x\geqslant\frac{-4}{12}\Leftrightarrow x\geqslant -\frac{1}{3}$ donc $S=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

2. $7x-6\leqslant 10x\Leftrightarrow -3x\leqslant 6\Leftrightarrow x\geqslant\frac{6}{-3}\Leftrightarrow x\geqslant -2$ donc $S=[-2;+\infty[$.

3. $5x+1<9x-4\Leftrightarrow -4x<-5\Leftrightarrow x>\frac{-5}{-4}\Leftrightarrow x>\frac{5}{4}$ donc $S=\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.

4. $\frac{7x}{8}>2x\Leftrightarrow 7x>16x\Leftrightarrow -9x>0\Leftrightarrow x<0$ donc $S=]-\infty;0[$.

Exercices Entraînement

70 **1.** $-15\leqslant 3x\leqslant -9$ **2.** $3\leqslant -x\leqslant 5$
3. $-4\leqslant x+y-1\leqslant -1$ **4.** $-16\leqslant 4x+2y\leqslant -6$
5. $14\leqslant -3x+2y+1\leqslant 22$ **6.** $-8\leqslant x-y\leqslant -5$

77 **1.** $2(x+y)=20$ donc $x+y=10$ et $y=10-x$.

2. $-1,4<-x<-1,3$ donc $8,6<y<8,7$.

90 **1.** $-2(x+1)^2+5=-2(x^2+2x+1)+5=-2x^2-4x+3=f(x)$.
Donc $f(x)=-2(x+1)^2+5$.

2. $f(-1)=-2(-1+1)^2+5=5$.

3. $f(x)-f(-1)=-2(x+1)^2$. Or, pour tout réel x, $(x+1)^2\geqslant 0$ donc $f(x)-f(-1)\leqslant 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)\leqslant f(-1)$.

4. On en déduit que 5 est le maximum de f atteint pour $x=-1$.

102 **1.** $3x+11>3(1+x)\Leftrightarrow 0x>-8$, vrai pour tout réel x donc $S=\mathbb{R}$.

2. $6>3x+7\Leftrightarrow -3x>1\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$ donc $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$.

3. $\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}\leqslant x+1\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x\leqslant\frac{4}{5}\Leftrightarrow x\geqslant\frac{4}{5}\times\frac{-3}{1}\Leftrightarrow x\geqslant -\frac{12}{5}$

donc $S=\left[-\frac{12}{5};+\infty\right[$.

105 **1.** $x^2+4x+12>(x+4)(x-6)\Leftrightarrow x^2+4x+12>x^2-2x-24$
$\Leftrightarrow 6x>-36\Leftrightarrow x>-6$. Donc $S=]-6;+\infty[$.

2. $(x-3)(x+8)<(x+8)(x+5)$
$\Leftrightarrow -8x<64\Leftrightarrow x>\frac{64}{-8}\Leftrightarrow x>-8$ donc $S=]-8;+\infty[$.

SPÉCIMEN

Chapitre 5

J'applique en autonomie

18 **1.** Dans le triangle ABC rectangle en B, on a, par le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 4^2 = 80$ d'où $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \simeq 8{,}9$ cm.

2. On a $\tan\widehat{C} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{8}{4} = 2$ d'où $\widehat{C} = \tan^{-1}(2) \simeq 63°$ et donc $\widehat{A} = 180° - \widehat{B} - \widehat{C} \simeq 180° - 90° - 63 \simeq 27°$.

3. Puisque $[BC]$ est la hauteur issue de C du triangle ABC, son aire est égale à $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{BA \times BC}{2} = \dfrac{8 \times 4}{2} = 16$ cm².

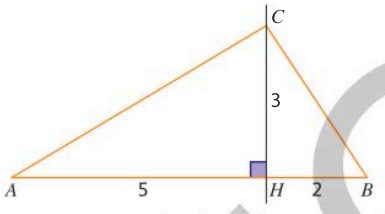
19 **1.** $[EG]$ est une diagonale du carré $EFGH$ de côté 8 cm. Par le théorème de Pythagore dans le triangle EFG rectangle en F, on a donc $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 8^2 + 8^2 = 128$ d'où $EG = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ cm.

2. On se place dans le triangle AEG rectangle en E. On a : $\tan\widehat{AGE} = \dfrac{EA}{EG} = \dfrac{8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\widehat{AGE} = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 35{,}3°$.

3. Le cube a pour volume $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = AB^3 = 8^3 = 512\,\text{cm}^3$ tandis que le tétraèdre $ABCG$ de base le triangle ABC d'aire $B = \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{64}{2} = 32\,\text{cm}^2$ et de hauteur associée $h = CG = 8$ cm a pour volume $V_{ABCG} = \dfrac{1}{3} \times B \times h = \dfrac{1}{3} \times 32 \times 8 = \dfrac{256}{3}\,\text{cm}^3$.

Ainsi, on a bien $V_{ABCDEFGH} = 6 \times V_{ABCG}$.

20 **1.**



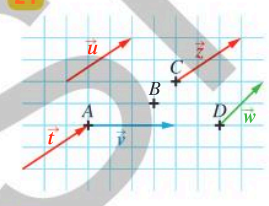
2. Dans le triangle AHC rectangle en H, on a, par le théorème de Pythagore, $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ et donc $AC = \sqrt{34} \simeq 5{,}8$ cm.

3. On a, d'une part, dans le triangle AHC rectangle en H, $\tan\widehat{HAC} = \dfrac{CH}{AH} = \dfrac{3}{5}$ d'où $\widehat{AHC} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) \simeq 31°$.

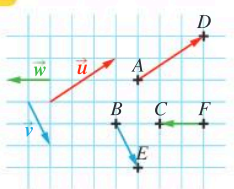
D'autre part, dans le triangle BCH rectangle en H, on a $\tan\widehat{BCH} = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{2}{3}$ d'où $\widehat{BCH} = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \simeq 33{,}7°$. Donc $\widehat{BCH}$ a une mesure plus grande que $\widehat{HAC}$.

4. $[CH]$ étant la hauteur issue de C du triangle ABC, son aire est $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{7 \times 3}{2} = 10{,}5\,\text{cm}^2$.

21

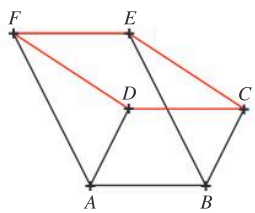


22

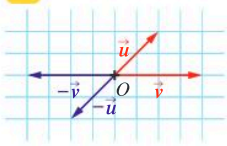


23 **1.** On peut conjecturer que $CDFE$ est un parallélogramme.

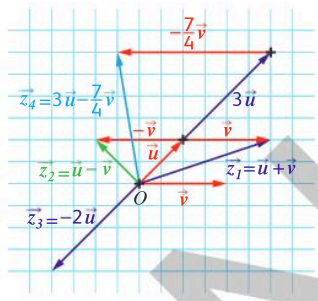
2. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Comme $ABEF$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$. Ainsi, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$. Donc, $DCEF$ est un parallélogramme.



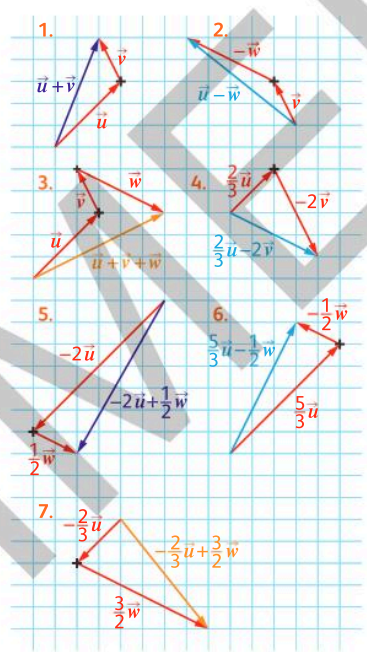
24 **1.**



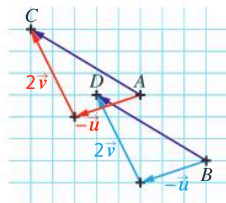
2.



25



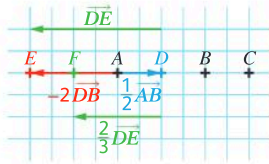
26 **1. 2.**



3. a. Puisque $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + 2\vec{v} = \overrightarrow{BD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont égaux.

b. Le quadrilatère $ABDC$ est donc un parallélogramme (par la propriété de caractérisation des parallélogrammes par une égalité vectorielle).

27 **1. 2.**



3. a. On considère comme unité le petit carreau dans la suite. Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont **colinéaires** de sens **contraires** donc il existe un réel **négatif** k tel que $\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{AF}$. De plus, la norme du vecteur $\overrightarrow{EB}$ est de 8 unités tandis que celle de $\overrightarrow{AF}$ est de 2 unités donc la norme de $\overrightarrow{EB}$ est le quadruple de celle de $\overrightarrow{AF}$ donc $k = -4$ d'où $\overrightarrow{EB} = -4\overrightarrow{AF}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont **colinéaires** de **même** sens donc il existe un réel **positif** k' tel que $\overrightarrow{AD} = k'\overrightarrow{ED}$. De plus, la norme du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est de 2 unités tandis que celle de $\overrightarrow{ED}$ est de 6 unités donc la norme de $\overrightarrow{AD}$ est le tiers de celle de $\overrightarrow{ED}$ donc $k' = \dfrac{1}{3}$ d'où $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{ED}$.

SPECIMEN

c. Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont **colinéaires** de sens **contraires** donc il existe un réel **négatif** k'' tel que $\overrightarrow{DC} = k''\overrightarrow{DE}$. De plus, la norme du vecteur $\overrightarrow{DC}$ est de 4 unités tandis que celle de $\overrightarrow{DE}$ est de 6 unités donc la norme de $\overrightarrow{DC}$ est égale aux $\frac{4}{6}$ (soit aux $\frac{2}{3}$) de celle de $\overrightarrow{ED}$ donc $k'' = -\frac{2}{3}$ d'où $\overrightarrow{DC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$.

28 **1.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

2. $\vec{u} = -2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA} + 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= -2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

$\vec{v} = 2\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + 4\overrightarrow{AC}$

$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}$

3. $2\vec{u} = 2\left(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

29 **1.** $2\vec{u} = 2\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. $\frac{4}{3}\vec{v} = \frac{4}{3}\left(3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}\right) = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

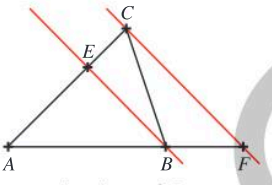
3. $-2\vec{u} = -2\left(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}\right) = -4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{BC}$

$= -4\overrightarrow{AB} - 6\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{AC}$

$= -4\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

30 **1.** Figure :



On peut conjecturer que les droites (BE) et (CF) sont parallèles.

2. Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires.

3. a. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

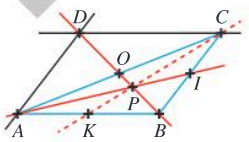
4. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

5. $-\frac{3}{2}\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CF}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires.
Donc les droites (BE) et (CF) sont parallèles.

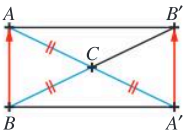
31 Puisque $CE = CA = CB$, le triangle ABE est donc inscrit dans le cercle de centre C et de rayon CB autrement dit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Par conséquent, par le théorème du cercle circonscrit, le triangle ABE est rectangle en E.

32 Figure :



O étant le centre du parallélogramme $ABCD$, O est donc le milieu de la diagonale $[AC]$. On se place dans le triangle ABC : I étant le milieu du côté $[BC]$ et O celui du côté $[AC]$, les droites (AI) et (OB) sont alors des médianes du triangle ABC. Par conséquent, leur point d'intersection P est le centre de gravité du triangle ABC, autrement dit, P est le point de concours des trois médianes du triangle ABC. En particulier, la droite (CP) est une médiane de ce triangle : cette droite coupe donc le côté opposé à C, à savoir le côté $[AB]$, en son milieu.

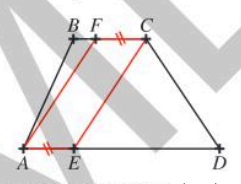
33 **1.** Figure :



2. On peut conjecturer que le quadrilatère $ABA'B'$ est un rectangle. Pour le démontrer, on montre qu'il s'agit d'un parallélogramme possédant un angle droit. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A'B'}$ implique que le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme. Reste à démontrer que le triangle ABA' est rectangle en B. Puisque A' est le symétrique du point A par rapport à C, alors C est le milieu du segment $[AA']$. Ainsi, puisque $CA = CB = CA'$, le triangle ABC est inscrit dans le cercle de diamètre $[AA']$. Par conséquent, par le théorème du cercle circonscrit, le triangle ABA' est rectangle en B. Par conséquent, $ABA'B'$ est un parallélogramme possédant un angle droit : c'est un rectangle.

Autre méthode : Vu que $ABA'B'$ est un parallélogramme et que C est le milieu de la diagonale $[AA']$ alors C est le centre de ce parallélogramme donc C est aussi le milieu de la diagonale $[BB']$. Par conséquent, $CA = CB = CA' = CB'$ donc les diagonales de ce parallélogramme ont même longueur : c'est donc un rectangle.

34 **1.** Figure :



2. $ABCD$ étant un trapèze, les droites (BC) et (AD) sont donc parallèles. Or les points F et E appartiennent respectivement aux bases $[BC]$ et $[AD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires de même sens (car $ABCD$ est un quadrilatère non croisé). Enfin, l'égalité de longueur $AE = CF$ permet d'affirmer l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$. Par conséquent, $AFCE$ est un parallélogramme.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. Réponses **a.** et **b.** car ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu E, donc $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, ses diagonales sont de même longueur donc $ABCD$ est un rectangle.

2. Réponse **b.**, car $AE = BE$.

3. Réponse **a.**, car dans le triangle ADB rectangle en A, $\tan\left(\widehat{ADB}\right) = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, donc $\widehat{ADB} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 27°$.

4. Réponses **a.** et **c.** car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{ED}$, donc $AFDE$ est un parallélogramme. De plus, $AE = ED$ donc $AFDE$ est un losange.

5. Réponse **a.**, car $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EB}$.

6. Réponse **c.**, car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

7. Réponses **b.** et **c.** car $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

8. Réponse **c.**, car $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AF}$.

9. Réponses **b.** et **c.** car $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE}$.

10. Réponses **a.** et **c.** car $-2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$.

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Vrai. Par le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle ABC rectangle en B, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ donc $AC = \sqrt{25} = 5$ cm.

2. Faux. On a $\tan\widehat{A} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{4}$ donc $\widehat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 37°$.

3. Vrai. Puisque (DF) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB) alors (DF) et (BC) sont parallèles ; autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

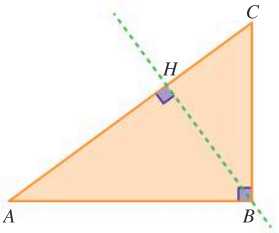
SPÉCIMEN

4. Faux. Puisque $AD = 3$ cm et $AB = 4$ cm avec A, D et B alignés dans cet ordre donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires de même sens. Puisque $DB = 1$ cm, on a alors $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$.

5. Vrai. Dans les triangles ADF et ABC, les points A, D et B d'une part et A, F et C d'autre part sont alignés et les droites (DF) et (BC) sont parallèles. Par le théorème de Thalès, on a $\frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AB}$ d'où $DF = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{3 \times 3}{4} = 2{,}25$ cm.

Donc $A_{ADF} = \frac{AD \times DF}{2} = \frac{3 \times 2{,}25}{2} = 3{,}375$ cm^2.

6. La hauteur recherchée est égale à la distance BH où H est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B.



On calcule le sinus de l'angle $\widehat{A}$ dans deux triangles rectangles différents : ABC puis ABH.

On a alors $\sin\widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$ et $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{4}$.

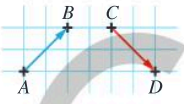
D'où $\frac{BH}{4} = \frac{3}{5}$ et donc $BH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm. Vrai.

Autre méthode : on pouvait remarquer que les triangles ABC et AHB sont semblables et en déduire que $\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{HB} = \frac{AC}{AB}$ d'où $BH = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{4 \times 3}{5} = 2{,}4$ cm.

Partie B.

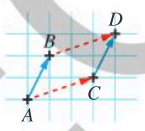
1. Vrai : des vecteurs égaux ont même norme.

2. Faux : voici un contre-exemple dans lequel les points A, B, C et D vérifient l'égalité de longueurs $AB = CD$ sans que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.



3. Vrai. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de même direction sont colinéaires : il existe un réel non nul k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. De plus, s'ils ont même norme alors $k = 1$ ou $k = -1$ donc $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$.

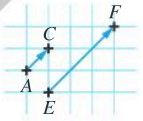
4. Vrai. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont également égaux.



5. Vrai. Si $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$ donc C est le milieu de $[AB]$.

6. Vrai. Si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, la dernière égalité résultant de la relation de Chasles.

7. Faux. Voici ci-contre un contre-exemple. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et pourtant, A, C, E et F ne sont pas alignés.



8. Vrai. Si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ alors ces vecteurs ont même direction (ils sont colinéaires) et donc les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

9. Faux. Si $(EF) // (AB)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction : ils sont colinéaires. Ils ne sont pas nécessairement égaux : ils peuvent avoir des sens et des normes différentes (contre-exemple de la question **7.** (AC) et (EF) sont parallèles mais les vecteurs ne sont pas égaux puisque leur norme est différente).

10. Vrai.

11. Faux. Si $AB = BC$, alors B appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

12. Vrai.

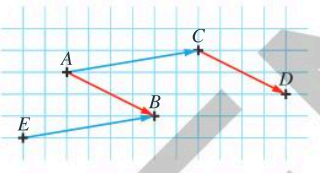
Exercices Application

42 **1.** Le triangle ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 7^2 - 5^2 = 24$. Donc $x = AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm.

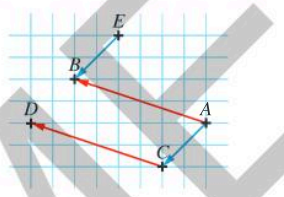
2. Le triangle ABC est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Donc $x = AC = \sqrt{13}$ cm.

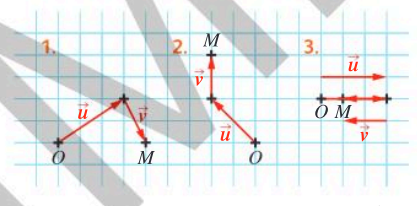
53 **1.**



2.



61



71 **1.** Réponses correctes : a. et c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ ont même direction, même sens et même norme : ils sont donc égaux. Or deux vecteurs égaux sont également colinéaires (mais la réciproque est fausse).

2. Réponse correcte : c. Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{DG}$ ont la même direction : ils sont donc colinéaires. En revanche, ils n'ont pas la même norme donc ne sont ni égaux ni opposés.

3. Réponses correctes : b et c. Vu que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FE}$ ont même direction et même sens, ils sont colinéaires et il existe un réel positif k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{FE}$. Puisque la norme de $\overrightarrow{AD}$ est le triple de celle de $\overrightarrow{FE}$, on a donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{FE}$. Enfin, vu que $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{DC}$, on a également $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{FE} = 3\left(-\overrightarrow{DC}\right) = -3\overrightarrow{DC}$.

4. Réponse correcte : b. $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{FC}$ n'ont pas la même direction, ils ne peuvent être égaux. En revanche, $\frac{2}{3}\overrightarrow{GA}$ a la même direction, même sens et même norme que $\overrightarrow{EB}$.

77 On a $\vec{v} = 6\overrightarrow{BA} = 6\left(-\overrightarrow{AB}\right) = -6\overrightarrow{AB} = -3\left(2\overrightarrow{AB}\right) = -3\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

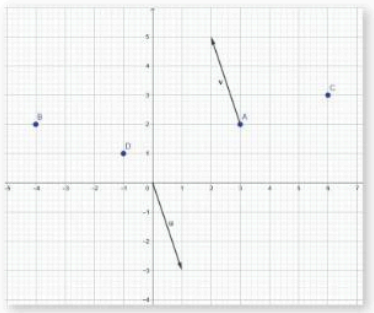
90 Dans le triangle ABC, les droites d_1 et d_2 sont les médiatrices de deux des côtés du triangle. Leur point d'intersection E est donc le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. La droite passant par E et perpendiculaire au côté $[BC]$ est donc la médiatrice du segment $[BC]$. Par un raisonnement similaire dans le triangle CBD, la droite passant par F et perpendiculaire au côté $[BC]$ est la médiatrice du segment $[BC]$. Donc les points E et F sont deux points de la médiatrice du segment $[BC]$; ainsi, (EF) est la médiatrice du segment $[BC]$.

SPÉCIMEN

Chapitre 6

J'applique en autonomie

20



21 $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}, \vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \vec{u_3}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}, \vec{u_4}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \vec{u_5}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

22 **1.** Il semble que le triangle soit isocèle rectangle en A.

2. $A(-2;1), B(2;3), C(0;-3)$.

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-1)^2}$
$=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{0-(-2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

On remarque que $AB=AC$ donc ABC est isocèle en A.

De plus, $AB^2=20, AC^2=20$ et $BC^2=40$. On remarque que $BC^2=AB^2+AC^2$, on en déduit que, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

23 **1.** $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$
$=(-2-(-5))^2+(-3-5)^2=9+64=73$.

De même, $AC^2=100$ et $BC^2=29$. Or $AC^2\neq AB^2+BC^2$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, on en déduit que ABC n'est pas rectangle en B.

2. $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right), I\left(\frac{-5+(-2)}{2};\frac{5+(-3)}{2}\right), I\left(-\frac{7}{2};1\right)$

$J\left(\frac{-5+3}{2};\frac{5+(-1)}{2}\right), J(-1;2)$

3. Première méthode :

$IJ=\sqrt{\left(-1-\left(-\frac{7}{2}\right)\right)^2+(2-1)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+1}=\sqrt{\frac{29}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{29}$

Or $BC=\sqrt{29}$ On a bien $BC=2IJ$.

Deuxième méthode :

Dans le triangle ABC, puisque I et J sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$, alors, d'après la propriété des milieux :

$(IJ)//(BC)$ et $BC=2IJ$.

24 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5-(-3)\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

2. Donc $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$: le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

25 • $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3+5\\-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ • $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}3+5-1\\-2+2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

• $2\vec{u}\begin{pmatrix}2\times3\\2\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ • $3\vec{u}-5\vec{v}\begin{pmatrix}3\times3-5\times5\\3\times(-2)-5\times(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\14\end{pmatrix}$

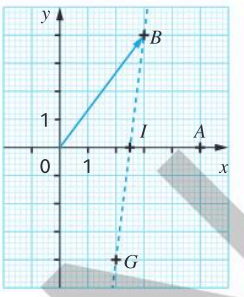
26 **1. a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-(-1)\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-1)\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6+4\\-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

2. a. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-x_A\\y_E-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_E-(-1)\\y_E-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_E+1\\y_E-3\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ sont égaux, donc il faut $x_E+1=10$ et $y_E-3=0$; d'où $x_E=9$ et $y_E=3$.

27 **1.** Les points B, G et I semblent être alignés.



2. a. On sait que

$\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=-2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{OA}$
$=-2\overrightarrow{OI}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OA}$.

b. Le point I est le milieu du segment $[OA]$ donc $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OI}$; on en déduit que $\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OI}=\vec{0}$.

Comme $\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{OI}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OA}$; on en déduit que $\overrightarrow{BG}=-2\overrightarrow{IB}$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires, donc les points B, G et I sont alignés.

3. a. Le point O est l'origine du repère, donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées :

$-2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times3\\-2\times4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+5\\-8+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$

b. I est le milieu de $[OA]$, donc I a pour coordonnées

$\left(\frac{x_A+x_O}{2};\frac{y_A+y_O}{2}\right)=\left(\frac{5}{2};0\right)$.

On en déduit : $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}x_I-x_B\\y_I-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-3\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-4\end{pmatrix}$.

c. $\det\left(\overrightarrow{BG};\overrightarrow{BI}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\-8 & -4\end{vmatrix}=-1\times(-4)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-8)=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont donc colinéaires : donc les points B, G et I sont alignés.

28 **1.** On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-5)\\3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}7-(-5)\\-7-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-15\end{pmatrix}$

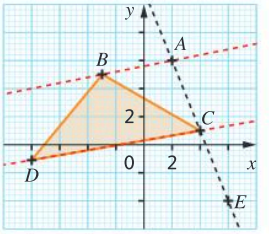
On remarque que $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$: les vecteurs sont donc colinéaires. On en déduit que les points A, C et E sont alignés.

2. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-5)\\5-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

On remarque que $\det\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}\right)=11\times(-1)-4\times(-3)\neq0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles.

29 Placer les points dans le repère permet d'émettre des conjectures.



1. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6-2\\-4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$: les vecteurs sont donc colinéaires. On en déduit que les points A, C et E sont alignés.

2. On étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\5-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-8-4\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-2\end{pmatrix}$

On remarque que $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=(-5)\times(-2)-(-12)\times(-1)\neq0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

3. Si le triangle BCD est isocèle, le sommet principal est B.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-(-3)\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$, donc $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{7^2+(-4)^2}=8$ et

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-8-(-3)\\-1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$, donc $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{(-5)^2+(-6)^2}=\sqrt{61}$.

Donc $BC\neq BD$: le triangle n'est pas isocèle.

SPECIMEN

30 **1.** Les points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-(-3)\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-(-3)\\y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\y-1\end{pmatrix}$.
On veut $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow 10(y-1)-4\times5=0$.
2. $10(y-1)-4\times5=0 \Leftrightarrow 10y-30=0 \Leftrightarrow y=3$.
3. Les points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-(-3)\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\3\end{pmatrix}$
On veut $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=0 \Leftrightarrow 10\times3-4\times(x+3)=0$
$\Leftrightarrow 18-4x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{18}{4}=4{,}5$.

31 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-1\\-5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=2\times(-6)-3\times(-4)=0$; donc les vecteurs sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2-(-1)\\3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=2\times-2-3\times(-4)\neq0$; donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2-1\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3-2\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}$: les vecteurs sont égaux, donc colinéaires et les points B, D et E sont alignés.
4. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-(-1)\\-5-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE}\right)=5\times2-1\times(-10)\neq0$; donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites ne sont pas parallèles.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; donc $-2\overrightarrow{AB}=-2\times\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$. Réponse **c.**
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-2\\-6-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$. Réponse **b.**
3. Par définition, réponse **c.**
4. $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=3\times6-(-2)\times4=26$. Réponse **b.**
5. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-3)\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6-4\\5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Réponses **a.** et **b.**
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-6-(-3)\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-2\\7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$ donc $AD\neq BC$.
6. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}14-4\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\8-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
donc $\det\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}\right)=10\times2-4\times(-3)\neq0$: les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AD) et (BC) sont sécantes. Réponse **a.**
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-4\\6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}14-2\\-2-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-10\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Réponses **b.** et **c.**
7. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-3)\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}21-5\\7-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés. Réponses **a.** et **b.**
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}21-(-3)\\7-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\9\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.
8. Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9-3\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=6(y-4)-(x-3)\times(-3)=3x+6y-33$.
$M\in(AB) \Leftrightarrow 3x+6y-33=0$.
- $3\times13+6\times(-1)-33=0$. Réponse **a.**
- $3\times(-3)+6\times8-33\neq0$
- $3\times19+6\times(-4)-33=0$

9. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}16-4\\3-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$ donc $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=8\times(-6)-12\times(-4)=0$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Réponse **a.**
$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$ donc $ABDC$ n'est pas un parallélogramme : $[AD]$ et $[BC]$ n'ont pas le même milieu. $AB=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{80}\neq9$.

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Vrai. **2.** Faux. $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. **3.** Vrai. $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.
4. Vrai. $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.
5. Vrai. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-5)^2+1^2}=\sqrt{26}$, donc $AB^2=CB^2+CA^2$.
6. Vrai. $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}3-0\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Partie B.

1. Vrai. Le cercle a pour rayon $AB=\sqrt{(2-(-2))^2+(5-2)^2}=5$.
2. Vrai. Le milieu de $[EB]$ pour coordonnées $\left(\dfrac{2+(-6)}{2};\dfrac{5+(-1)}{2}\right)=(-2\,;2)$ (et donc $[EB]$ est un diamètre du cercle.)
3. Vrai. $AC=\sqrt{(-6-(-2))^2+(5-2)^2}=5$.
4. Vrai. Le cercle circonscrit au triangle a pour diamètre le côté $[EB]$.
5. Vrai. $AE=5$ car $[EB]$ est un diamètre ;
$AF=\sqrt{(-9-(-2))^2+(3-2)^2}=\sqrt{50}$;
$EF=\sqrt{(-9-(-6))^2+(3-(-1))^2}=5$; et $AE^2+EF^2=AF^2$.
6. Faux. Si C appartient à la médiatrice de $[EB]$, alors $CE=CB$.
$CE=\sqrt{(-6-(-6))^2+(-1-5)^2}=6$; $CB=\sqrt{(2-(-6))^2+(5-5)^2}=8$.
7. Faux. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$: ils ne sont pas égaux.

Exercices Application

40 $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \vec{z}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

53 $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}$
$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
$BC=\sqrt{(3-4)^2+(4-4)^2}=\sqrt{1+0}=1$

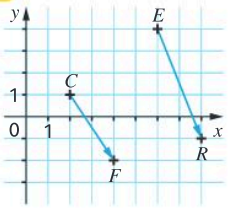
62 **1.** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-9\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-(-6)\\9-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10-(-6)\\-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-6\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}11\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11+16\\5+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\-1\end{pmatrix}$
On veut $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire $x-5=27$ et $y-9=-1$; on en déduit que $x=32$ et $y=8$.

74 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-(-3)\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-(-5)\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$.
On peut calculer $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=5\times(-2)-10\times(-1)=0$ ou bien remarquer que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$; les vecteurs sont donc colinéaires.

CORRIGÉ

Exercices Entraînement

87 **1.**



2. On lit $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}x_F-x_C\\y_F-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{ER}\begin{pmatrix}x_R-x_E\\y_R-y_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6\\-1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

4. Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{ER}$ ne sont pas égaux : $CERF$ n'est pas un parallélogramme.

5. Pour que $DERF$ soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{ER}$.
Soit $D(x\,;y)$, alors $\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}4-x\\-2-y\end{pmatrix}$. On veut $4-x=2$ et $-2-y=-5$; d'où $x=2$ et $y=3$.

6. Le centre I du parallélogramme est le milieu des diagonales. Le milieu de $[FE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_F+x_E}{2}\,;\frac{y_F+y_E}{2}\right)=(6\,;1)$.

96 **1.** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-(-3)\\9-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$.
Or $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\21\end{pmatrix}$.
Donc $x+3=30\Leftrightarrow x=27$, $y-2=21\Leftrightarrow y=23$.
On en déduit que $M(27\,;23)$.

2. $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x-7\\y-9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-12\\-5\end{pmatrix}$.
Or $\overrightarrow{BN}=-5\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-7\\y-9\end{pmatrix}=-5\begin{pmatrix}-12\\-5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-7\\y-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60\\25\end{pmatrix}$.
Donc $x-7=-60\Leftrightarrow x=-53$, $y-9=-25\Leftrightarrow y=-16$.
On en déduit que $M(-53\,;-16)$.

3. $\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}x-(-5)\\y-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.
Or $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\8\end{pmatrix}$.
Donc $x+5=26\Leftrightarrow x=21$, $y-4=8\Leftrightarrow y=12$.
On en déduit que $P(21;12)$.

107 **1.** $x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-3+3}{2}=0$ et $y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$.

2. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

3. Il faut que le milieu de $[EB]$ soit le point D. On veut $\frac{x_B+x_E}{2}=0$ et $\frac{y_B+y_E}{2}=-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $x_E=2$ et $y_E=-4$.

117 **1.** On a $A(-2\,;3)$, $B(-3\,;1)$ et $C(4\,;0)$.
$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(-3-(-2))^2+(1-3)^2=5$.
De même on trouve que $AC^2=45$ et $BC^2=50$.
On remarque que $BC^2=AB^2+AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

2. $\mathcal{A}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{45}}{2}=\frac{15}{2}$.
Or on a également $\mathcal{A}=\frac{BC\times AH}{2}$.
On en déduit que $AH=\frac{2\times\mathcal{A}}{BC}\Leftrightarrow AH=\frac{\left(2\times\frac{15}{2}\right)}{\sqrt{50}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

123 On veut que le déterminant soit égal à 0.

1. $\det\left(\overrightarrow{CH}\,;\overrightarrow{AT}\right)=-9t-5\times3$; donc $t=-\frac{5}{3}$.

2. $\det\left(\overrightarrow{LO}\,;\overrightarrow{UP}\right)=(3-t)\times16-8\times10$; donc $t=-2$.

3. $\det\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{IM}\right)=(t-5)\times4-(t+3)\times5$; donc $t=-35$.

4. $\det\left(\overrightarrow{PA}\,;\overrightarrow{ON}\right)=3\times t-\left(1+\sqrt{5}\right)\times\left(1-\sqrt{5}\right)$; donc $t=-\frac{4}{3}$.

Chapitre 7

J'applique en autonomie

24 **1.** $M(x\,;y)\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\right)=0$. On obtient $-1(x+5)-7(y-4)=0$ soit $-x-7y+23=0$ ou encore $x+7y-23=0$.

2. De la même manière avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, on obtient $x+5=0$.

3. De la même manière avec $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$, on obtient $y-3=0$.

25 **1.** On note d la droite passant par T de vecteur directeur $\vec{u}$.
$M(x\,;y)\in d\Leftrightarrow\overrightarrow{TM}\begin{pmatrix}x+10\\y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{TM}\,;\vec{u}\right)=0$. On obtient $-1(x+10)-5(y-5)=0$ soit $-x-5y+15=0$ ou encore $x+5y-15=0$.

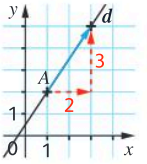
2. Même méthode : $x+5y-15=0$.

3. Les droites sont confondues. On en déduit que les points T, F et G sont alignés.

26 **1.** Les droites d et (MN) sont parallèles donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
$M'(x\,;y)\in d\Leftrightarrow\overrightarrow{PM'}\begin{pmatrix}x+3\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{PM'}\,;\overrightarrow{MN}\right)=0$. On obtient $-5(x+3)-10(y-3)=0$ soit $-5x-10y+15=0$ ou encore $x+2y-3=0$.

2. $x_R+2y_R-3=15+2\times(-6)-3=15-15=0$ donc $R\in d$.

27 **1.** Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
$3x-2y+1=0\Leftrightarrow-2y=-3x-1\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.
L'équation réduite de d est $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$.
Son coefficient directeur est donc $\frac{3}{2}$.

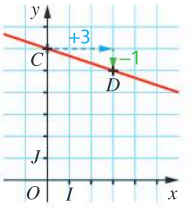


2. Si $x=1$ alors $y=2$ donc la droite passe par le point $A(1;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

28 **1.** $(AB):y=-\frac{1}{3}x+6$

2. L'ordonnée à l'origine est 6, donc on se place au point $C(0;6)$.
Le coefficient directeur est $-\frac{1}{3}$.

3. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur, donc également $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.



J'évalue mes connaissances

QCM

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$. Or $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}$, donc $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Réponses **a.** et **c.**

2. $3\times3-2\times(-2)+5=18\neq0$ donc $A\notin D$.
$3\times0-2\times2{,}5+5=0$ donc $B\in D$.
$3\times3-2\times7+5=0$ donc $C\in D$. Réponses **b.** et **c.**

3. Un vecteur directeur de D est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Or $\vec{w}=3\vec{v}$, donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires. Réponses **b.** et **c.**

4. $-3\times(-3)+8=17\neq8$ donc $A\notin D$ et $B\notin D$.
$-3\times0+8=8$ donc $C\in D$. Réponse **c.**

5. $A\in D$ car $x=-7$, donc **a.** est vraie.
$2\times(-7)+3\times8-10=0$, donc **b.** est vraie.
$-7\times(-7)+8=57\neq8$, donc **c.** est fausse. Réponses **a.** et **b.**

SPECIMEN

6. La forme de l'équation n'est pas du type $x = a$, donc la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et son coefficient directeur est égal à -5. Réponses **b.** et **c.**

7. $m = \dfrac{8-4}{3-2} = 4$. Réponse **b.**

8. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites D et D'. Ces deux vecteurs sont colinéaires car $\det\left(\vec{u};\vec{u'}\right) = 0$, donc D et D' sont parallèles ou confondues. Le point $A\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$ appartient à D mais pas à D'. Donc D et D' sont parallèles. Réponse **b.**

9. La droite d_1 a pour coefficient directeur 2, alors que d_2 a pour coefficient directeur -3. Ces deux coefficients directeurs sont distincts, donc d_1 et d_2 sont sécantes. On résout l'équation : $2x-3 = 2-3x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$. On a alors : $y = 2\times1-3 = -1$. Donc les droites sont sécantes au point de coordonnées $(1;-1)$. Seule la réponse **b.** est exacte.

10. La droite d_1 a pour coefficient directeur -1, alors que d_2 a pour coefficient directeur 3. Ces deux coefficients directeurs sont distincts, donc d_1 et d_2 sont sécantes. On résout l'équation : $-x+7 = 3x+3 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$. On a alors : $y = 3\times1+3 = 6$. Donc les droites sont sécantes au point de coordonnées $(1;6)$. Seule la réponse **b.** est exacte.

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Vrai car $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

2. Faux car $2\times2+5\times5-3 = 26 \neq 0$.

3. Vrai car son équation réduite est $y = -\dfrac{7}{2}$.

4. Faux car $13\times1-7-32 = -26 \neq 0$, donc D n'appartient pas à la droite.

5. Vrai car $-5\times1+11 = 6$ et $-5\times2+11 = 1$, donc E et F appartiennent à la droite.

6. Les coefficients directeurs des deux droites sont respectivement -3 et 2. Ces coefficients sont distincts donc les deux droites sont sécantes. On résout l'équation : $-3x+2 = 2x+7 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1$. On a alors : $y = -3\times(-1)+2 = 5$. Donc les droites sont sécantes au point de coordonnées $(-1;5)$. L'affirmation est vraie.

Partie B.

1. Vrai car d_1 est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le point $A(3;0)$.

2. Vrai car l'ordonnée à l'origine de d_2 est 2 et son coefficient directeur $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

3. Vrai, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$.

Exercices Application

40 **1.** $M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right) = 0$.

On obtient ainsi $2(x-3)+1(y-4) = 0$, soit $2x+y-10 = 0$.

2. En observant le vecteur $\vec{u}$, on remarque que d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc une équation de la forme $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$. Comme elle passe par A d'abscisse -2 alors son équation réduite est $x = -2$ ou une équation cartésienne est $x+2 = 0$.

53 Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et un point appartenant à d est $A(0;-2)$.

63 **1.** d a pour coefficient directeur 4 et d' a pour coefficient directeur -3 ; ces deux coefficients sont distincts, donc d et d' sont sécantes. On résout : $y = 4x-5$ et $y = -3x+9$, donc : $4x-5 = -3x+9$; on isole x : $7x = 14$, donc $x = 2$. Si $x = 2$, alors $y = 4\times2-5 = 8-5 = 3$. Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(2;3)$.

2. On détermine d'abord l'équation réduite de d'.

$6x-2y+8 = 0 \Leftrightarrow y = 3x+4$.

d a pour coefficient directeur 1 et d' a pour coefficient directeur 3 ; ces deux coefficients sont distincts, donc d et d' sont sécantes. On résout :

$y = x+2$ et $y = 3x+4$, donc : $x+2 = 3x+4$; on isole x : $2x = -2$, donc $x = -1$.

Si $x = -1$, alors $y = -1+2 = 1$. Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(-1;1)$.

Exercices Entraînement

76 **1.** Oui car $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont donc colinéaires.

2. Non car $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) = 20 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

3. Oui car $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = -4{,}5\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont donc colinéaires.

88 **1.** $M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\dfrac{1}{2}\\y+\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0$.

On obtient ainsi $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{3}\right) = 0$ soit $x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{2}{3} = 0$ ou encore $6x-3y-4 = 0$.

2. (AB) : $y+5 = 0$.

93 Soit d la droite parallèle à (AB) passant par C. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.

$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AB}\right) = 0$.

On obtient ainsi $-7(x+2)+3(y-1) = 0$ soit $-7x+3y-17 = 0$.

105 **1.** A et B ont la même abscisse donc (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation réduite est $x = 3$.

2. (AB) : $y = x+11$.

112 $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-b\\3\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2. d_1 parallèle à $d_2 \Leftrightarrow \det\left(\vec{u_1};\vec{u_2}\right) = 0 \Leftrightarrow -15-2b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{-15}{2}$.

Chapitre 8

J'applique en autonomie

21 **1.** $f(-2) = 5$ donc $A \in \mathscr{C}$.

2. $f(0) = -3$ donc $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-3)$.

3. $f(1) = -4$ donc l'ordonnée du point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}$ est -4.

4. $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Les abscisses des points d'ordonnée -3 de $\mathscr{C}$ sont 0 et 2.

22 **1.** $f(x) = 2x^2-3x-5$. **2.** Le point $A(0;-5) \in \mathscr{C}$.

3. Le point $B(2;-3) \in \mathscr{C}$.

4. $f(4) = 2\times4^2-3\times4-5 = 15 \neq 3$ donc le point $(4;3)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

5. $f(x) = -5 \Leftrightarrow 2x^2-3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{2}$.

Les abscisses des points d'ordonnée -5 de $\mathscr{C}$ sont 0 et $\dfrac{3}{2}$.

SPECIMEN

23 **1.** $S=\{-1;3\}$ **2.** $S=\{1\}$
3. $S=[-2;0[\cup]2;4]$ **4.** $S=[-1;3]$

24 **1.** L'équation $i(x)=1$ admet quatre solutions car la droite d'équation $y=1$ coupe la courbe en quatre points.
2. a. L'équation $i(x)=3$ admet 5 pour unique solution.
b. L'équation $i(x)=4$ n'admet pas de solution.
c. L'équation $i(x)=2$ admet deux solutions.
d. L'équation $i(x)=1$ admet quatre solutions.

25 **1.** $x^2=3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$. $S=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.
2. $x^2+25=14\Leftrightarrow x^2=-11$. Comme $-11<0$, l'équation n'a pas de solution. $S=\varnothing$.
3. $\frac{1}{3}(x^2+3)=1\Leftrightarrow x^2+3=3\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$. $S=\{0\}$.
4. $3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$. $S=\{-2;2\}$.
5. Comme pour tout nombre réel x, on a : $|x|\geqslant 0$, on en déduit : $2|x|+3\geqslant 3$. Donc l'équation $2|x|+3=1$ est impossible : $S=\varnothing$.
6. $3|x|-1=2\Leftrightarrow 3|x|=3$ c'est-à-dire : $|x|=1$; on obtient donc : $x=1$ ou $x=-1$.
$S=\{-1;1\}$

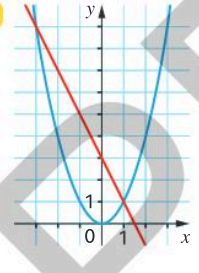
26 **1.** $S=[-9;9]$ **2.** $S=\varnothing$
3. $S=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$ **4.** $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$
5. $|x|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant x\leqslant 5$. $S=[-5;5]$.
6. $2|x|+1>4\Leftrightarrow 2|x|>3\Leftrightarrow|x|>\frac{3}{2}\Leftrightarrow x<\frac{-3}{2}$ ou $x>\frac{3}{2}$.
$S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

27 **1.** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ **2.** $S=\left]-\frac{1}{2};0\right[$ **3.** $S=]-\infty;0[\cup\left[\frac{1}{10};+\infty\right[$

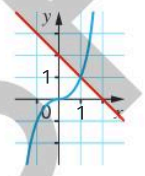
28 **1.** $S=\{2\}$ **2.** $S=]4;+\infty[$ **3.** $S=]-\infty;0,1]$

29 **1.** $S=]100;+\infty[$ **2.** $S=[0;16]$ **3.** $S=[0;25[$

30 **1.** $D_f=D_g=[-5;7]$.
2. a. $S=\{-2;3\}$ **b.** $S=]-2;3[$ **c.** $S=[-5;-2]\cup[3;7]$.

31


1. $S=\{-3;1\}$
2. $S=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

32


1. $S=\{1\}$
2. $S=]-\infty;1[$

33 **1.** M varie entre A et B, donc la longueur $x=AM$ varie entre 0 et 10. $D_f=[0;10]$.
2. $f(x)=\frac{AM\times AN}{2}=\frac{x(10-x)}{2}=\frac{1}{2}(10x-x^2)$.
3. a. On obtient à la calculatrice :

x	0	0,1	0,2	…	9,9	10
$f(x)$	0	0,495	0,98	…	0,495	0

b. Il semble que l'aire du triangle AMN soit égale à 8 lorsque $AM=2$ ou $AM=8$.

4. a. • $f(x)-8=\frac{1}{2}(10x-x^2-16)$
• $-\frac{1}{2}(x-2)(x-8)=-\frac{1}{2}(x^2-10x+16)=\frac{1}{2}(10x-x^2-16)$
Donc $f(x)-8=-\frac{1}{2}(x-2)(x-8)$
b. $f(x)=8\Leftrightarrow f(x)-8=0\Leftrightarrow(x-2)(x-8)=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x=8$.
La conjecture est démontrée.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. C_f passe par $A(1;-2)$ donc $f(1)=-2$. Réponse **b.**
2. C_f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 2. Réponses **b.** et **c.**
3. La droite d'équation $y=2$ coupe C_g en trois points. L'équation $g(x)=2$ admet trois solutions. Réponse **c.**
4. C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=4$ sur $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$. Réponse **b.**
5. C_g est en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;-3]\cup[2;3]$. Réponse **c.**
6. Les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g sont -2 et 2. Réponses **a.** et **c.**
7. La courbe C_f est en dessous de C_g sur $[-2;2]$. Réponse **b.**
8. $A(4;3)\in C_g\Leftrightarrow g(4)=3$. Réponses **a.** et **c.**
9. Réponse **a.** **10.** Réponse **a.**

vrai ou faux ?

Partie A.
1. Vrai car $f\left(\sqrt{3}\right)=2\times\left(\sqrt{3}\right)^2-1=2\times3-1=5$.
2. Faux car $f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}\neq-\frac{8}{9}$.
3. Faux car $f(x)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Vrai car pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$.
5. Vrai. En effet, pour tout nombre réel x, on a : $x^2\geqslant 0$ donc $2x^2\geqslant 0$ et $2x^2-1\geqslant-1$.

Partie B.
1. Faux car l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$. **2.** Faux car $2^3=8$.
3. Faux car deux réels opposés ont le même carré.
4. Vrai car si $a\neq0$, $\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$.
5. Vrai, en effet $\pi>3$ donc $\pi-3>0$.
6. Vrai. Si $x\neq0$, le carré de l'inverse de x est :
$\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ est l'inverse du carré de x.
7. Faux : deux réels opposés ont des valeurs absolues égales, et non pas opposées.

Exercices Application

47 **1.** $f(-2)=-(-2)^2+2\times(-2)=-8\neq0$, donc $A\notin\mathscr{C}$.
2. $f(3)=-3^2+2\times3=-3$, donc $B\in\mathscr{C}$.

55 **1.** $S=\{-2;2,5\}$ **2.** $S=[-4;2,5]$

Exercices Entraînement

75 **1.** $f(0)=(0-2)(2\times0+1)=-2$.
$f(-1)=(-1-2)(-2+1)=-3\times(-1)=3$.
2. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{3}{2}\times2=-3$.
3. $f(x)=0\Leftrightarrow x-2=0$ ou $2x+1=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-\frac{1}{2}$.
Les antécédents de 0 par f sont $-\frac{1}{2}$ et 2.

SPECIMEN

93 **1. a.** $f(-1)=2\times(-1)^2-3=-1$. L'ordonnée du point d'abscisse -1 de $\mathscr{C}$ est -1.
b. $f(x)=-3\Leftrightarrow 2x^2=0\Leftrightarrow x=0$. L'abscisse du point d'ordonnée -3 de $\mathscr{C}$ est 0.
c. $f(x)=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$. Les abscisses des points d'ordonnée 5 de $\mathscr{C}$ sont -2 et 2.
2. $f(x)=-4\Leftrightarrow 2x^2=-1\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{1}{2}$. Or $-\dfrac{1}{2}<0$ donc cette équation n'a pas de solution. Il n'existe pas de point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée -4.

105 **1.** $S=\{-1;1\}$ **2.** $S=\{0\}$ **3.** $S=\{-2;2\}$
4. $S=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ **5.** $S=\mathbb{R}$ **6.** $S=]-2;2[$

114 **1.** Margaux lâche son téléphone à l'instant $t=0$, à une hauteur égale à $h(0)=15$ mètres.
2. $h(t)=9\Leftrightarrow t^2=\dfrac{6}{4{,}905}\Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{6}{4{,}905}}$ (car $t\geqslant 0$). Donc $t\approx 1{,}11$. Le téléphone passe au niveau du 3e étage au bout d'environ 1,11 sec.
3. $h(t)=0\Leftrightarrow t^2=\dfrac{15}{4{,}905}\Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{15}{4{,}905}}$ (car $t\geqslant 0$). Donc $t\approx 1{,}75$. Le téléphone atteint le sol au bout d'environ 1,75 sec.

Chapitre 9

J'applique en autonomie

18 **1.** La fonction f est affine : elle peut s'écrire $f(x)=ax+b$ avec $a=-5$ et $b=15$. Comme a est négatif, sa représentation graphique est une droite « qui descend » et f s'annule en $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-15}{-5}=3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

2. La fonction g est affine : elle peut s'écrire $g(x)=ax+b$ avec $a=2$ et $b=3$. Comme a est positif, sa représentation graphique est une droite « qui monte » et g s'annule en $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-3}{2}=-1{,}5$.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

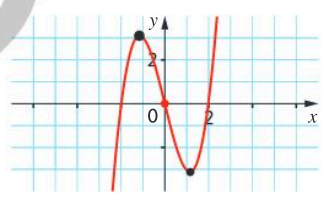
3. La fonction h est affine : elle peut s'écrire $h(x)=ax+b$ avec $a=7$ et $b=0$. Comme a est positif, sa représentation graphique est une droite « qui monte » et h s'annule en $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-0}{7}=-0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

4. La fonction i est affine : elle peut s'écrire $i(x)=ax+b$ avec $a=-1$ et $b=5$. Comme a est négatif, sa représentation graphique est une droite « qui descend » et i s'annule en $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-5}{-1}=5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $i(x)$		$+$	0	$-$	

19 **1.**



2.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

20 **1.** Comme $0{,}5\in\left[\dfrac{1}{3};6\right]$, alors $f(0{,}5)$ est négatif.
Comme $-1\in\left[-3;\dfrac{1}{3}\right]$, alors $f(-1)$ est positif.
2. $f(x)=0$ si, et seulement si, $x=-3$ ou $x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=6$.
3. $f(x)>0$ si, et seulement si, $x\in\left]-3;\dfrac{1}{3}\right[\cup]6;+\infty[$.

21

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$	
Signe de $-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-6}{-2}=3$
Signe de $3x+12$		$-$	0	$+$		$+$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-12}{3}=-4$
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$		

Donc $(-2x+6)(3x+12)\geqslant 0\Leftrightarrow x\in[-4;3]$.

22 **1.**

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$	
Signe de $2x+10$		$-$	0	$+$		$+$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-10}{2}=-5$
Signe de $7-x$		$+$		$+$	0	$-$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-7}{-1}=7$
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$		

Donc $(2x+10)(7-x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-5[\cup]7;+\infty[$.
2. Penser à symboliser la valeur interdite par une double barre.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		7		$+\infty$	
Signe de $-3x+6$		$+$		$+$	0	$-$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-6}{-3}=2$
Signe de $-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$		$\dfrac{-b}{a}\quad\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}=$
Signe du quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$		

Donc $\dfrac{-3x+6}{-2x+1}\leqslant 0\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{1}{2};2\right]$.

23 **1.** $(3x+1)(2x-2)-3x\leqslant 1\Leftrightarrow(3x+1)(2x-2)-3x-1\leqslant 0$
$\Leftrightarrow(3x+1)(2x-2)-(3x+1)\leqslant 0$
$\Leftrightarrow(3x+1)(2x-2-1)\leqslant 0\Leftrightarrow(3x+1)(2x-3)\leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		7		$+\infty$	
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-1}{3}$
Signe de $2x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-2)}{2}=1$
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

Donc $(2x+1)(2x-2)-3x\leqslant 1\Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[$.

SPECIMEN

2. $\frac{2x+1}{3-x} \geqslant 5 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3-x} - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-5(3-x)}{3-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{7x-14}{3-x} \geqslant 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$	
Signe de $7x-14$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a} = \frac{-(-14)}{7} = 2$
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$		$\frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$
Signe du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$		

Donc $\frac{2x+1}{3-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2;3[$.

24 Pour tout nombre réel x, on a : $x^2 \geqslant 0$ donc : $x^2+5 \geqslant 5$.
On en déduit que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) > 0$.
Pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{x} > 0$.
Donc : $\frac{1}{x} \times \sqrt{x} > 0$. On en déduit que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $g(x) > 0$.
Pour tout nombre réel $x < 0$, on a : $x^3 < 0$ et $\frac{1}{x} < 0$ donc : $x^3 + \frac{1}{x} < 0$. On en déduit que, pour tout nombre réel x, on a : $h(x) < 0$.

25

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	
x^2+2		$+$		$+$	
$x^3(x^2+2)$		$-$	‖	$+$	

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\frac{\sqrt{x}}{2x-1}$	0	$-$	‖	$+$	

x	0		$+\infty$
x^3		$+$	
$1+\sqrt{x}$		$+$	
$x^3(1+\sqrt{x})$		$+$	

J'évalue mes connaissances

QCM

1. -1 et -2 sont solutions de l'équation $f(x) = 0$. Réponse **b**.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty;-1[$ et sur $]2;+\infty[$. Réponse **c**.
3. La courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses 3 fois. Réponse **c**.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-2)$. Réponse **c**.
5. La courbe $\mathscr{C}_g$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;-3]$ et sur $[2;3]$. Réponse **c**.
6. $(8-2x)+(3+x) \leqslant 0 \Leftrightarrow -x+11 \leqslant 0 \Leftrightarrow 11 \leqslant x$. Réponse **a**.
7. Réponse **a** car on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(8-2x)(3+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

8. Réponse **b** car on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{4x-1}{2x+10}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

9. Réponse **c.**, car
$\frac{-2x+3}{x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x+1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-2x+3-x-1}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+2}{x+1} \leqslant 0$
et on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{-3x+2}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

vrai ou faux ?

Partie A.
1. $(4x-1)(3-x) \leqslant (3-x)^2 \Leftrightarrow (4x-1)(3-x) - (3-x)^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (3-x)(4x-1) - (3-x)(3-x) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (3-x)((4x-1)-(3-x)) \leqslant 0 \Leftrightarrow (3-x)(5x-4) \leqslant 0$
Vrai.

2.

x	$-\infty$		$0,8$		3		$+\infty$	
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$		$\frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$
Signe de $5x-4$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{5} = 0,8$
Signe du quotient		$-$	0	$+$	0	$-$		

Faux.
3. Vrai (voir tableau).

Partie B.
1. Pour tout réel x : $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 0$. Vrai.
2. $x(2-x) \leqslant 3x$: on ne peut pas diviser chaque membre de l'inéquation par x (il peut être nul ou positif ou négatif). Faux.

Partie C.
1. $\frac{2}{3x+1} \leqslant \frac{4}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{3x+1} - \frac{4}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)-4(3x+1)}{(3x+1)(x+1)} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-10x-2}{(3x+1)(x+1)} \leqslant 0$
Vrai.

2.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$	
Signe de $-10x-2$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$\frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{-10} = -\frac{1}{5}$
Signe de $3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a} = \frac{-1}{3}$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$\frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$
Signe du quotient		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$		

Vrai.

SPECIMEN

Exercices Application

34

1.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $2x-10$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $-3x+9$		$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-5x$		$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $3-x$		$+$	0	$-$	

5.

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
Signe de $0{,}5x+4$		$-$	0	$+$	

6.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $\frac{2}{3}x+1$		$-$	0	$+$	

7.

x	$-\infty$		-10		$+\infty$
Signe de $-2-\frac{1}{5}x$		$+$	0	$-$	

8.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\frac{3}{4}x$		$-$	0	$+$	

37 **1.**

x	-4		0		$5{,}2$		6
Signe de $f(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $g(x)<0$ si, et seulement si, $x\in]-1{,}2;2{,}9[$.

44 **1.** $(3x-1)(x+5)\geqslant 0$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{3}$		$+\infty$	
Signe de $3x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$\frac{-b}{a}=\frac{-(-1)}{3}=\frac{1}{3}$
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a}=\frac{-5}{1}=-5$
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

Donc $(3x-1)(x+5)\geqslant 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-5]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

2. $\frac{2x-8}{x-7}\geqslant 0$.

x	$-\infty$		4		7		$+\infty$	
Signe de $2x-8$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{2}=4$
Signe de $x-7$		$-$		$+$	0	$+$		7
Signe du quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$		

Donc $\frac{2x-8}{x-7}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;4]\cup]7;+\infty[$.

60

1.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$+$		$+$	0	$+$	
$-3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$\lvert x\rvert(-3x-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|(-3x-2)<0$ est : $S=\left]-\frac{2}{3};0\right[\cup]0;+\infty[$.

2.

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$		$-$	‖	$+$	
$2x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{x}(2x+10)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x}(2x+10)\leqslant 0$ est : $S=[-5;0[$.

Exercices Entraînement

73 **1.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)\times g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $f(x)=-2x+2$ et $g(x)=x-2$.

4. $f(x)>0\Leftrightarrow -2x+2>0\Leftrightarrow -2x>-2\Leftrightarrow x<\frac{-2}{-2}\Leftrightarrow x<1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

$g(x)>0\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $-2x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(-2x+2)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

88 **1.** $3x^2+2x>0\Leftrightarrow x(3x+2)>0$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$	
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		0
Signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$\frac{-b}{a}=\frac{-2}{3}$
Signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$		

Donc $3x^2+2x>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup]0;+\infty[$.

2. $\frac{1-3x}{4}\leqslant\frac{3x-1}{5}\Leftrightarrow 5(1-3x)\leqslant 4(3x-1)\Leftrightarrow 5-15x\leqslant 12x-4$

$\Leftrightarrow -27x+9\leqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3}$ donc $\frac{1-3x}{4}\leqslant\frac{3x-1}{5}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Chapitre 10

J'applique en autonomie

16 **1.** Voici le tableau de variations de g :

x	-4		1		2		4
$f(x)$	4	↘	0	↗	2	↘	-1

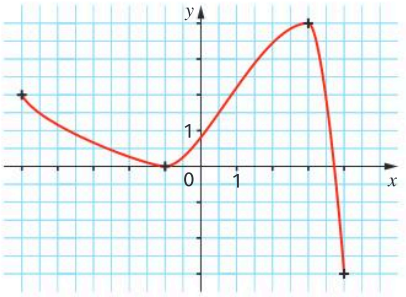
SPECIMEN

2. Le maximum de g sur l'intervalle $[-4;4]$ vaut 4 et il est atteint en $x=-4$. Son minimum sur l'intervalle $[-4;4]$ vaut -1 et il est atteint en $x=4$.

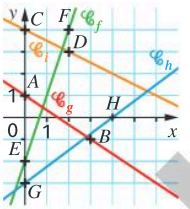
17 **1.** La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5;4]$.

2. Le maximum de f sur l'intervalle $[-5;4]$ vaut 4 et il est atteint en $x=3$. Son minimum sur l'intervalle $[-5;4]$ vaut -3 et il est atteint en $x=4$.

3. Voici une courbe représentative possible de la fonction f :



18 **1.** La fonction f est croissante car le coefficient directeur de sa droite représentative, $a=3$, est positif.
Pour tracer la fonction on cherche deux points de la courbe :
On a $f(0)=-2$ et $f(2)=4$, donc les points $E(0;-2)$ et $F(2;4)$ appartiennent à la courbe de la fonction.



2. La fonction g est décroissante car $a=-\dfrac{2}{3}<0$.
On a $g(0)=1$ et $g(3)=-1$.

3. La fonction h est croissante car $a=\dfrac{3}{4}>0$.
On a $h(0)=-3$ et $h(4)=0$.

4. La fonction i est décroissante car $a=-0{,}5<0$.
On a $i(0)=4$ et $i(2)=3$.

19 **1.** La fonction f s'annule pour $x=-2$, et le coefficient directeur de sa droite représentative, $a=2$, est positif. Donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. La fonction g s'annule pour $x=3$, et $a=-4<0$. Donc :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. La fonction h s'annule pour $x=8$, et $a=-1<0$. Donc :

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

4. La fonction i s'annule pour $x=\dfrac{5}{3}$, et $a=3>0$. Donc :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

20 f est une fonction constante, sa courbe représentative est donc la courbe orange. On a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Les fonctions g et j ont pour ordonnée à l'origine 2. La fonction g est décroissante car $a=-2<0$, sa courbe représentative est donc la courbe jaune. On a :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Ainsi la courbe représentative de la fonction j est la courbe bleue. On a :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Enfin, Les fonctions h et i ont pour ordonnée à l'origine -2. La fonction i est décroissante car $a=-2<0$, sa courbe représentative est donc la courbe verte. On a :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Il nous reste donc la courbe rouge pour la fonction h. On a :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

21 **1.** On a $1{,}01>1{,}009>0$, or la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve l'ordre ; ainsi $1{,}01^2>1{,}009^2$.

2. $-2{,}5<-2{,}49<0$, or la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ donc elle change l'ordre ainsi $(-2{,}5)^2>(-2{,}49)^2$.

3. $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^2}=0{,}5^2$. On a $0{,}5>0{,}12>0$ et par stricte croissance de la fonction carré, on a $0{,}5^2>0{,}12^2$.

4. $-5{,}2^2<0$ et $(-5{,}2)^2>0$ donc $-5{,}2^2<(-5{,}2)^2$.

22 **1.** On a $0<3<7$, or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc elle change l'ordre : $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{7}$.

2. On a $-0{,}02<-0{,}001<0$, or la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ donc elle change l'ordre : $\dfrac{1}{-0{,}02}>\dfrac{1}{-0{,}001}$ c'est-à-dire $-\dfrac{1}{0{,}02}>-\dfrac{1}{0{,}001}$.

3. Puisque $10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}=\dfrac{1}{100}$ et $10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\dfrac{1}{1\,000}$, puisque $0<100<1\,000$, on a donc $\dfrac{1}{100}>\dfrac{1}{1\,000}$ soit $10^{-2}>10^{-3}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ (on pouvait aussi directement voir que $10^{-2}=0{,}01$ et $10^{-3}=0{,}001$ et donc $10^{-2}>10^{-3}$).

4. Puisque $\dfrac{1}{13}>0$ et $-\dfrac{1}{5}<0$, on a $-\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{13}$.

SPECIMEN

23 **1.** On a $6<9$, or la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve l'ordre donc $\sqrt{6}<\sqrt{9}$ soit $\sqrt{6}<3$.
2. Puisque $20>16$, on conclut de même que $\sqrt{20}>\sqrt{16}$ soit $\sqrt{20}>4$.
3. Puisque $15<16$, on conclut de même que $\sqrt{15}<\sqrt{16}$ soit $\sqrt{15}<4$.
4. On a $1{,}2<\frac{4}{3}$, or la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve l'ordre donc $1{,}2^3<\left(\frac{4}{3}\right)^3$.
5. On a $-0{,}09<-0{,}001$, or la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve l'ordre donc $(-0{,}09)^3<(-0{,}001)^3$.

24 **1.** Puisque $1{,}4>1$, alors $1{,}4^3>1{,}4^2>1{,}4$.
2. Puisque $0{,}2\in[0;1]$, alors $0{,}2^3<0{,}2^2<0{,}2$.
3. Puisque $\pi>1$, alors $\pi^3>\pi^2>\pi$.
4. Puisque $\sqrt{2}>1$, alors $\left(\sqrt{2}\right)^3\geqslant\left(\sqrt{2}\right)^2\geqslant\sqrt{2}$ c'est-à-dire $2\sqrt{2}\geqslant2\geqslant\sqrt{2}$.

25 **1.** Le coefficient multiplicateur CM_1, correspondant à la diminution sur une année, vaut $CM_1=1-5\,\%=1-\frac{5}{100}=0{,}95$. Le coefficient multiplicateur pour la diminution sur deux années vaut $CM_2=CM_1^2=0{,}95^2$ et pour trois années $CM_3=0{,}95^3$.
2. Puisque $0{,}95\in[0;1]$, on a $0{,}95^3<0{,}95^2<0{,}95$ donc $CM_3<CM_2<CM_1$.
3. Chaque année la production diminue. La production au bout d'une année est donc supérieure à celle au bout de deux années, qui est supérieure à la production au bout de trois années.

26 En représentant la fonction à la calculatrice on obtient :



On a alors :

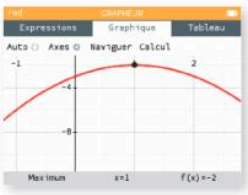
x	-1		0		2		3
$f(x)$	4	↘	0	↗	4	↘	0

27 **1.** En représentant la fonction à la calculatrice on obtient :
La valeur du minimum de la fonction g sur I semble être 6.



2. a. Pour tout $x\in[0;4]$,
$g(x)-6=x^3-3x+2$ et
$(x-1)^2(x+2)=(x^2-2x+1)(x+2)$
$=x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2$
$=x^3-3x+2$. On a donc bien $g(x)-6=(x-1)^2(x+2)$.
b. On étudie le signe de $g(x)-6$ sur I. Un carré étant positif, $(x-1)^2\geqslant0$ et $(x+2)>0$ pour $x\in[0;4]$.
Donc $g(x)-6\geqslant0$ donc $g(x)\geqslant6$ or $g(1)=6$ donc, pour tout $x\in[0;4]$, $g(x)\geqslant g(1)$. 6 est bien le minimum de la fonction g sur I, et il est atteint en $x=1$.

28 En traçant la courbe à la calculatrice on obtient :
La courbe semble bien admettre un maximum, qui a pour valeur -2, en $x=1$. Vérifions-le par le calcul : pour tout réel x,
$f(x)+2=-x^2+2x-1$
$=-\left(x^2-2x+1\right)=-(x-1)^2$.



Or un carré est positif, donc $-(x-1)^2\leqslant0$, ainsi $f(x)+2\leqslant0$ donc $f(x)\leqslant-2$. De plus $f(1)=-2$.
-2 est bien le maximum de la fonction f, atteint en $x=1$.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. Réponse **b.**
2. Le maximum vaut 3 et il est atteint pour $x=2$. Réponse **b.**
3. Réponse **c.**
4. Puisque $0\leqslant3$ et que g est une fonction croissante sur l'intervalle $[-2;6]$, g conserve l'ordre et donc $g(0)\leqslant g(3)$. De même $g(1)\leqslant g(4)$ et $g(2)\leqslant g(5)$. Seule la réponse **a.** est correcte.
5. Réponses **a.** et **c.** En effet, un maximum peut être atteint plusieurs fois donc la réponse **c.** est vraie.
6. Réponse **c.** En effet, puisque p est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de sa droite représentative D est strictement négatif et ne peut être égal à 2. Les données de la question ne permettent pas de déduire la valeur de l'ordonnée à l'origine de D.
7. Réponses **b.** et **c.** Puisque $0>-2>-\frac{9}{4}$ et que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, elle change l'ordre et donc $(-2)^2<\left(-\frac{9}{4}\right)^2$. Puisque $0<\pi<4$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, alors $\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$. Puisque $3<\pi$ et que la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors $\sqrt{3}<\sqrt{\pi}$.
8. Réponses **b.** et **c.** Puisque la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $(-10)^3<x^3<(-5)^3$ soit $-1\,000<x^3<-125$. Puisque la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, on a $(-10)^2>x^2>(-5)^2$ soit $100>x^2>25$.
Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, la fonction valeur absolue est strictement décroissante. Donc, si $-10<x<-5$, alors $|-10|>|x|>|-5|$, c'est-à-dire : $10>|x|>5$.
9. Réponse **b.** Puisque $0{,}2\in]0;1[$, alors $0{,}2^3<0{,}2^2$. Puisque $\frac{4}{3}>1$, on a $\left(\frac{4}{3}\right)^2>\frac{4}{3}$. Puisque $\frac{1}{\sqrt{3}}\in[0;1]$, on a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2<\frac{1}{\sqrt{3}}$ soit $\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

vrai ou faux ?

Partie A.
1. Faux. La droite représentative de la fonction affine f a pour coefficient directeur -3 qui est négatif donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Faux. La fonction g est décroissante sur $]-\infty;0]$.
3. Vrai. La fonction carré admet 0 comme minimum atteint en 0.
4. Vrai. La droite représentative de la fonction affine h a pour coefficient directeur -4 qui est négatif donc h est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus h s'annule en 0,25 donc son tableau de signes est :

x	$-\infty$		$0{,}25$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

5. Faux. Contre-exemple : en prenant $a=-2$ et $b=-1$, on a $a<b$ et pourtant $a^2>b^2$ en effet $a^2=4$ et $b^2=1$.
6. Faux : si a et b sont négatifs avec $a<b$, alors on a : $|a|>|b|$, puisque la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
7. Faux. Contre-exemple : en prenant $a=-2$ et $b=1$, on a $a<b$ et pourtant $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; en effet $\frac{1}{a}=-0{,}5$ et $\frac{1}{b}=1$.
8. Faux. Contre-exemple. En prenant $x=0{,}1$, on a $x^3>x^2>x$.

Partie B.
1. Vrai. **2.** Faux. Le maximum de g est 2 et il est atteint en $x=-3$.
3. Faux. Puisque $-2{,}5<-1{,}5$ et que g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3;-1]$, alors g change l'ordre des inégalités : $g(-2{,}5)>g(-1{,}5)$.

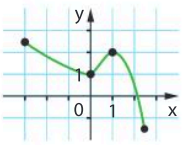
CORRIGÉ

4. Vrai. Puisque $2<3$ et que g est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;5]$, alors g conserve l'ordre des inégalités : $g(2)<g(3)$.

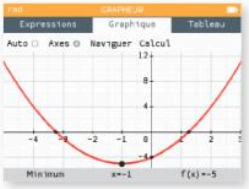
5. Vrai. Sur l'intervalle $[-3;5]$, g admet -3 comme minimum et 2 comme maximum donc pour tout réel $x\in[-3;5$, on a l'encadrement $-3\leqslant g(x)\leqslant 2$.

Exercices Application

43 On sait que la fonction f passe par les points $A(-3;2{,}5)$, $B(0;1)$, $C(1;2)$ et $D(2{,}5;-1{,}5)$. Une représentation graphique possible est :



52 En représentant la fonction à la calculatrice on obtient :
Ainsi le minimum de la fonction semble être -5, atteint pour $x=-1$. La maximum est environ 11, atteint pour $x=-4$ et $x=3$.



63 **1.** On a $3x-12=0\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=4$. La fonction affine f s'annule en $x=4$ et le coefficient directeur de sa droite représentative vaut 3, qui est positif, donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. D'où :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. On a $4x=0\Leftrightarrow x=0$. La fonction affine g s'annule en $x=0$ et le coefficient directeur de sa droite représentative vaut 4, qui est positif, donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$. D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. On a $-2x+4=0\Leftrightarrow -2x=-4\Leftrightarrow x=2$. La fonction affine h s'annule en $x=2$ et le coefficient directeur de sa droite représentative vaut -2, qui est négatif, donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

4. La fonction i est constante avec 2 positif donc son tableau de signes est :

x	$-\infty$		$+\infty$
$i(x)$		$+$	

69 La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc elle conserve le sens des inégalités sur $[0;+\infty[$ et elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ donc elle change le sens des inégalités sur $]-\infty;0[$. Par conséquent :

1. On a $3{,}1>2{,}9>0$ donc $3{,}1^2>2{,}9^2$.

2. On a $-1{,}7<-1{,}4<0$ donc $(-1{,}7)^2>(-1{,}4)^2$.

3. On a $(-5)^2>-5^2$ puisque $(-5)^2=25$ et $-5^2=-25$.

4. On a $-6{,}72<-3{,}21<0$ donc $(-6{,}72)^2>(-3{,}21)^2$.

Exercices Entraînement

78 **4. b.** : le tableau de variation **b.** est le seul décrivant une fonction décroissante puis croissante. Il correspond donc à la courbe **4.**

1. d. : Le tableau de variation **d.** est le seul passant par le point $(-2;-1)$, il correspond donc à la courbe **1.**

2. c. : Le tableau de variation **c.** est le seul passant par le point $(3;0)$, il correspond donc à la courbe **2.**

Il nous reste alors le tableau **a.** avec la courbe **3.**

99 On sait que les fonctions sont de la forme $f(x)=ax+b$. On cherche alors a et b.

d_1 : on lit directement $b=1$. La courbe passe par les points $A(0;1)$ et $B(1;3)$ donc $a=\dfrac{3-1}{1-0}=2$. On a alors $f(x)=2x+1$.

d_2 : on lit directement $b=2$. La courbe passe par les points $A(0;2)$ et $B(2;1)$ donc $a=\dfrac{1-2}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$. On a alors $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+2$.

d_3 : la fonction est linéaire donc $b=0$. La courbe passe par les points $A(0;0)$ et $B(1;-1)$ donc $a=\dfrac{-1-0}{1-0}=-1$. On a alors $f(x)=-x$.

d_4 : on lit directement $b=-1$. La fonction est constante donc $a=0$. On a alors $f(x)=-1$.

107 **1. a.** On a $0<\dfrac{5}{3}<2$, or la fonction carré conserve le sens des inégalités sur $[0;+\infty[$ donc $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2<2^2$ donc l'aire du carré de côté $\dfrac{5}{3}$ est inférieure à celle du carré de côté 2.

b. L'aire d'un disque de rayon r est πr^2, or $0<2<\sqrt{5}$ et la fonction carré conserve le sens des inégalités sur $[0;+\infty[$ donc $2^2<\sqrt{5}^2$ d'où $\pi\times 2^2<\pi\times\sqrt{5}^2$ donc l'aire du disque de rayon 2 est inférieure à celle du disque de rayon $\sqrt{5}$.

2. a. Puisque $0{,}33<\dfrac{1}{3}$, alors, puisque la fonction cube conserve le sens des inégalités sur $\mathbb{R}$, on a $0{,}33^3<\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ donc le volume du cube d'arête 0,33 est inférieur à celui du cube d'arête $\dfrac{1}{3}$.

b. Le volume d'une boule de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$. Puisque $\sqrt{2}<1{,}5$ alors $\sqrt{2}^3<1{,}5^3$ d'où $\dfrac{4}{3}\pi\times\sqrt{2}^3<\dfrac{4}{3}\pi\times 1{,}5^3$ donc le volume d'une boule de rayon $\sqrt{2}$ est inférieur à celui d'une boule de rayon 1,5.

3. Les longueurs de ces deux rectangles sont donc $\dfrac{20}{3{,}27}$ et $\dfrac{20}{4{,}1}$. Or, puisque $0<3{,}27<4{,}1$ et que la fonction inverse change le sens des inégalités sur $]0;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{3{,}27}>\dfrac{1}{4{,}1}$ d'où $\dfrac{20}{3{,}27}>\dfrac{20}{4{,}1}$ en multipliant chaque membre de l'inégalité par 20 (qui est positif).

Chapitre 11

J'applique en autonomie

19 **1.** $\overline{x}=\dfrac{5+6+6+7+9+10}{6}\approx 7{,}17$

$V=\dfrac{(5-7{,}17)^2+(6-7{,}17)^2+(6-7{,}17)^2+(7-7{,}17)^2+(9-7{,}17)^2+(10-7{,}17)^2}{6}$

$V\approx 3{,}14$, donc $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{3{,}14}\approx 1{,}77$

2. Série 2 : $\overline{x}\approx 7{,}17$ et $\sigma\approx 5{,}27$. Série 3 : $\overline{x}\approx 13{,}17$ et $\sigma\approx 1{,}86$.

3. Les séries 1 et 2 ont la même moyenne, mais l'écart type de la série 1 est le plus petit. Ainsi, les valeurs de la série 1 sont plus regroupées autour de la moyenne que dans la série 2.

4. La moyenne de la série 3 est supérieure à la moyenne de la série 1. Les écarts types sont proches.

20 **1.** $(\overline{x}=0{,}26\,;\sigma\approx 0{,}19)$ et $(M_e=0{,}15\,;Q_3-Q_1=0{,}5-0{,}1=0{,}4)$.

2. $(\overline{x}\approx 14{,}1\,;\sigma\approx 4{,}3)$ et $(M_e=12\,;Q_3-Q_1=20-10=10)$.

21 **1.**

Valeurs	10	12	14	16	18	19
Effectifs	2	5	11	8	4	6
ECC	2	7	18	26	30	36

Eff_{total} est égal à 36 et est pair, donc la médiane est la moyenne de la 18e valeur et de la 19e valeur : $M_e=\dfrac{14+16}{2}=15$. Position de Q_1 : $36\times 0{,}25=9$. Q_1 est la 9e valeur de la série, donc $Q_1=14$. Position de Q_2 : $36\times 0{,}75=27$. Q_1 est la 27e valeur de la série, donc $Q_1=18$.

SPECIMEN

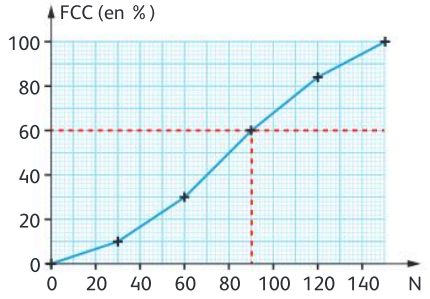
2. Ces deux séries ont la même médiane. La première série a pour écart interquartile $Q_3 - Q_1 = 18 - 14 = 4$. Son écart interquartile est inférieur à celui de la deuxième série, ce qui signifie que 50 % des valeurs de la première série sont plus regroupées autour de la médiane que dans la série 2.

22 **1.**

N	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[	[90 ; 120[	[120 ; 150[	Total
Effectifs	3	6	9	7	5	30
ECC	3	9	18	25	30	
Fréquences (en %)	10	20	30	23	17	100
FCC	10	30	60	83	100	

2. La classe médiane est la classe [60 ; 90[.

3.



4. D'après le graphique, le nombre médian de messages est de 80.

23 La proportion d'élèves ayant eu plus de 10 au dernier devoir est de $p = \frac{24}{32} = 0{,}75$.

24 Le pourcentage de véhicules blancs vendus le mois dernier est de $p = \frac{95}{200} \times 100 = 47{,}5\,\%$.

25 On peut remplir un tableau de proportionnalité :

110	x
8 %	100 %

En appliquant le produit en croix on trouve que le prix de l'appareil photo avant réduction est de $x = \frac{110 \times 100}{8} = 1\,375$ €.

26 **1.** Il y a en tout $83 + 54 = 137$ adhérents au club de boxe, soit $p = \frac{137}{1\,000} \times 100 = 13{,}7\,\%$.

2. Dans ce club il y a alors $120 \times \frac{80}{100} = 96$ hommes.

3. Il y a $19 + 13 = 32$ membres dans le club de vélo. On peut remplir un tableau de proportionnalité :

32	x
40 %	100 %

En appliquant le produit en croix on trouve que le club d'escalade compte $x = \frac{32 \times 100}{40} = 80$ membres.

27 **1.** $T = \frac{1\,146 - 1\,024}{1\,024} \approx 0{,}1191$ soit 11,91 %. Le taux d'évolution du nombre d'élèves est d'environ 11,91 %.

2. Baisser de 30 % revient à multiplier par $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$.
Ainsi : $39 \times 0{,}7 = 27{,}3$. Elle devra payer 27,30 €.

3. Augmenter de 12 % revient à multiplier par $1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$.
Ainsi, puisqu'on cherche la valeur de départ, on calcule :
$\frac{84}{1{,}12} = 75$. Il y a eu 75 infractions en 2023.
$CM_{rec} = \frac{1}{CM} = \frac{1}{1{,}12} \approx 0{,}8929$.
Le taux d'évolution réciproque est donc
$CM_{rec} - 1 \approx 0{,}8929 - 1 \approx -0{,}1071$. Il faut une diminution d'environ 10,71 %.

28 **1.** La case est grisée car on ne peut pas calculer l'évolution entre 2020 et 2021.

2.

	2020	2021	2022	2023
C.A.	104	95	100,7	104
Évolution en %		−8,7	+6	+3,3

29 **1.**

	Lire	Regarder un film	Total
Femmes	62	53	115
Hommes	33	52	85
Total	95	105	200

2. $f = \frac{95}{200} = 0{,}475$.

3. $f_{\text{Film}}(\text{Hommes}) = \frac{52}{105} \approx 0{,}495$

4. $\frac{62}{115} \approx 0{,}539$. Au moins 53,9 % des femmes préfèrent lire, donc l'affirmation est fausse.

30 **1.** Dans la classe il y a $p = \frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\,\%$ de garçons.

2. 1re façon : on sait que 25 % des garçons sont au CVL, soit $12 \times \frac{25}{100} = 3$ garçons dans la classe.
Ce qui représente $p = \frac{3}{30} \times 100 = 10\,\%$.
2e façon : les garçons au CVL représente 25 % des 40 % de garçons dans la classe, soit $p = \frac{25}{100} \times \frac{40}{100} = 0{,}1 = 10\,\%$.

31 **1.** La proportion de mammifères de moins d'un an est de $p = \frac{30}{100} \times \frac{15}{100} = 0{,}045$.

81	x
4,5 %	100 %

2. On remplit le tableau de proportionnalité :
En appliquant le produit en croix on trouve qu'il y a $x = \frac{81 \times 100}{4{,}5} = 1\,800$ animaux dans la réserve.

32 **1.** On calcule les coefficients multiplicateurs des deux évolutions : $CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$ et $CM_2 = 1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$.
Le coefficient multiplicateur global est donc : $CM_g = 1{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}77$.
Ainsi le taux d'évolution associé est $t_g = 0{,}77 - 1 = -0{,}23$.

2. De même $CM_1 = CM_2 = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$, donc $CM_g = 1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$.
Ainsi $t_g = 1{,}44 - 1 = 0{,}44$.

33 On sait que $CM_g = CM_1 \times CM_2$. Or $CM_1 = 1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$ et $CM_g = 1 + \frac{41}{100} = 1{,}41$. Donc $CM_2 = \frac{CM_g}{CM_1} = \frac{1{,}41}{1{,}15} \approx 1{,}226$. Le pourcentage associé est donc donné par $t_g = 1{,}226 - 1 = 0{,}226 = 22{,}6\,\%$.

34 **1.** Une hausse de 5 % est associé à un coefficient multiplicateur $CM = 1 + \frac{5}{100}$. On a alors $CM_{\text{rec}} = \frac{1}{1{,}05}$, ainsi le taux d'évolution associé est $t = CM_{\text{rec}} - 1 \approx -0{,}048$.

2. De même, la baisse est associée au coefficient multiplicateur $CM = 1 - \frac{50}{100}$. Ainsi $CM_{\text{rec}} = \frac{1}{0{,}5} = 2$, et $t = 2 - 1 = 1$.

3. La hausse est associée au coefficient multiplicateur $CM_1 = 1 + \frac{100}{100} = 2$, et la baisse au coefficient multiplicateur $CM_2 = 1 - \frac{50}{100} = 0{,}5$. Ainsi $CM_{rec} = \frac{1}{CM_g} = \frac{1}{2 \times 0{,}5} = 1$ donc $t = 1 - 1 = 0$.

35 **1.** La première évolution est associée au coefficient multiplicateur $CM_1 = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$, la seconde au coefficient multiplicateur $CM_2 = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$. Le taux d'évolution globale est donné par $t = CM_g - 1 = 1{,}05 \times 0{,}9 - 1 = 0{,}945 - 1 = -0{,}055$.

SPECIMEN

2. On cherche le coefficient multiplicateur réciproque associé à cette évolution : $CM_{\text{rec}} = \dfrac{1}{CM_g}$. Ainsi le taux d'évolution vaut $t = CM_{\text{rec}} - 1 \approx 0{,}058$. Ce qui correspond à une augmentation de 5,8 %.

J'évalue mes connaissances

QCM

1. Réponse **b.** car $p = \dfrac{207\,898}{732\,843} \approx 0{,}284 \approx 28{,}4\,\%$.

2. Réponse **a.** car $p = \dfrac{370\,395}{387\,067} \approx 0{,}957 \approx 95{,}7\,\%$.

3. Réponse **a.** car $T = \dfrac{148\,466 - 144\,599}{144\,599} \approx 0{,}0267 \approx 2{,}67\,\%$.

4. Réponse **b.** car $CM = 1 + \dfrac{3{,}8}{100} = 1{,}038$ et $148\,466 \times 1{,}038 \approx 154\,108$.

5. Réponse **c.** car $CM = 1 + \dfrac{13{,}8}{100} = 1{,}138$ et $\dfrac{732\,843}{1{,}138} \approx 643\,975$.

6. Réponse **c.** car $CM = 1 + \dfrac{12{,}2}{100} = 1{,}122$ et $CM_{rec} = \dfrac{1}{CM} = \dfrac{1}{1{,}122} \approx 0{,}891$. Le taux d'évolution réciproque est $CM_{\text{rec}} - 1 \approx 0{,}891 - 1 \approx -0{,}109 \approx -10{,}9\,\%$.

vrai ou faux ?

Partie A.

1. Faux. Contre-exemple : la série 1 ; 2 a pour médiane 1,5.

2. Faux, c'est un indicateur qui mesure la dispersion des valeurs d'une série autour de la médiane.

3. Vrai. Exemple : la série 1 ; 1 a pour écart type 0.

4. Faux. Contre-exemple : la série 1 ; 10 ; 10 a pour moyenne 7 et pour médiane 10.

5. Faux, il faut ajouter ce nombre à la médiane aussi.

6. Faux. Contre-exemple : la série 1 ; 2 a pour variance 0,25 et pour écart type 0,5.

7. Faux, la formule de la variance est la somme de nombres élevés au carré divisé par l'effectif total, donc la variance est positive ou nulle.

Partie B.

1. Faux car $Me = 7$. **2.** Vrai car $Q_3 = 8$ et $Q_1 = 5$, $Q_3 - Q_1 = 8 - 5 = 3$.

3. Faux car il y a 20 valeurs dans la série. **4.** Faux car $\sigma \approx 1{,}7$.

Exercices Application

44 A : $\bar{x} = \dfrac{5+7+4+8+4}{5} = 5{,}6$

$V = \dfrac{(5-5{,}6)^2 + (7-5{,}6)^2 + (4-5{,}6)^2 + (8-5{,}6)^2 + (4-5{,}6)^2}{5} = 2{,}64$

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2{,}64} \approx 1{,}62$

B : $\bar{x} = \dfrac{6+7+6+5+5}{5} = 5{,}8$

$V = \dfrac{(6-5{,}8)^2 + (7-5{,}8)^2 + (6-5{,}8)^2 + (5-5{,}8)^2 + (5-5{,}8)^2}{5} = 0{,}56$

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}75$. La série B a la meilleure moyenne.

52 **1.** $\bar{x} = \dfrac{7{,}5\times7 + 22{,}5\times9 + 37{,}5\times5 + 52{,}5\times4 + 67{,}5\times3 + 82{,}5\times2}{30} = \dfrac{1\,020}{30} = 30.$

Le temps moyen de téléchargement d'un fichier MP3 est de 34 secondes.

2. $\dfrac{9+5}{30} \times 100 \approx 47$ donc environ 47 % des fichiers ont un temps de téléchargement entre 15 et 45 secondes.

3. $\dfrac{30}{2} = 15$ et $7 + 9 = 16$ donc la classe médiane est la classe $[15;30[$.

53 $p = \dfrac{21}{35} = 0{,}6 = 60\,\%$. Il y a 60 % de filles dans la classe.

67 **1.** Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 72 % est $CM = 1 - \dfrac{72}{100} = 0{,}28$.

2. Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 31,7 % est $CM = 1 + \dfrac{31{,}7}{100} = 1{,}317$.

79 **1.**

	Tennis	Marche	Vélo	Total
Femmes	85	65	90	240
Hommes	65	55	40	160
Total	150	120	130	400

2. $f = \dfrac{120}{400} = 0{,}3$.

3. $f_{\text{H}}(\text{M}) = \dfrac{65}{240} \approx 0{,}27$.

96 **1.** Pour déterminer le coefficient multiplicateur réciproque on commence par calculer le coefficient multiplicateur associé à l'évolution : $CM = 1 + \dfrac{12}{100} = 1{,}12$. Ainsi $CM_{\text{rec}} = \dfrac{1}{1{,}12} \approx 0{,}89$.

Le taux d'évolution associé est donc $t = CM_{\text{rec}} - 1 \approx -0{,}11$.

2. Pour déterminer le coefficient multiplicateur réciproque on commence par calculer le coefficient multiplicateur associé à l'évolution : $CM = 1 - \dfrac{35}{100} = 0{,}65$. Ainsi $CM_{\text{rec}} = \dfrac{1}{0{,}65} \approx 1{,}54$.

Le taux d'évolution associé est donc $t = CM_{\text{rec}} - 1 \approx 0{,}54$.

Exercices Entraînement

103 **1.** $\bar{x} = \dfrac{3\times4 + 6\times6 + 8\times5 + 9\times5 + 10\times6 + 13\times3 + 15\times1}{4+6+5+5+6+3+1} \approx 8{,}23.$

2. a. Augmenter toutes les notes de 1 point revient à augmenter la moyenne de 1, donc la nouvelle moyenne est d'environ 9,23.

b. Augmenter toutes les notes de 20 % revient à toutes les multiplier par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$.

La nouvelle moyenne est donc multipliée par 1,2 : $8{,}23 \times 1{,}2 \approx 9{,}88$.

117 **1.** $\bar{x} = \dfrac{90\times52{,}5 + 150\times57{,}5 + 280\times62{,}5 + 310\times67{,}5 + 220\times72{,}5 + 130\times77{,}5}{1\,180} = \dfrac{77\,800}{1\,180}$,

soit $\bar{x} \approx 65{,}9$.

2. $\dfrac{90+150}{1\,180} = \dfrac{240}{1\,180} \approx 0{,}2$. Environ 20 % des élèves ont passé moins de 1 h à réviser.

3. $\dfrac{1\,180}{2} = 590$. La 590e valeur de la série est dans l'intervalle $[65;70[$ qui correspond à la classe médiane. Pour au moins la moitié des élèves, le temps de révision est compris entre 65 et 70 minutes.

122 **1.** La proportion d'élèves externes est de $p = \dfrac{18}{30} \times 100 = 60\,\%$.

2. Le nombre d'élèves qui portent des lunettes dans la classe est de $\dfrac{2}{5} \times 30 = 12$.

3. On peut remplir le tableau de proportionnalité :

30	x
4 %	100 %

En appliquant le produit en croix on trouve qu'il y a $x = \dfrac{30\times100}{4} = 750$ élèves dans le lycée.

139 **1.** Faux. Le coefficient multiplicateur correspondant à une telle évolution est $CM_g = 1{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}9775$. Ce qui correspond à une diminution de 2,25 %.

2. Faux. Le coefficient multiplicateur correspondant à une telle évolution est $CM_g = 1{,}35 \times 0{,}93 = 1{,}2555$. Ce qui correspond à une augmentation de 25,55 %.

SPÉCIMEN

3. Vrai. On calcule le coefficient multiplicateur réciproque $CM_{rec} = \dfrac{1}{1{,}5625} = 0{,}64$. Le prix d'origine est donc $62{,}50 \times 0{,}64 = 40$ €.

4. Faux. On calcule le coefficient multiplicateur réciproque $CM_{rec} = \dfrac{1}{1{,}6} = 0{,}625$, ce qui correspond à une diminution de 37,5 %.

150 **1.** $f(\text{B}) = \dfrac{480}{800} = 0{,}6$.

2. $f_{\text{A}}(\text{D}) = 0{,}1$ et $f_{\text{B}}(\text{D}) = 0{,}05$.

3.

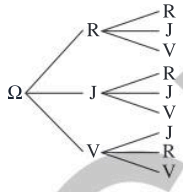
	D	$\overline{\text{D}}$	Total
A	32	288	320
B	24	456	480
Total	56	744	800

4. $f_{\text{D}}(\text{A}) = \dfrac{32}{56}$, soit $f_{\text{D}}(\text{A}) \approx 0{,}57$. Parmi les pièces présentant un défaut, environ 57 % proviennent de la machine A. Le directeur se trompe.

Chapitre 12

J'applique en autonomie

20 **1. a.** On note R l'issue « la boule tirée est rouge », J l'issue « la boule tirée est jaune » et V l'issue « la boule tirée est verte ».
$\Omega = \{\text{RR} ; \text{RJ} ; \text{RV} ; \text{JR} ; \text{JJ} ; \text{JV} ; \text{VJ} ; \text{VR} ; \text{VV}\}$



1. b. L'univers est composé de 9 issues.

2. L'événement « le tirage comporte au moins une bille jaune » est l'ensemble $\{\text{RJ} ; \text{JR} ; \text{JJ} ; \text{JV} ; \text{VJ}\}$. Il a 5 issues.

21

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

On remplit le tableau et on multiplie la valeur du 1er jeton tiré par la valeur du 2e jeton tiré.
$\Omega = \{1;2;3;4;6;9\}$

22 **1. a.** $\Omega = \{\text{BB} ; \text{BN} ; \text{NB} ; \text{NN}\}$ **b.** Il y a deux issues : BB et NN.

2. Il faut prendre encore une chaussette. En effet, en ayant pris au total 3 chaussettes, il y en a forcément deux de même couleur.

23

	0	5	10	20
0	0	5	10	20
5	5	10	15	25
10	10	15	20	30
20	20	25	30	40

$\Omega = \{0;5;10;15;20;25;30;40\}$

24 **1.** La probabilité de gagner 4, 10 ou de perdre 5 points est proportionnelle à l'aire des zones concernées. Sachant que les aires des carrées sont 1, 4, 9 et 16 dm², l'aire totale de la cible est donc $1+4+9+16 = 30$ dm².
On a donc la loi de probabilité suivante :

Gain (pts)	4	10	−5
p	$\dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$	$\dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$	$\dfrac{9+1}{30} = \dfrac{1}{3}$

2. $p(\text{Gain} \geqslant 2) = p(\text{Gain} = 4) + p(\text{Gain} = 10) = \dfrac{8}{15} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.

25 **1.** On note x la probabilité d'obtenir 2. La somme des probabilités de chaque face vaut 1, on a donc : $0{,}2 + x + x + x + x + 0{,}4 = 1$.
On en déduit que $4x = 0{,}4$ d'où $x = 0{,}1$.

Issue	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4

2. $p(\text{A}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}6$.
$p(\text{B}) = p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$.
$p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\{2\}) = 0{,}1$.
$p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}8$

26 **1. a.** $P(\text{A}) = \dfrac{120}{200} = 0{,}6$ et $P(\text{A} \cap \text{D}) = \dfrac{30}{200} = 0{,}15$

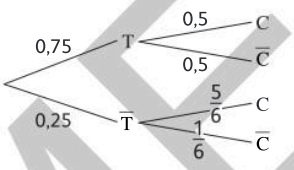
b. $P_{\text{A}}(\text{D}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{D})}{P(\text{A})} = \dfrac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$

2. $P_{\text{D}}(\text{B}) = \dfrac{\text{Card}(\text{D} \cap \text{B})}{\text{Card}(\text{D})} = \dfrac{20}{50} = 0{,}4$

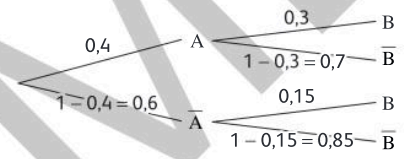
27 **1.** $\dfrac{45}{100} = 0{,}45$ **2.** $\dfrac{12}{100} = 0{,}12$ **3.** $\dfrac{12}{45} = \dfrac{4}{15}$

28 $P(\text{E}) = 0{,}74$; $P_{\text{E}}(\text{R}) = 0{,}35$ et $P_{\overline{\text{E}}}(\overline{\text{R}}) = 0{,}45$

29



30 **1.**



2. $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

31 $P(\text{A}) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$; $P_{\text{A}}(\text{D}) = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$ et $P_{\text{D}}(\text{A}) = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$

32 **1.** $P_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}2$

2. $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}2}{0{,}32} = 0{,}4375$

3. a. $P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

b. $P_{\overline{\text{B}}}(\overline{\text{A}}) = \dfrac{P(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{B}})}{P(\overline{\text{B}})} = \dfrac{0{,}12}{1 - 0{,}32} = \dfrac{12}{68} = \dfrac{3}{17}$

J'évalue mes connaissances

QCM

1. Réponse **b.** car $x = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}05) = 0{,}25$.

2. Réponse **a.**

3. Réponses **b.** et **c.** car, en notant l'événement A « obtenir 4 », on a $\text{A} = \{1;2\}$ donc $P(\text{A}) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

4. Réponse **b.** car $\text{A} \cap \text{B} = \{4;6\}$.

5. Réponses **a.** et **c.** car $\text{A} \cup \text{B} = \{2;4;5;6\}$ et $P(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}65$.

6. Réponse **a.** car $P_{\text{F}}(\text{I}) = \dfrac{\text{Card}(\text{F} \cap \text{I})}{\text{Card}(\text{F})} = \dfrac{4}{18}$

7. Réponses **b.** et **c.** car $P_{\text{I}}(\overline{\text{F}}) = \dfrac{\text{Card}(\text{I} \cap \overline{\text{F}})}{\text{Card}(\text{I})} = \dfrac{2}{6}$

8. Réponses **b.** et **c.** car on considère la probabilité $P_{\overline{\text{I}}}(\text{F}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{\text{I}} \cap \text{F})}{\text{Card}(\overline{\text{I}})} = \dfrac{14}{24} = \dfrac{7}{12}$

vrai ou faux ?

Partie A.

a. Faux, le roi de cœur est à la fois un roi et une carte de cœur.

b. Faux car $P(\text{A}) = \dfrac{4}{32} = 0{,}125 \neq P(\text{B}) = \dfrac{8}{32} = 0{,}25$.

SPECIMEN

c. Vrai car le roi de cœur est la seule carte étant à la fois un roi et une carte de cœur.

d. Faux car $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$

e. Vrai car $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

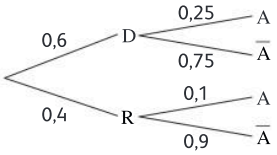
f. Faux, il y a 32 tirages possibles puis 31 tirages possibles, soit $32 \times 31 = 992$ tirages possibles.

Partie B.

1. Vrai car $P(R) = 1 - P(D) = 1 - \frac{60}{100} = 0,4$

2. Faux car d'après l'énoncé $P_D(A) = \frac{25}{100} = 0,25$

3. Faux car la probabilité de l'événement A n'est pas connue, il faut inverser les événements des branches de premier niveau et ceux de niveaux secondaires soit



4. Vrai car $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$

Exercices Application

38

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$\Omega = \{0;1;2;3;4;5\}$. L'univers est composé de 6 issues.

44 On sait que $p + 0,1 + 0,25 + 0,15 + 0,3 = 1$, donc $p = 1 - (0,1 + 0,25 + 0,15 + 0,3) = 0,2$.
En notant A l'événement « obtenir au moins deux », on a $A = \{2;3;4\}$ donc $P(A) = 0,25 + 0,15 + 0,3 = 0,7$.

49 On décrit l'ensemble des possibilités à l'aide du tableau suivant :

Tirage 1 / Tirage 2	Z	O	E
Z	ZZ	OZ	EZ
O	ZO	OO	EO
E	ZE	OE	EE

On est en situation d'équiprobabilité, chaque lettre a la même probabilité d'être tirée.

Issue	ZZ	ZO	ZE	OZ	OO	OE	EZ	EO	EE
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Les mots contenant deux voyelles sont OO, OE, EO et EE, ainsi $A = \{OO;OE;EO;EE\}$ donc $P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

$B = \{ZE;OE;EE\}$, donc $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. De même $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$.

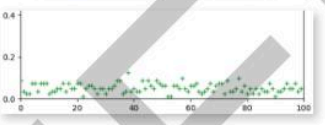
51 **1.** $p = \frac{10}{200} = 0,05$

2. On propose :

```
from random import*
def fréquence(n):
    Nb_gagnant=0
    for i in range(n):
        x=random()
        if x<0.05:
            Nb_gagnant=Nb_gagnant+1
    return Nb_gagnant/n
```

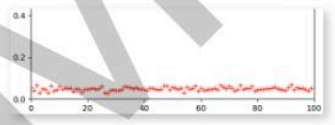
3. • Pour les 100 échantillons de taille 80 :

```
from pylab import*
for i in range(100):
    f=fréquence(80)
    plot(i,f,'+',color='green')
axis([0,100,0,1])
show()
```



Pour les 100 échantillons de taille 500 :

```
from pylab import*
for i in range(100):
    f=fréquence(500)
    plot(i,f,'+',color='red')
axis([0,100,0,1])
show()
```



On observe la loi des grands nombres : plus la taille de l'échantillon est grande, moins la fréquence de succès fluctue autour de la probabilité 0,05.

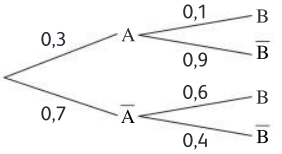
56 On a $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,6} = 0,3$

66 On nous donne les probabilités conditionnelles sachant que l'événement A ou $\overline{A}$ est réalisé. Il faut donc placer les événements A et $\overline{A}$ au premier niveau.
Et ensuite calculer les probabilités manquantes à l'aide des probabilités données dans l'énoncé :

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0,6 = 0,4$



69 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc : $0,16 = \frac{P(A \cap B)}{0,2}$ et on en déduit : $P(A \cap B) = 0,2 \times 0,16 = 0,032$.

76 **1.** D'après l'énoncé, on a $\text{Card}(T) = 20$, $\text{Card}(\overline{T}) = 15$, $\text{Card}(F) = 12$ et $\text{Card}(F \cap T) = 8$

$P_T(F) = \frac{\text{Card}(T \cap F)}{\text{Card}(T)} = \frac{8}{20} = 0,4$ et $P_F(T) = \frac{\text{Card}(F \cap T)}{\text{Card}(F)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

2. On interprète par : 40 % des véhicules thermiques de l'agence sont des modèles familiaux et 2 tiers des véhicules familiaux sont thermiques.

Exercices Entraînement

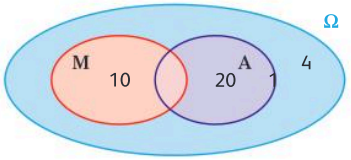
80 **1.** On fait la somme du nombre d'issues pour chaque zone. Il y a donc $24 + 15 + 30 + 20 = 89$ issues dans l'univers.

SPÉCIMEN

2. a. L'événement A possède $24+15=39$ issues.
b. L'événement $\overline{B}$ possède $30+15=45$ issues.
c. L'événement $\overline{A}$ est composé des issues qui ne sont pas dans A, il possède $89-39=50$ issues.
d. L'événement $\overline{B}$ est composé des issues qui ne sont pas dans B, il possède $89-45=44$ issues.
e. L'événement $A\cap B$ possède 15 issues.
f. L'événement $A\cup B$ possède $24+15+30=69$ issues.
g. L'événement $\overline{A\cap B}$ est composé des issues qui ne sont pas dans $A\cap B$, il possède $89-15=74$ issues.
h. L'événement $\overline{A\cup B}$ est composé des issues qui ne sont pas dans $A\cup B$, il possède $89-69=20$ issues.

87 **1.** On sait que la somme de toutes les probabilités est égale à 1. Donc $0,2+p+p+4p+2p=1\Leftrightarrow 8p=0,8\Leftrightarrow p=0,1$.
2. On note A l'événement « obtenir un multiple de 3 ». $A=\{3;6\}$, donc $P(A)=0,1+2\times 0,1=0,3$.
3. On note B l'événement « obtenir une issue paire ». $B=\{2;4;6\}$, donc $P(B)=0,2+0,1+2\times 0,1=0,5$. « Obtenir une issue impaire » correspond à l'événement $\overline{B}$, donc $P(\overline{B})=1-P(B)=0,5$. Il y a bien autant de chances d'avoir une issue paire qu'une issue impaire.

117 **1.**



2. $P(M\cap\overline{A})=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$

3. $P_M(A)=\dfrac{\text{Card}(M\cap A)}{\text{Card}(M)}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

4. $P_{\overline{M}}(\overline{A})=\dfrac{\text{Card}(\overline{M}\cap\overline{A})}{\text{Card}(\overline{M})}=\dfrac{4}{35-30}=\dfrac{4}{5}=0,8$

Algorithmique et programmation

J'applique en autonomie

1 **1.** Puisque $50<100$ alors le prix est $50\times 0,2=10$ €.
Puisque $150>100$ alors le prix est : $100\times 0,2+50\times 0,15=27,5$ €.

2.
```
x=int(input("Nombre de cartes commandées ?"))

if x <= 100:
    tarif = 0.2*x
else :
    tarif = 20+(x-100)*0.15
```

2 **1.**
```
a, b, c = 5, 9, 8
if a**2 == b**2 + c**2:
    print("tri. rect. et hypoténuse=",a)
elif b**2 == a**2 + c**2:
    print("tri. rect. et hypoténuse=",b)
elif c**2 == a**2 + b**2:
    print("tri. rect. et hypoténuse=",c)
else:
    print("le triangle n'est pas rectangle")
```

2. • Pour $a=5$; $b=3$ et $c=4$:
```
tri. rect. et hypoténuse= 5
>>>
```
• Pour $a=12$; $b=13$ et $c=5$:
```
tri. rect. et hypoténuse= 13
>>>
```
• Pour $a=1$; $b=5$ et $c=7$:
```
le triangle n'est pas rectangle
>>>
```
• Pour $a=12$; $b=35$ et $c=37$:
```
tri. rect. et hypoténuse= 37
>>>
```

3 **1.** Comme $x=3$ alors la condition $x>2$ est vraie donc la fonction renvoie 3^2 donc 9.
2. Comme $x=1$ alors la condition $x>2$ est fausse. On obtient $2\times 1=2$.

4 **1.**
```
def maximum(a,b):
    if a<b:
        return b
    else :
        return a
```

2. a.
```
>>> maximum(2,5)
5
```
b.
```
>>> maximum(5,3)
5
```
c.
```
>>> maximum(3,3)
3
```

5
```
S, k = 0, 0
while S<=1000 :
    k = k+1
    S = S+k

print(k)
```

6 **1.**
```
pop←200
Pour i variant de 1 à 10 Faire
    augmentation←0,05×pop
    pop←pop+augmentation
Fin Pour
Afficher pop
```
```
pop = 200
for i in range(10):
    augmentation = 0.05*pop
    pop = pop + augmentation
print(pop)
```

2.
```
pop←200
annee = 0
Tant que pop<=1000 Faire
    augmentation←0,05×pop
    pop←pop+augmentation
    annee = annee + 1
Fin Tant que
Afficher annee
```
```
pop = 200
annee = 0
while pop<=1000:
    augmentation = 0.05*pop
    pop = pop + augmentation
    annee = annee +1
print(annee)
```

7 **1. a.**

a	Affichage
−2	−2, −7
−1	−1, −5
0	0, −3
1	1, −1
2	2, 1

b. Ce programme affiche le tableau de valeurs d'une fonction f pour x prenant les valeurs entières entre −2 et 2.

2.
```
def f(x):
    return -x**2+2

for a in range(-5,6):
    print(a,f(a))
```

SPECIMEN