

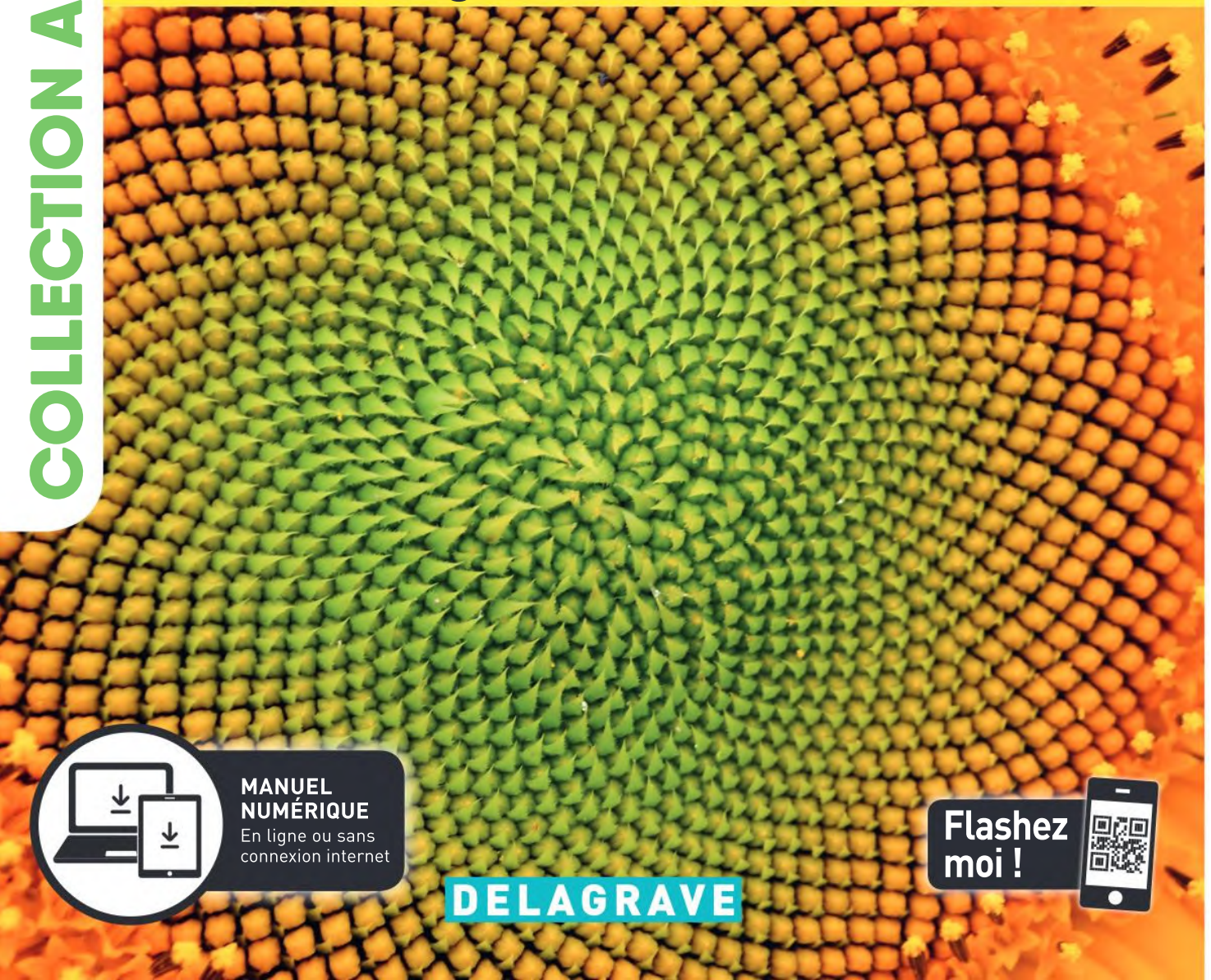
Nouveau Programme

COLLECTION ALGOMATHS

T^{le}
SÉRIES
TECHNO

MATHS

Enseignement commun



**MANUEL
NUMÉRIQUE**

En ligne ou sans
connexion internet

DELAGRAVE

**Flashez
moi !**



1 Suites numériques 12

Activités 14

Méthodes

- 1 Calculer une moyenne arithmétique 17
- 2 Exprimer en fonction de n le terme de rang n (suite arithmétique) 17
- 3 Faire la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique 17
- 4 Calculer une moyenne géométrique 19
- 5 Exprimer en fonction de n le terme de rang n (suite géométrique) 19
- 6 Faire la somme des n premiers termes d'une suite géométrique 19

Automatismes 21

Exercices 22

BAC 31



2 Fonction inverse 34

Activités 36

Méthodes

- 1 Calculer la limite d'une fonction 39
- 2 Calculer la dérivée d'une fonction 39
- 3 Étudier les variations d'une fonction 39

Automatismes 41

Exercices 42

BAC 49



3 Fonctions exponentielles de base a 52

Activités 54

Méthodes

- 1 Passer d'une suite géométrique de raison a à la fonction exponentielle de base a 57
- 2 Transformer des expressions numériques avec les propriétés algébriques 57
- 3 Étudier le sens de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$ 59
- 4 Déterminer un taux d'évolution annuel moyen 59

Automatismes 61

Exercices 62

BAC 71



4 Fonction logarithme décimal 74

Activités 76

Méthodes

- 1 Utiliser la définition du logarithme décimal 79
- 2 Utiliser le sens de variation de la fonction logarithme décimal pour comparer deux images 79
- 3 Simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales 81
- 4 Résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ (x réel), une inéquation du type $a^n < b$ (n entier) 81

Automatismes 83

Exercices 84

BAC 93





5 Statistiques à deux variables quantitatives ... 96

Activités ... 98

Méthodes

- 1 Représenter un nuage de points ... 101
- 2 Déterminer les coordonnées du point moyen d'un nuage de points ... 101
- 3 Déterminer un ajustement affine ... 103
- 4 Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues ... 103

Automatismes ... 105

Exercices ... 106

BAC ... 115



6 Probabilités conditionnelles ... 118

Activités ... 120

Méthodes

- 1 Utiliser un arbre pour calculer des probabilités ... 123
- 2 Construire et exploiter un arbre de probabilités ... 123
- 3 Calculer la probabilité d'un événement relativement à une partition de l'univers ... 125
- 4 Démontrer l'indépendance de deux événements ... 125

Automatismes ... 127

Exercices ... 128

BAC ... 137



7 Variables aléatoires discrètes ... 140

Activités ... 142

Méthodes

- 1 Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire ... 145
- 2 Calculer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal ... 145
- 3 Calculer des probabilités à l'aide des coefficients binomiaux ... 147
- 4 Reconnaître si une situation relève de la loi binomiale ... 147

Automatismes ... 149

Exercices ... 150

BAC ... 159

En fin d'ouvrage

Les outils pour réussir ... 162

Corrigés des Exercices ... 178

BAC PRÉPARATION À L'ÉPREUVE DE CONTRÔLE CONTINU

- **SUJET RÉSOLU** : entièrement rédigé, pour revoir les méthodes et les automatismes
- **SUJET GUIDÉ** : pour s'entraîner en étant accompagné de méthodes
- **SUJET** : pour s'entraîner dans les conditions réelles

Les pictos du manuel

ALGO



Questions Flash

PYTHON

PYTHON

NUMWORKS

TABLEUR

GEOGEBRA

L'ouverture du chapitre

Des exercices rapides
sous forme de
questions flash
pour réactiver les
automatismes de 1^{re}
► voir p. 6

Des **rappels** et un **QCM**
pour revoir et vérifier
les acquis de 1^{re}

Les **capacités attendues** du programme

Une **situation réelle**
avec une **vidéo** permettent
d'introduire le chapitre
► voir p. 6

Les activités

Des **activités**
pour découvrir
les notions

Des activités
contextualisées
pour prendre
en compte
les **spécificités
des séries**
et la vie
quotidienne

Un retour vers la **situation**
de la page d'ouverture

Le cours et les méthodes

Des **exercices résolus** mis en relation avec les notions du cours

Une **méthode**
de résolution dans
chaque exercice résolu

Un **renvoi aux exercices** faisant appel à la même méthode

Un **cours** clair, illustré
avec des exemples,
pour apprendre
les notions

Un renvoi
à l'exercice résolu
correspondant

Les exercices

Pour acquérir les automatismes

Exercices

Questions flash

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Déterminer les coordonnées des points appartenant à un nuage de points

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.
 2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$.
 3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.
 4. Soit la fonction k définie par $k(x) = x^3$.

Déterminer les équations réduites d'une droite

1. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$.
 2. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $C(0, 1)$ et $D(2, 3)$.
 3. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $E(-1, 0)$ et $F(1, 2)$.
 4. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $G(2, 1)$ et $H(4, 3)$.

Déterminer une fonction à partir d'un nuage de points

1. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 2. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 3. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 4. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.

Des activités rapides et des questions flash pour acquérir et maîtriser les automatismes de T^{le}.
 ► voir p. 6

Exercices

Pour commencer

Nuage de points

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Déterminer les coordonnées des points appartenant à un nuage de points

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.
 2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$.
 3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.
 4. Soit la fonction k définie par $k(x) = x^3$.

Déterminer les équations réduites d'une droite

1. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$.
 2. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $C(0, 1)$ et $D(2, 3)$.
 3. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $E(-1, 0)$ et $F(1, 2)$.
 4. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $G(2, 1)$ et $H(4, 3)$.

Déterminer une fonction à partir d'un nuage de points

1. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 2. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 3. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 4. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.

Des exercices d'application directe du cours, avec des Vrai ou Faux, des QCM et des questions de cours.

Exercices

Pour s'entraîner

Nuage de points et point moyen

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Déterminer les coordonnées des points appartenant à un nuage de points

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.
 2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$.
 3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.
 4. Soit la fonction k définie par $k(x) = x^3$.

Déterminer les équations réduites d'une droite

1. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$.
 2. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $C(0, 1)$ et $D(2, 3)$.
 3. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $E(-1, 0)$ et $F(1, 2)$.
 4. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $G(2, 1)$ et $H(4, 3)$.

Déterminer une fonction à partir d'un nuage de points

1. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 2. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 3. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.
 4. Soit un nuage de points. Déterminer la fonction qui lui correspond.

Des exercices d'entraînement avec :
 – des renvois vers les méthodes de résolution
 – des coups de pouce
 – des exercices d'algorithmique, programmation
 – des exercices TICE
 – des contextes différents selon la série

Des tests en ligne pour s'entraîner en autonomie
 ► voir p. 6

Exercices

Pour faire le point

Vrai ou Faux

1. La fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est une fonction linéaire.
 2. La fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ est une fonction quadratique.
 3. La fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction inverse.
 4. La fonction k définie par $k(x) = x^3$ est une fonction cubique.

QCM

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$. Quelle est son image de 1 ?
 2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$. Quelle est son image de 2 ?
 3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$. Quelle est son image de 3 ?
 4. Soit la fonction k définie par $k(x) = x^3$. Quelle est son image de 4 ?

Pour approfondir

Exercices

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Des exercices d'approfondissement pour mettre en application les notions et développer les compétences.

Des exercices corrigés pour tester rapidement ses connaissances :
 – des Vrai ou Faux
 – des QCM

TP

Progression d'une maladie contagieuse

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.
 2. Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$.
 3. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$.
 4. Soit la fonction k définie par $k(x) = x^3$.

Pour l'épreuve du BAC

Exercices

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Suivi de la BAC

Exercices

1. Représenter le nuage de points de la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 2. Représenter le nuage de points de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 3. Représenter le nuage de points de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.
 4. Représenter le nuage de points de la fonction k définie par $k(x) = x^3$ pour $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Des travaux pratiques avec un prolongement systématique sur ordinateur.

Des vidéos et sites d'introduction

Chaque chapitre est introduit par une vidéo [en lien avec la photographie d'ouverture](#) pour ancrer les notions dans des situations réelles ou faire le lien avec des enjeux scientifiques actuels.



Questions Flash

Des diaporamas personnalisables

Retrouvez dans chaque chapitre des diaporamas prêts à l'emploi et personnalisables :

- Au début du chapitre dans [Pour retrouver les automatismes](#) de 1^{re}.
- Dans les pages d'exercices [Pour acquérir les automatismes](#) de T^{le}.

Diaporama

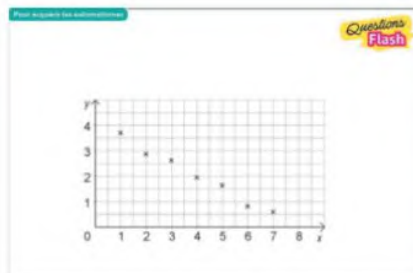
15 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-30

Questions Flash

La droite de coefficient directeur $-0,5$ et passant par le point $A(8 ; 0)$ donne-t-elle un bon ajustement affine de ce nuage de points ?

Si oui, déterminer son équation réduite.



Des tests en ligne

Retrouvez des tests en ligne dans la page d'exercices [Pour faire le point](#) : pour continuer à s'entraîner en ligne en toute autonomie !

Tests

S'entraîner en ligne

lienmini.fr/10445-31

EXERCICES : Statistiques à deux variables quantitatives

On étudie l'évolution du nombre d'abonnés à un magazine sportif au cours des 8 premières années suivant son lancement. Voici le nuage des points obtenu ainsi qu'une droite fournissant un bon ajustement affine.

Le nombre de lecteurs dépassera 100 000 au bout de :

☐ 7 ans
☐ 8 ans
☐ On ne peut pas savoir

Rang de l'année (x)	Nombre d'adhérents (en milliers) (y)
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80

Algorithmique et programmation



Capacités attendues

Variables :

- utiliser un générateur de nombres aléatoires entre 0 et 1 pour simuler une loi de Bernoulli de paramètre p ;
- utiliser la notion de compteur ;
- utiliser le principe d'accumulateur pour calculer une somme, un produit.

Fonctions :

- identifier les entrées et les sorties d'une fonction ;
- structurer un programme en ayant recours aux fonctions.

Listes :

- générer une liste (en extension, par ajouts successifs, en compréhension) ;
- manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer...) et leurs indices ;
- itérer sur les éléments d'une liste.

Sélection de données :

- traiter un fichier contenant des données réelles pour en extraire de l'information et l'analyser ;
- réaliser un tableau croisé de données sur deux critères à partir de données brutes.

Automatismes

Questions Flash

Capacités attendues

Les automatismes propres à la Terminale figurent en italiques.

Proportions et pourcentages :

- calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes (décimale, fractionnaire, pourcentage) ;
- calculer la proportion d'une proportion.

Évolutions et variations :

- passer d'une formulation additive (« augmenter de 5 % », respectivement « diminuer de 5 % ») à une formulation multiplicative (« multiplier par 1,05 », respectivement « multiplier par 0,95 ») ;
- appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale ;
- calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage ;
- interpréter un indice de base 100 ; calculer un indice ; calculer le taux d'évolution entre deux valeurs ;
- calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives ;
- calculer un taux d'évolution réciproque ;
- reconnaître une situation contextualisée se modélisant par une suite géométrique dont on identifie la raison.

Calcul numérique et algébrique :

- effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples ;
- effectuer des opérations sur les puissances ;
- passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, scientifique) ;
- estimer un ordre de grandeur ;
- effectuer des conversions d'unités ;
- résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une équation du type : $x^2 = a$;
- déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré ;
- isoler une variable dans une égalité ou une inégalité qui en comporte plusieurs sur des exemples internes aux mathématiques ou issus des autres disciplines ;
- effectuer une application numérique d'une formule (notamment pour les formules utilisées dans les autres disciplines) ;
- développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple ;
- calculer la dérivée d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 ;
- calculer le coefficient directeur de la tangente en un point à une courbe à l'aide de la dérivée.

Fonctions et représentations :

- déterminer graphiquement des images et des antécédents ;
- résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$... ;
- déterminer le signe d'une expression factorisée du second degré à l'aide d'une image mentale de la courbe représentative de la fonction correspondante ;
- déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations ;
- exploiter une équation de courbe (appartenance d'un point, calcul de coordonnées) ;
- tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur ;
- lire graphiquement l'équation réduite d'une droite ;
- déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points ;
- déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une tangente à une courbe.

Représentations graphiques de données chiffrées :

- lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barres ou circulaire, un diagramme en boîte ou toute autre représentation (repérer l'origine du repère, les unités de graduations ou les échelles...) ;
- passer du graphique aux données et vice versa.

Analyse

► Suites numériques → Chapitre 1

Contenus	Capacités attendues
<i>Suites arithmétiques :</i> – moyenne arithmétique de deux nombres ; – expression en fonction de n du terme de rang n ; – somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ; notation Σ. <i>Suites géométriques à termes positifs :</i> – moyenne géométrique de deux nombres positifs ; – expression en fonction de n du terme de rang n ; – somme des n premiers termes d'une suite géométrique ; notation Σ.	– Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. – Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution. – Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique. – Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. – Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

► Fonction inverse → Chapitre 2

Contenus	Capacités attendues
– Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition. – Dérivée et sens de variation. – Courbe représentative ; asymptotes.	– Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

► Fonctions exponentielles → Chapitre 3

Contenus	Capacités attendues
<i>Les fonctions $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) comme modèle continu d'évolution relative constante :</i> – définition de la fonction $x \mapsto a^x$ pour x positif comme prolongement à des valeurs non entières positives de la suite géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$; extension à $\mathbb{R}^+$ en posant $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; – sens de variation selon les valeurs de a ; – allure de la courbe représentative selon les valeurs de a ; – propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx} = (a^x)^n$; – cas particulier de l'exposant $\frac{1}{n}$ pour calculer un taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives.	– Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a. – Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales. – Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

► Fonction logarithme décimal → Chapitre 4

Contenus	Capacités attendues
– Définition du logarithme décimal de b pour $b > 0$ comme l'unique solution de l'équation $10^x = b$; notation $\log$. – Sens de variation. – Propriétés algébriques : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, $\log(a^n) = n \log(a)$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$, pour n entier naturel, a et b réels strictement positifs.	– Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel. – Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Statistiques et probabilités

► Séries statistiques à deux variables quantitatives → Chapitre 5

Contenus	Capacités attendues
– Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives. – Ajustement affine.	– Représenter un nuage de points. – Déterminer et utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues. – Représenter un nuage de points en effectuant un changement de variable donné (par exemple $u^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \log(y) \dots$) afin de conjecturer une relation de linéarité entre de nouvelles variables.

► Probabilités conditionnelles → Chapitre 6

Contenus	Capacités attendues
– Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. – Indépendance de deux événements de probabilités non nulles. – Formule des probabilités totales pour une partition de l'univers.	– Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée. – Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles. – Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant. – Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités. – Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

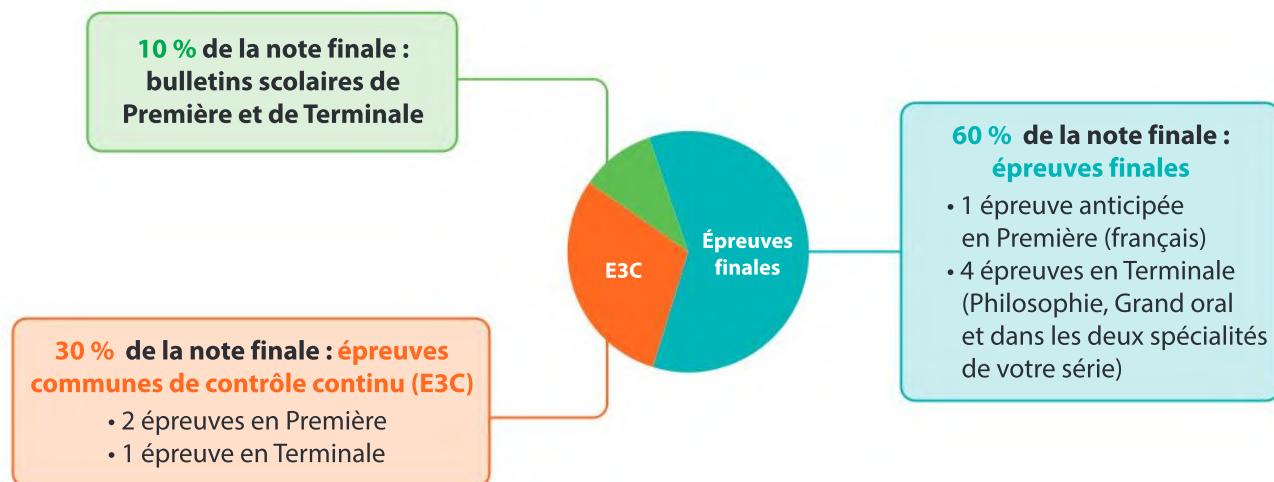
► Variables aléatoires discrètes finies → Chapitre 7

Contenus	Capacités attendues
– Espérance d'une variable aléatoire discrète. – Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$; espérance. – Coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$; triangle de Pascal.	– Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter. – Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$. – Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres. – Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiales : • interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilité ; • calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \{X = n\}, \{X = n - 1\}$ et de ceux qui s'en déduisent par réunion ; – calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.

Les épreuves du Baccalauréat technologique

Répartition de la note finale

Il faut obtenir une note finale d'au moins 10/20 pour valider le Baccalauréat.



Calendrier des épreuves en Terminale



	1 ^{er} trimestre				2 ^e trimestre			3 ^e trimestre		
	SEPT.	OCT.	NOV.	DÉC.	JANV.	FÉV.	MARS	AVRIL	MAI	JUIN
Épreuves communes de contrôle continu (E3C) → Dates fixées par l'établissement → Sujets choisis par l'établissement					EPS tout au long de l'année Coef. 5					
								Mathématiques Écrit 2 h Coef. 5		
								Histoire-Géographie Écrit 2 h Coef. 5		
								LVA et LVB Écrit 2 h + Oral 10 min Coef. 5		

	1 ^{er} trimestre				2 ^e trimestre			3 ^e trimestre		
	SEPT.	OCT.	NOV.	DÉC.	JANV.	FÉV.	MARS	AVRIL	MAI	JUIN
Épreuves finales → Dates nationales → Sujets nationaux										
								Philosophie Écrit 4 h Coef. 4		
								Grand oral Oral 20 min Coef. 14		

Épreuves communes de contrôle continu (E3C)



Épreuve écrite

Durée : 2 heures

Coefficient : 5

1^{re} partie



- **Test de maîtrise des automatismes :** questions Flash indépendantes et à réponses rapides ou QCM.
- **Durée :** 20 minutes
- **Notation :** 5 points

2^e partie

- **Trois exercices** indépendants les uns des autres.
- **Durée :** 1 h 40 minutes
- **Notation :** 15 points

Le grand oral



Épreuve orale

Durée : 20 minutes

Coefficient : 14

Le choix du sujet

Le candidat présente au jury **deux questions** préparées pendant l'année. Le **jury** choisit **l'une des deux questions**.

L'exposé

Sans notes et **debout**.

Le jury

2 professeurs : l'un enseigne l'une des **spécialités** de l'élève.

Le déroulement de l'épreuve

1 Le candidat **prépare** son intervention.



🕒 20 minutes

2 Le candidat **présente** la question puis **y répond**.



🕒 5 minutes

3 **Échange** et **argumentation** avec le jury.



🕒 10 minutes

4 Échange sur le **projet d'orientation** du candidat.



🕒 5 minutes

1

Suites numériques

CAPACITÉS

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.



Au 1^{er} janvier 2019, un particulier installe 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il sait que 1 m² produit 125 kWh par an avec cependant une perte de 3 % par an. La durée de vie de l'installation est estimée à 25 ans.

La rentabilité financière de l'installation est-elle assurée ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 15



Pour retrouver les automatismes

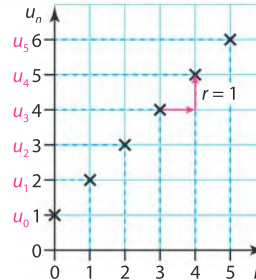
Revoir les acquis de Première

1 Suites arithmétiques

Pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel appelé raison de la suite :

- si la raison r est positive alors la suite (u_n) est **croissante** ;
- si la raison r est négative alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Sa **représentation graphique** sous forme d'un nuage de points dont les coordonnées sont $(n ; u_n)$ constitue une **droite**. On parle alors de croissance linéaire.

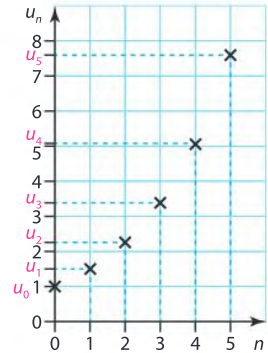


2 Suites géométriques

Pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$ où q est un réel appelé raison de la suite :

- si la raison est **comprise entre 0 et 1** et le premier terme u_0 **positif** alors la suite (u_n) est **croissante** ;
- si la raison q est **supérieure à 1** et le premier terme u_0 **positif** alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Sa **représentation graphique** sous forme d'un nuage de points dont les coordonnées sont $(n ; u_n)$ constitue une **courbe** de type exponentielle.



Questions
Flash

Diaporama

20 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-56

Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 8$. La valeur de u_1 est :	-3	3	$\frac{8}{5}$	13	1
2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$. La valeur de u_1 est :	10	2,5	0,4	-3	2
3. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $q = 0,8$. Cette suite peut modéliser :	une hausse de 8 %	une hausse de 80 %	une baisse de 20 %	une baisse de 2 %	2
4. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et de raison $r = 8$. La valeur de u_2 est :	13	1	-1	2	1
5. Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_2 = -2$ et de raison $q = 3$. La valeur de u_5 est :	-54	54	-18	7	2
6. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $r = 4$. On a :	$u_4 = 18$	$u_4 = 20$	$u_5 = 30$	$u_5 = 26$	1

→ Voir **Corrigé** p. 178

Moyenne arithmétique contre moyenne géométrique

OBJECTIF Comparer deux méthodes de calcul d'une moyenne → Cours 1A, 2A pp. 16 et 18

Une société financière propose à ses clients un « super deal » : s'ils achètent aujourd'hui des actions de l'entreprise APLAT, la société garantit à ses clients les rendements suivants :

+ 50 % la première année et - 40 % de la somme de départ la seconde année.
Antoine décide de se lancer dans l'aventure.

1. Il calcule la moyenne *arithmétique* des deux pourcentages. Quel est le pourcentage moyen trouvé ? Ce pourcentage engage-t-il au placement ?
2. Ayant un doute, Antoine décide de calculer le résultat de son investissement au bout de deux ans à partir d'une mise de départ de 1 000 €.
 - a. Quel est le résultat de cet investissement la première année ? Quel est alors son capital ?
 - b. À partir de la somme globale dont Antoine dispose à la fin de la première année, déterminer la valeur totale de son portefeuille au bout des deux ans.
 - c. Le placement est-il aussi avantageux que promis ? Justifier.
3. a. Déterminer le coefficient multiplicateur a pour la première année.
b. Déterminer le coefficient multiplicateur b pour la deuxième année.
c. Calculer la moyenne *géométrique* des deux nombres a et b .
d. Quel est le taux moyen d'évolution du placement par année ?
4. Quelle est la méthode la mieux adaptée : moyenne arithmétique ou moyenne géométrique ?



Une suite pour la musique

OBJECTIF Exprimer u_n en fonction de n → Cours 1B p. 16

Mathilde a reçu pour étrennes au 1^{er} janvier 2020 la somme de 50 €. Sa mère lui donne aussi 10 € le premier jour de chaque mois. Mathilde décide d'économiser toute l'année afin de s'acheter une guitare au prix de 200 €.

On désigne par u_n la somme dont dispose Mathilde le mois $(n + 1)$ de l'année. Ainsi, $u_0 = 50$ (janvier est le 0 + 1 soit premier mois de l'année).

1. De quelle somme dispose Mathilde au 1^{er} février 2020 ? Quel terme de la suite a-t-on calculé ?
2. De quelle somme dispose Mathilde au 1^{er} mars 2020 ? Quel terme de la suite a-t-on calculé ?
3. À partir des valeurs de u_0 , u_1 et u_2 , conjecturer la nature de la suite (u_n) .
4. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison 10.
 - a. Exprimer le terme u_n en fonction de n .
 - b. Déterminer alors la somme dont dispose Mathilde au 1^{er} mai 2020.
5. Mathilde peut-elle s'offrir sa guitare ? Justifier.



3 Un roi qui « riz »

OBJECTIF Exprimer un terme d'une suite géométrique en fonction de n → Cours 2B p. 18

D'après la légende, c'est en Inde que le jeu d'échecs a été inventé, pour le roi Belkib par le sage Sissa. Le roi, enchanté, décida de récompenser Sissa.

– « Que veux-tu ? », demanda alors le roi au sage.
– « Voyez ce plateau de jeu, offrez-moi un grain de riz sur la première case, puis 2 grains de riz sur la seconde case, 4 grains sur la troisième, 8 sur la quatrième, etc. », répliqua Sissa.

Le roi accepta sans hésitation, persuadé de s'en tirer à bon compte.



1. La suite de nombres 1, 2, 4, 8 semble-t-elle être géométrique ? Si oui, en déterminer la raison et le premier terme.
2. On suppose que sur la n^{e} case, il y a u_n grains de riz. On note u_{n+1} le nombre de grains de riz dans la case suivante.
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. En déduire la nature de la suite (u_n) .
 - c. Exprimer alors u_n en fonction de n . En déduire le nombre de grains de riz disposés sur la 8^e case.
3. Déterminer le nombre de grains de riz que le roi doit offrir à Sissa, sachant que le plateau comporte 64 cases.
4. Sachant qu'un kilogramme de riz compte 60 000 grains de riz, combien Sissa doit-il recevoir de tonnes de riz ?
5. Chercher sur internet la production mondiale de riz et commenter ce résultat.

4 Panneaux photovoltaïques

STI2D

DÉVELOPPEMENT DURABLE

OBJECTIF Déterminer une somme de termes d'une suite géométrique → Cours 2C p. 18

Au 1^{er} janvier 2019, un particulier installe 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il sait que :

- > En France, 1 m² de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 125 kWh/an.
- > La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an.
- > La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kWh.



Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année 2019 + n .

1. a. Déterminer la quantité d'énergie produite en 2019 et celle produite en 2020.
- b. Vérifier que $u_{n+1} = 0,97 \times u_n$.
2. Quelle estimation, à la dizaine de kWh près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2050 ?
3. Que devient la quantité d'énergie produite annuellement au bout d'un grand nombre d'années ?
4. En quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement ?
5. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
 - a. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{24} = \sum_{k=0}^{24} u_k$.
 - b. La rentabilité financière de l'installation est-elle assurée ?

1

Suites arithmétiques

A Moyenne arithmétique de deux nombres

DÉFINITION Soit a et b deux nombres. La **moyenne arithmétique** des deux nombres a et b est donnée par la formule suivante : $\frac{a+b}{2}$.

EXEMPLE • La moyenne arithmétique des deux nombres 5 et 17 est : $\frac{5+17}{2}$ soit 11.

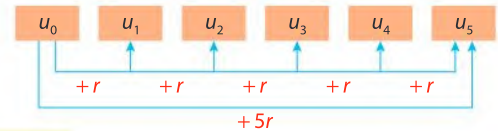
→ Voir **Exercice résolu 1**

B Expression en fonction de n du terme de rang n

DÉFINITION Une **suite arithmétique** est définie de manière récurrente par la donnée d'un terme (très souvent de rang 0 : u_0 ou de rang 1 : u_1) et de sa raison r (r est un réel). Alors, pour tout entier naturel n , on a la relation suivante :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

REMARQUE • L'exploitation de la définition d'une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r sous forme de schéma permet de mieux comprendre comment exprimer, par exemple, u_5 en fonction de 5 :



PROPRIÉTÉ L'expression en fonction de n du terme de rang n est donnée par la formule suivante :

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0 , alors $u_n = u_0 + nr$.
- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1 , alors $u_n = u_1 + (n-1)r$.

→ Voir **Exercice résolu 2**

C Somme des n premiers termes

PROPRIÉTÉ La **somme** des n premiers termes d'une **suite arithmétique** est égale à : $\frac{n \times (\text{1}^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$.

REMARQUES

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0 , alors la somme des n premiers termes de cette suite arithmétique sera :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n(2u_0 + (n-1)r)}{2}.$$

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1 , alors la somme des n premiers termes de cette suite arithmétique sera :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = \frac{n(2u_1 + (n-1)r)}{2}.$$

→ Voir **Exercice résolu 3**

Histoire des maths

Le symbole Σ a été proposé par **Leonhard Euler** en 1755. Euler est un mathématicien suisse du XVIII^e siècle.



Détail d'un billet de 10 francs suisses.

Exercice résolu

1

Calculer une moyenne arithmétique

Un automobiliste roule pendant une heure à la vitesse constante de $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, puis pendant encore une heure à la vitesse constante de $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler pendant la durée totale du trajet pour effectuer le même nombre de kilomètres.

Solution

On utilise la formule $d = v \times t$ dans laquelle d est la distance parcourue et t le temps (la durée). La première heure, la distance parcourue est 90 km et la deuxième heure la distance parcourue est 120 km. La vitesse constante à laquelle l'automobiliste aurait dû rouler est obtenue à partir de : $v = \frac{d}{t} = \frac{90+120}{1+1} = \frac{90+120}{2} = 105$ soit $105 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Méthode Pour calculer une moyenne arithmétique

- 1 On **détermine** la distance parcourue pendant la première heure de trajet puis pendant la 2^e heure de trajet.
- 2 On **détermine** la vitesse moyenne en effectuant la moyenne arithmétique des deux distances parcourues.

→ Voir Exercices 2 et 3 p. 21

Exercice résolu

2

Exprimer en fonction de n le terme de rang n

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Exprimer le terme u_n en fonction de n .
En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50} .

Solution

1. $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$; $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$; $u_3 = u_2 + r = 8 + 3 = 11$.
2. $u_n = u_0 + nr$. Donc $u_n = 2 + 3n$. Donc $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 62$; $u_{50} = 2 + 3 \times 50 = 152$.

→ Voir Exercices 27 à 29 p. 22

Exercice résolu

3

Faire la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 5$.

Déterminer $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

Méthode Pour faire la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

- 1 On **regarde** quel est le premier terme de la suite (ici u_0) et la valeur de la raison r .
- 2 On **détermine** le nombre de termes de cette somme.
- 3 On **calcule** la valeur du dernier terme de cette somme et on utilise la formule.

Solution

Le premier terme est $u_0 = 19$.
Cette somme comporte 11 termes. Attention, la somme commence à $k = 0$ et finit à $k = 10$.

Le dernier terme est : $u_{10} = u_0 + 5n = 19 + 5 \times 10 = 69$.

$$\text{Donc } S_{10} = \frac{11}{2}(19 + 69) = 484.$$

→ Voir Exercices 33 à 35 p. 22

2 Suites géométriques

A Moyenne géométrique de deux nombres

DÉFINITION Soit a et b deux nombres de même signe. La **moyenne géométrique** des deux nombres a et b est donnée par la formule suivante : $\sqrt{a \times b}$.

EXEMPLE • La moyenne géométrique des deux nombres 4 et 9 est $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$.

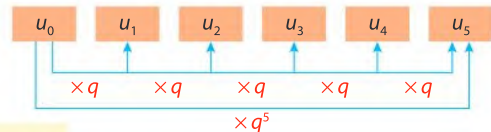
→ Voir **Exercice résolu 4**

B Expression en fonction de n du terme de rang n

DÉFINITION Une **suite géométrique** est définie de manière récurrente par la donnée d'un terme (très souvent de rang 0 : u_0 ou de rang 1 : u_1) et de sa raison q (q est un réel). Alors, pour tout entier naturel n , on a la relation suivante :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

REMARQUE • L'exploitation de la définition d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de sa raison q sous la forme d'un schéma permet de mieux comprendre comment exprimer, par exemple, u_5 en fonction de 5.



PROPRIÉTÉ L'expression en fonction de n du terme de rang n est donnée par la formule suivante :

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0 , alors $u_n = u_0 \times q^n$.
- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1 , alors $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

→ Voir **Exercice résolu 5**

C Somme des n premiers termes

PROPRIÉTÉ La **somme** des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$ est égale à : **1^{er} terme de la somme** $\times \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

REMARQUE

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0 , alors la somme des n premiers termes de cette suite géométrique sera :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1 , alors la somme des n premiers termes de cette suite géométrique sera :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- Si $q = 1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes de cette suite est égale à n .

→ Voir **Exercice résolu 6**

Exercice résolu

4

Calculer une moyenne géométrique

Dans un pays, au mois de janvier, les prix ont augmenté de 0,9 %, puis en février de 1,2 %. Déterminer l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois.

Solution

$$CM_1 = 1 + \frac{0,9}{100} = 1,009. \quad CM_2 = 1 + \frac{1,2}{100} = 1,012.$$

$$CM = \sqrt{CM_1 \times CM_2} = \sqrt{1,021108} \approx 1,0105.$$

L'augmentation mensuelle est : $1,0105 - 1 = 0,0105$ soit une augmentation de 1,05 %.

Méthode Pour calculer une moyenne géométrique

- 1 On **détermine** le coefficient multiplicateur (CM) relatif à l'augmentation du mois de janvier et du mois de février.
- 2 On **détermine** l'augmentation mensuelle constante en effectuant la moyenne géométrique des deux coefficients multiplicateurs précédents.

→ Voir Exercices 14 et 15 p. 21

Exercice résolu

5

Exprimer en fonction de n le terme de rang n

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Exprimer pour tout entier n le terme u_n en fonction de n .
3. En déduire les valeurs de u_7 , u_{11} et u_{19} .

Solution

1. $u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$; $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$; $u_3 = u_2 \times q = 12 \times 2 = 24$.
2. $u_n = u_0 \times q^n$. Donc $u_n = 3 \times 2^n$.
3. $u_7 = 3 \times 2^7 = 384$; $u_{11} = 3 \times 2^{11} = 6\,144$; $u_{19} = 3 \times 2^{19} = 1\,572\,864$.

Méthode Pour exprimer en fonction de n le terme de rang n

- 1 On **regarde** quel est le premier terme de la suite (ici u_0) et la valeur de la raison q .
- 2 On **utilise** la formule $u_n = u_0 \times q^n$.
- 3 On **remplace** n par 7 puis 11 puis 19 dans la formule précédente.

→ Voir Exercices 37 à 41 p. 23-24

Exercice résolu

6

Faire la somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{9}$ et de raison $q = 3$.

$$\text{Déterminer } S_8 = \sum_{k=0}^8 u_k.$$

Solution

Le premier terme est $u_0 = \frac{1}{9}$. Cette somme comporte 9 termes. Attention, la somme commence à $k = 0$ et finit à $k = 8$.

$$\text{Donc } S_8 = u_0 \times \frac{1 - q^9}{1 - q} = \frac{1}{9} \times \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = \frac{9\,841}{9}.$$

Méthode Pour faire la somme des n premiers termes d'une suite géométrique

- 1 On **détermine** le nombre de termes de cette somme de 1er terme u_0 .
- 2 On **utilise** la formule : 1^{er} terme de la somme $\times \frac{1 - q^n}{1 - q}$ ($q \neq 1$).

→ Voir Exercices 43 à 45 p. 24

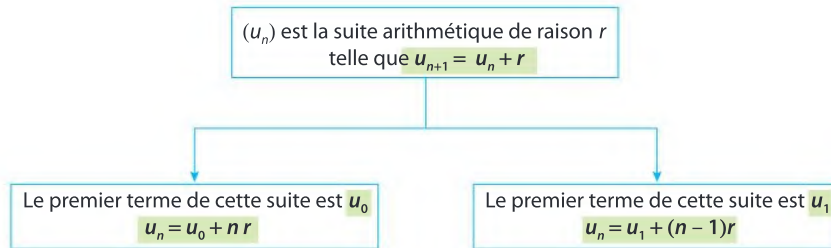
1 Suites arithmétiques

● Moyenne arithmétique

Soit deux nombres a et b ; la moyenne arithmétique de a et b est : $\frac{a+b}{2}$.

EXEMPLE • Mathilde a obtenu 15 et 17 en mathématique, sa moyenne arithmétique est : $\frac{15+17}{2}$ soit 16.

● Expression en fonction de n du terme de rang n



● Somme des n premiers termes

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à :

$$\frac{n(\text{1er terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$$

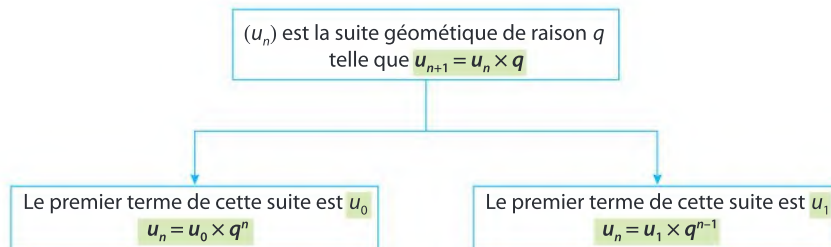
2 Suites géométriques

● Moyenne géométrique

Soit deux nombres a et b de même signe ; la moyenne géométrique de a et b est $\sqrt{a \times b}$.

EXEMPLE • La moyenne géométrique des deux nombres 5 et 6 est $\sqrt{5 \times 6} = \sqrt{30}$.

● Expression en fonction de n du terme de rang n



● Somme des n premiers termes

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à :

$$\text{1er terme de la somme} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

REMARQUE • Si $q = 1$ alors cette somme est égale à n .

1 Questions Flash

Diaporama

20 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-57

Moyenne arithmétique de deux nombres

2 Un élève a obtenu deux notes : 9 et 14. Quelle est la moyenne de ses deux notes ?

3 Un élève a participé à deux contrôles. Sa première note est 17 et sa moyenne est 15. Quelle est sa seconde note ?

Trois nombres sont (ou non) les termes consécutifs d'une suite arithmétique

Dans les exercices 4 à 7, dire si les nombres proposés sont les trois premiers termes d'une suite arithmétique. Si c'est le cas, donner la valeur de la raison r .

4 1, 6 et 11.

6 12, 4 et -4.

5 7, 5 et 1.

7 19, 14 et 17.

Raison d'une suite arithmétique modélisant une évolution

Dans les exercices 8 et 9, modéliser l'évolution proposée par une suite arithmétique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison r .

8 Dans une pisciculture, un pêcheur met 50 truites dans un étang vide. Il y a 100 naissances par an.

9 Clara a acheté une télévision au prix 750 €. Son assureur lui annonce que sa télé perd 40 € de sa valeur tous les ans.

Expression en fonction de n du terme de rang n d'une suite arithmétique

Dans les exercices 10 et 11, exprimer en fonction de n le terme de rang n de la suite proposée.

10 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.

11 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison $r = -8$.

Somme des n premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique

12 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

13 (u_n) est la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$
Calculer $S = \sum_{k=1}^{19} u_k$.

Moyenne géométrique de deux nombres

14 Déterminer la moyenne géométrique des deux nombres 4 et 16.

15 Le prix d'un vêtement baisse de 15 % la première semaine puis de 10 % la deuxième semaine. Quel est le pourcentage moyen de baisse ?

Trois nombres sont (ou non) les termes consécutifs d'une suite géométrique

Dans les exercices 16 à 19, dire si les nombres proposés sont les trois premiers termes d'une suite géométrique. Si c'est le cas, donner la valeur de la raison q .

16 7, 14 et 28.

18 -9, -27 et -81.

17 20, -10 et 5.

19 1, 0 et 2.

Raison d'une suite géométrique modélisant une évolution

Dans les exercices 20 et 21, modéliser l'évolution proposée par une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison r .

20 Un influenceur a 450 000 followers. Tous les mois, il perd 6 % de ses abonnés.

21 Une entreprise produit 50 000 produits. Tous les ans, elle augmente sa capacité de production de 15 %.

Expression en fonction de n du terme de rang n d'une suite géométrique

Dans les exercices 22 et 23, exprimer en fonction de n le terme de rang n de la suite proposée :

22 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

23 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $q = 0,5$.

Somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

24 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = 2$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{11}$.

25 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 7$. Calculer $S = \sum_{k=0}^9 u_k$.

Expression en fonction de n du terme de rang n (suite arithmétique)

→ Aide **Cours 18** p. 16

Question de cours

26 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

1. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n et r .
2. Pour un entier n , exprimer u_n en fonction de n .

27 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .
2. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .
3. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Donner alors les valeurs de u_{10} , u_{17} et u_{23} .

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 17

28 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 31$ et de raison $r = -4$.

1. Pour tout entier naturel $n \neq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .
2. Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
3. Pour tout entier $n \neq 0$, exprimer u_n en fonction de n .
4. Donner alors les valeurs de u_9 , u_{18} et u_{24} .

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 17

29 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = -80$ et de raison $r = 10$.

1. Pour tout entier naturel $n \neq 0$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et r .
2. Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
3. Pour tout entier $n \neq 0$, exprimer u_n en fonction de n .
4. Donner alors les valeurs de u_7 , u_{10} et u_{14} .
5. Quel est le rang du terme égal à 80 ? Justifier.

Vrai ou faux

30 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

(u_n) est la suite récurrente définie par : $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 8$.

1. (u_n) est une suite arithmétique.
2. $u_1 = 12$.
3. $u_4 = 28$.
4. $u_{12} = 100$

31 Mathilde place à la banque un capital de 300 €. Chaque année, son capital augmentera avec un taux à intérêt fixe. Ce taux est égal à 5 % de la somme placée au départ.

1. Calculer les intérêts annuels fixes.
2. On note (u_n) le capital de Mathilde n années après avoir déposé son argent à la banque.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme u_0 et sa raison r .

3. Démontrer que $u_1 = 315$ et $u_2 = 330$, puis calculer u_3 .
4. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .
5. Au bout de combien d'années le capital de Mathilde aura-t-il doublé ?

Somme des n premiers termes (suite arithmétique)

→ Aide **Cours 10** p. 16

Question de cours

32 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Démontrer que $u_0 + u_1 + \dots + u_7 = 4(u_0 + 7r)$.

33 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 7 - 3n$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison de la suite.
3. Quelle est la valeur du 51^e terme ?
4. Calculer la somme des 51 premiers termes.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 17

34 On veut réaliser un forage de 120 m. Le premier mètre coûte 20 €, le 2^e mètre coûte 25 €, le 3^e coûte 30 €... ainsi de suite en augmentant de 5 € à chaque nouveau mètre.



1. Combien coûte le 120^e mètre ?
2. Quel est le coût total du forage ?

35 Le loyer annuel d'un appartement coûte 6 500 € à l'entrée dans les lieux en 2018. Chaque année, le loyer annuel augmente de 150 €. On modélise le prix des loyers annuels par une suite arithmétique (u_n) .

On note u_0 le loyer annuel (en euros) payé en 2018. On note u_n le prix du loyer annuel (en euros) pendant l'année 2018 + n .

1. Exprimer le terme u_n en fonction de n .
2. En déduire la valeur du loyer en 2025.
3. Calculer la somme des 11 premiers loyers.
4. Le couple locataire avait envisagé d'acheter une maison pour un budget de 200 000 € avant de se décider à louer l'appartement. En quelle année la somme des loyers dépassera-t-elle les 200 000 € ?

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 17

Expression en fonction de n du terme de rang n (suite géométrique)

→ Aide Cours 28 p. 18

Question de cours

36 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

1. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n et q .
2. Pour un entier n , exprimer u_n en fonction de n .

37 La population actuelle augmente de 1 % par an. En 2010, elle était de 6,9 milliards. On note u_n la population mondiale l'année 2010 + n .

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme u_0 et sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. En supposant que le taux d'accroissement se maintienne, estimer la population mondiale en 2025.
4. À l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année les 9 milliards d'habitants seront atteints.

→ Voir Exercice résolu 5 p. 19

38 ALGO Compléter un algorithme

En 2017, des scientifiques ont estimé la masse totale de déchets plastiques dans les océans à 300 millions de tonnes et ont prévu une augmentation de 5,4 % par an au cours des prochaines années.



On modélise l'évolution de la masse totale de ces déchets plastiques, si rien n'est fait pour la réduire, par une suite géométrique (u_n) de raison 1,054 et de 1^{er} terme $u_0 = 300$. L'arrondi au centième du terme u_n représente la masse totale de ces déchets, exprimée en million de tonnes, pour l'année $(2017 + n)$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. On souhaite déterminer en quelle année la masse totale de ces déchets plastiques aura pour la première fois augmenté de 50 % par rapport à sa valeur de 2017.

- a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable N contienne la réponse au problème posé.
- b. Que contiennent les variables U et N après exécution de cet algorithme ? Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

```
N ← 2017
U ← 300
Tant que U < ...
  N ← ...
  U ← ...
Fin Tant que
```

→ Voir Exercice résolu 5 p. 19

39 STI2D ALGO PYTHON Exécuter un algorithme

On décide de modéliser l'évolution de la production mondiale des énergies renouvelables à l'aide d'une suite géométrique de raison 1,026. Pour tout entier naturel n , on note u_n la production mondiale des énergies renouvelables, en milliards de TEP (tonnes équivalent pétrole), pendant l'année $(2015 + n)$. Ainsi (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1,82$ et de raison 1,026.

1. Exprimer le terme général u_n en fonction de l'entier n .
2. Déterminer, d'après ce modèle, une estimation de la production mondiale des énergies renouvelables en 2020.
3. Selon l'Agence d'information sur l'énergie des États-Unis d'Amérique (EIA), l'approvisionnement pétrolier mondial a été, en 2016, d'environ 4,84 milliards de tonnes. On donne l'algorithme suivant :

```
u=1.82
k=0
while u<4.84:
    u=u*1.026
    k=k+1
print(k)
```

- a. Exécuter cet algorithme.
- b. Quelle valeur la variable k contient-elle ?
- c. Interpréter, dans le contexte étudié, cette valeur.
- d. Modifier l'algorithme précédent afin d'afficher le contenu de la variable u . Interpréter alors la valeur de u .

→ Voir Exercice résolu 5 p. 19

40 STL ALGO PYTHON Programmer un algorithme

On administre à un patient un médicament par voie intraveineuse. La concentration du produit actif est quasi immédiatement maximale après l'injection, puis elle diminue de 3 % par minute. On notera C_0 la concentration à l'instant $t = 0$ minute et C_n la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ au bout de n minutes. On pose $C_0 = 1$.

1. Justifier que la suite (C_n) est géométrique. Préciser sa raison.
2. Exprimer C_n en fonction de n .
3. En résolvant une inéquation, déterminer à partir de quelle valeur de n la concentration du produit actif aura diminué de moitié.

4. On considère le 1^{er} algorithme suivant en langage Python :

```
k=1
for i in range (5):
    i=i+1
    k=0.97*k
print(k)
```

- a. Quelle est la valeur k affichée à l'issue de l'exécution de cet algorithme ? On arrondira à 0,0001.
- b. Quelle interprétation peut-on donner de cette valeur de k en termes de concentration du médicament ?
5. On considère maintenant l'algorithme ci-contre.
- a. Expliquer pourquoi cet algorithme exécutera plus de 5 itérations de la boucle « Tant que ».
- b. Le programmer. Quel résultat l'exécution de cet algorithme permet-elle de retrouver ?

```
k=1
i=0
while k>0.5:
    i=i+1
    k=0.97*k
print(i)
```

QCM

41  Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Un zoologiste étudie l'évolution de la population d'une espèce animale dans un secteur géographique délimité. Il a observé depuis 2010 que cette population diminue chaque année en moyenne de 5 %.

Le 1^{er} mars 2018, la population compte 2 375 individus. Le zoologiste émet l'hypothèse que cette baisse annuelle de 5 % va se poursuivre jusqu'en 2025.

1. Le nombre d'individus de la population au 1^{er} mars 2022 est estimé, à la dizaine près, à :

- a. 1 840 b. 1 930 c. 2 040 d. 2 890

2. Le nombre d'individus au 1^{er} mars 2017 était de :

- a. 2 300 b. 2 400 c. 2 500 d. 2 600

3. Le zoologiste souhaite connaître l'année à partir de laquelle la population aura diminué de plus de 25 % par rapport à sa valeur de 2018.

Parmi les quatre algorithmes suivants, celui pour lequel le contenu de la variable n fournit, après exécution, l'information souhaitée est :

- a. $n=2018$
 $v=2375$
 while $v >= 0.75 * v$:
 $v = v - 0.05 * v$
 $n = n + 1$
 print (n)
- b. $n=2018$
 $v=2375$
 while $v >= 0.75 * 2375$:
 $v = 0.95 * v$
 $n = n + 1$
 print (n)
- c. $n=2018$
 $v=2375$
 while $v <= 0.75 * 2375$:
 $v = 0.95 * v$
 $n = n + 1$
 print (n)
- d. $u=1.82$
 $k=0$
 while $u < 4.84$:
 $u = u * 1.026$
 $k = k + 1$
 print (k)

4. L'année à partir de laquelle la population aura diminué de plus de 25 % par rapport à sa valeur de 2018 est :

- a. 2020 b. 2022 c. 2024 d. 2026

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 19

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique → Aide **Cours 2C** p. 18

Question de cours

42 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q avec $q \neq 1$.

Démontrer que $u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$.

43 Une horloge sonne toutes les heures, de 1 coup à 1 heure du matin à 24 coups à minuit. Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

44 Nous avons tous 2 parents, 4 grands-parents, 8 arrière-grands-parents, etc. en supposant que nous appartenons à la génération 1, que nos parents appartiennent à la génération 2, nos grands-parents à la génération 3, etc.

1. Combien d'ancêtres figurent à la génération 10 ?

2. Si on pouvait remonter jusqu'en l'an 1000 (soit environ à la 40^e génération), combien y aurait-il d'individus au total sur l'arbre généalogique (de la 1^{re} génération c'est-à-dire nous, jusqu'à la 40^e génération comprise) ? Que penser de ce résultat ?

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 19

45 Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = 7$ et sa raison est égale à 3.

1. Calculer les 3 premiers termes qui suivent u_0 .

2. Calculer u_9 .

3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$.

4. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_7$.

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 19

46 Modifier un algorithme

En décembre 2017, Malik emprunte 5 000 € à ses parents pour acheter une voiture. Il décide de les rembourser le premier jour de chaque mois. Le 1^{er} janvier 2018, il effectue un premier versement de 100 €. Pour limiter la durée du prêt, il décide ensuite d'augmenter les versements de 2 % chaque mois.

1. Quel montant verse-t-il le 1^{er} février 2018 ?

2. On modélise la situation par une suite u . On note u_n le montant versé le nième mois. On a donc $u_1 = 100$.

a. Justifier que la suite u est géométrique, préciser sa raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n .

c. Calculer, à 0,01 près, le montant que Malik versera le 1^{er} décembre 2018.

d. Malik aura-t-il remboursé un quart de ce qu'il doit à ses parents le 30 décembre 2018 ?

3. On considère l'algorithme suivant :

a. Que fait cet algorithme ?

b. Le modifier et le programmer pour

qu'une exécution de cet algorithme per-

mette de remplir le tableau ci-dessous

(après l'avoir recopié) avec les premières

valeurs successives prises par les variables

u et S . On arrondira les résultats au centime.

```
n=1
u=100
S=100
while n<4:
    n=n+1
    u=1.02*u
    S=S+u
print(S)
```

Valeurs de n	1	2	3	4
Valeurs de u	100			
Valeurs de S	100			

c. Que représente le nombre inscrit dans la cellule grisée ?

d. À l'aide de la formule permettant de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, vérifier le résultat obtenu.

Expression en fonction de n du terme de rang n (suite arithmétique)

47 Un tableur fournit les valeurs ci-contre :

	A	B
1	$n+1$	$an+1$
2	0	-6
3	1	-3
4	2	0

1. Les nombres -6 , -3 et 0 sont-ils les trois premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Conjecturer alors la valeur de la raison r de cette suite et la valeur de son premier terme.

2. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

3. Donner alors les valeurs de u_5 , u_{12} et u_{25} .

48 **ALGO** **PYTHON** **Tester un programme**
Voici une fonction U en langage Python.

```
u=5
for n in range (10):
    u=u+4
    print (u)
```

1. Définir par récurrence la suite (u_n) dont cette fonction permet de calculer les termes. On considérera que le premier terme de cette suite est u_0 .

2. Saisir ce programme. Que représentent les résultats affichés ?

3. Pour tout entier n , exprimer u_n en fonction de n .

4. En déduire la valeur de u_{15} .

5. Modifier ce programme afin de pouvoir vérifier la valeur trouvée pour u_{15} .

49 **ALGO** **PYTHON** **Écrire un programme**
 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison $r = 0,5$.

1. Écrire en Python un programme permettant de calculer u_{10} , u_{15} et u_{30} .

2. Après avoir exprimé le terme u_n en fonction de n , vérifier par le calcul les résultats obtenus.

50 **STMG** Sofia place un capital initial $C_0 = 3\,000$ € à un taux annuel de 6% , les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).

On note C_n le capital de Sofia au bout de n années, capital exprimé en euros.

1. Montrer que, pour tout entier n , $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on ?

2. Pour tout entier n , exprimer C_n en fonction de n .

3. De quel capital Sofia dispose-t-elle au bout de 10 ans ?

4. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé ?

5. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il $10\,000$ € ?

Somme des n premiers termes (suite arithmétique)

51 **STI2D** Une entreprise, spécialisée dans la confection de chaises, doit fabriquer pour un de ses clients, qui dirige une chaîne d'hôtels, $12\,000$ chaises.

Elle commence à expédier, au mois de janvier 2020, 600 chaises. Pour répondre à la demande de son client plus rapidement, cette entreprise décide de produire 50 chaises de plus par mois. On note p_n la quantité de chaises produite le n ème mois. Ainsi $p_1 = 600$.



1. Calculer p_2 et p_3 .

2. Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Préciser le premier terme et la raison de cette suite.

3. Exprimer le nombre de chaises produites le n ème mois en fonction de n .

4. En déduire le nombre de chaises produites entre le mois de janvier 2020 et le n ème mois.

5. En déduire au bout de combien de temps l'entreprise aura terminé la commande de son client.

52 En ce début d'année, Rémy a pris de bonnes résolutions. Il a décidé d'arrêter de fumer. Il fume 140 cigarettes par semaine et va réduire progressivement sa consommation hebdomadaire de 4 cigarettes chaque semaine.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par une suite arithmétique.

2. On note (u_n) cette suite. En déterminer le premier terme u_0 et la raison.

3. Combien de cigarettes fume Rémy après 5 semaines d'efforts ?

4. Au bout de combien de semaines Rémy aura-t-il complètement arrêté la cigarette ?

5. Entre le moment où Rémy a décidé de faire des efforts et le moment où il a enfin arrêté de fumer, combien de cigarettes aura-t-il fumé en tout ?

53 Un nouveau parking souterrain vient d'ouvrir en centre-ville. Le premier jour de son exploitation, on constate une fréquentation de 350 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans ce parking de 10 voitures supplémentaires chaque jour.

1. Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

2. Le parking peut accueillir un total de $1\,500$ voitures. Au bout de combien de jour sera-t-il saturé ?

3. Le coût de stationnement d'une voiture est en moyenne 8 € par jour. Combien la société exploitant ce parking aura-t-elle gagné quand le parking sera à saturation ?

54 On dispose d'un crédit de 414 000 € pour atteindre dans le désert une nappe phréatique. Le coût du forage est fixé à 1 000 € pour le premier mètre creusé, 1 200 € pour le deuxième, 1 400 € pour le troisième et ainsi de suite...

On pose $u_0 = 1\,000$, $u_1 = 1\,200$ et $u_3 = 1\,400$.

u_n désigne le coût en euros du $(n+1)$ -ième mètre creusé.

1. De quel type de suite les trois termes u_0 , u_1 et u_2 semblent-ils être les trois premiers termes consécutifs ?

2. Calculer u_5 .

3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

4. En déduire la nature de la suite (u_n) . La conjecture émise en 1. est-elle correcte ?

5. Exprimer u_n en fonction de n .

6. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres.

a. Déterminer le coût total d'un puits de n mètres en fonction de n .

b. Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414 000 €.

Expression en fonction de n du terme de rang n (suite géométrique)

55 On s'intéresse au recyclage des emballages ménagers en plastique issus de la collecte sélective (EMPCS). Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016. Cette masse est exprimée en millier de tonnes et arrondie au millier de tonnes.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Masse d'EMPCS recyclés	229	243	250	256	266	282

Source : <http://www.statistiques.developpement-durable.gouv.fr>

1. Justifier que le taux d'évolution global de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016, exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité, est de 23 %.

2. En déduire le taux d'évolution annuel moyen de la masse d'EMPCS recyclés entre 2011 et 2016.

3. Les nombres 229, 243 et 250 sont-ils les premiers termes d'une suite arithmétique ? géométrique ?

On fait l'hypothèse qu'à partir de 2016, le taux d'évolution annuel de la masse d'EMPCS recyclés est constant et égal à 4,2 %.

La masse d'EMPCS recyclés au cours de l'année $(2016 + n)$, exprimée en millier de tonnes, est modélisée par le terme de rang n d'une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 282$.

4. Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.

5. Exprimer u_n en fonction de l'entier n .

6. En déduire une estimation de la masse d'EMPCS recyclés en 2019.

56

STL ALGO PYTHON

Interpréter un algorithme

Une solution contient initialement 5 millions de bactéries par mL. Toutes les 10 minutes, la concentration en bactéries augmente de 15 %.

1. Pour tout entier naturel n , on note c_n la concentration en bactéries en millions par mL au bout de n dizaines de minutes.

a. Quelle est la nature de la suite (c_n) ? En préciser le premier terme et la raison.

b. Vérifier qu'au bout d'une heure et demie, la concentration des bactéries en millions par mL, est égale à 17,6 (valeur arrondie à 0,1).

c. En précisant la démarche, déterminer au bout de combien de minutes la concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL.

2. Les phages sont des virus infectant les bactéries ; ils peuvent donc servir d'agents antibactériens. Le but de l'exercice est d'étudier l'action de phages sur une population de bactéries.



On introduit des phages au bout de 90 minutes. Cette introduction de phages provoque une diminution globale de la concentration en bactéries de 40 % toutes les dix minutes. On souhaite connaître le temps nécessaire pour que la concentration en bactéries devienne inférieure à 10 % de la concentration initiale. Pour ce faire, on utilise l'algorithme ci-dessous.

a. Que représentent les valeurs 17,6 et 0,5 figurant dans l'algorithme par rapport à la situation concrète proposée ?

b. Quelles sont les valeurs affichées par l'algorithme en sortie ? Comment les interpréter ?

```
C=17.6
I=0
while C>0.5:
    I=I+1
    C=C*0.6
print(I)
print(C)
```

57

ALGO PYTHON

Lire un algorithme

À partir du 1^{er} janvier 2019, Alice a décidé de travailler son endurance à la course à pied.

Pour cela, elle va s'entraîner régulièrement. Tous les mois, elle note ses performances afin d'évaluer ses progrès.

Alice suit l'évolution des distances parcourues. Au mois de janvier 2019, la distance qu'elle est capable de courir en une fois est égale à 10 km et cette distance courue en une fois augmente tous les mois de 6 %.

Pour tout entier naturel n , on appelle d_n la distance, en kilomètres, qu'Alice est capable de courir en une fois le n ème mois après le mois de janvier 2019. Ainsi, $d_0 = 10$.

1. Justifier que $d_1 = 10,6$.

2. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Préciser les éléments caractéristiques de cette suite.

3. Exprimer, pour tout entier naturel n , d_n en fonction de n .

4. Déterminer la distance qu'est capable de courir Alice en une fois au mois de septembre 2019. On donnera la valeur arrondie à 0,1 km.
5. Au bout de combien de mois Alice sera-t-elle capable de courir en une fois 25 km ? Justifier.

Somme des n premiers termes (suite géométrique)

58 STI2D ALGO PYTHON Écrire un programme

Une éolienne est un générateur qui produit du courant électrique à partir de l'énergie cinétique du vent.



Une entreprise européenne fabrique des pales d'éoliennes. Son service de presse a publié un article en janvier 2017 dont voici un extrait : « Une de nos usines, située en Espagne, a produit au total plus de 40 000 pales d'éoliennes de 2001 à 2016. » On dispose également des données suivantes sur la production de l'usine espagnole :

Année	Quantité de pales produites
2001	800
2008	2 002

On examine maintenant une modélisation de la production par la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 800$ et de raison q .

- En utilisant les données du tableau, on constate alors que $v_7 = 2\,002$. Déterminer la valeur de la raison q de cette suite géométrique (donner une valeur approchée à 10^{-2} près).
- On admet que $q = 1,14$. Exprimer alors v_n en fonction de n .
- Calculer v_7 . On donnera le résultat arrondi à l'unité.
- Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$. On donnera le résultat arrondi à l'unité.

Réaliser un programme en langage Python permettant la réalisation de ce calcul.

5. Peut-on modéliser par la suite (v_n) la production, depuis 2001, de pales d'éoliennes de l'usine espagnole ? Justifier la réponse.

- 59 STMG En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000.

Souhaitant que ce nombre diminue fortement, le maire fait voter en conseil municipal une loi instaurant une amende de 160 € par mégot laissé par terre.

Des statisticiens ont prévu, sur une période de 10 ans, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15 % par an grâce à cette amende.

Sous cette hypothèse, pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre de mégots jetés par terre pendant l'année 2019 + n . Ainsi, u_0 est le nombre de mégots jetés par terre en 2019. On a $u_0 = 20\,000$.

- Justifier par le calcul que $u_1 = 17\,000$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
- Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
 - Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - Calculer le nombre de mégots qui, selon ce modèle, seraient jetés par terre en 2028. Arrondir le résultat à l'unité.
- Le maire souhaite savoir combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028.
 - Exprimer la somme que le maire doit effectuer pour trouver ce nombre en fonction des termes de la suite (u_n) .
 - Trouver alors le nombre de mégots ramassés.

60 ALGO PYTHON Exécuter un programme

Une entreprise produisait 30 tonnes de déchets non recyclables en 2015. L'entreprise a voulu diminuer la masse de déchets non recyclables de 3 % par rapport à l'année précédente. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on note p_n la masse de déchets non recyclables à l'année 2015 + n .

- Justifier que (p_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme p_0 et la raison.
- Exprimer p_n en fonction de n .
- Quelle sera la masse de déchets non recyclables en 2026 ? On donnera la valeur arrondie au kilogramme.
- Un programme écrit en langage Python est donné ci-dessous :

```
S=30
n=0
while S<=300:
    u=0.97*u
    S=S+u
    n=n+1
print(2015+n)
```

Le saisir. Quelle est la valeur du résultat affiché ?

- À l'aide de la formule permettant de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, vérifier le résultat obtenu.
- Que représente la valeur donnée par Python dans le contexte de l'exercice ?



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et telle que $u_4 = 81$.

	V	F
61 Le premier terme u_0 de la suite (u_n) est : 72.		
62 Le terme de rang n de cette suite en fonction de n est : $u_n = 69 + 3n$.		
63 $u_{10} = 100$.		
64 $\sum_{k=0}^{20} u_k = 1\,950$.		

Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_1 = 6$.

	V	F
65 La valeur de v_6 arrondie au dixième est : 14,9.		
66 Le terme de rang n de cette suite en fonction de n est : $v_n = 6 \times 1,2^n$.		
67 Au dixième près, la valeur de v_8 est : 25,8.		
68 Au centième près, $\sum_{k=1}^{10} v_k = 155,75$.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Une espèce d'oiseaux rares voit sa population diminuer de 3 % chaque année. On recense 300 oiseaux de cette espèce en 2017. On modélise le nombre d'oiseaux de cette espèce en l'année 2017 + n par une suite (u_n) . Ainsi $u_0 = 300$.

- 69** En 2018, la population sera de :
- a. 291 oiseaux. b. 297 oiseaux. c. 210 oiseaux.
- 70** La suite (u_n) est :
- a. arithmétique de raison -9. b. géométrique de raison 0,03. c. géométrique de raison 0,97.
- 71** L'expression de u_n en fonction de n est :
- a. $u_n = 300 + 0,03n$ b. $u_n = 300 \times 0,97^n$ c. $u_n = 300 \times 1,03^n$
- 72** Le terme u_{10} donne le nombre d'oiseaux en :
- a. 2028 b. 2027 c. 2026
- 73** À l'unité près, le terme u_{10} est égal à :
- a. 228 b. 221 c. 215
- 74** On donne la feuille de tableur ci-contre. La formule à saisir dans la cellule B3 permettant d'afficher, en l'étirant vers le bas, les termes successifs de la suite (u_n) est :
- a. =B2*0,03 b. =B2*0,97^A3 c. =B2*0,97

	A	B
1	n	u_n
2	0	300
3	1	
4	2	

→ Vérifier les résultats p. 178

75 In English



Antoine, a young French trader, wants to work in the City (London).

He has applied for a job in two companies, has been interviewed, and has finally been offered a job in both companies. Now he has to choose between the two job offers. Conditions of the job offer:

Company	A	B
Start of the contract	01/01/2019	01/01/2019
Monthly salary	£ 4,500	£ 4,200
Each year, on the 1 st of January, the monthly salary increases by	£ 60	3 %

1. Model the salary of each offer.
2. What will Antoine's annual salary be in 2028 if he chooses company A?
3. When will Antoine's annual salary reach 60,000 if he chooses company B?
4. Antoine plans to stay for eight years in London. Figure out which job offer would be the most interesting for him.

Vrai ou faux

76 COMPÉTENCE S'appropriier, raisonner

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 400$ et $u_{n+1} = 0,4 \times u_n + 12$ et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 20$.

1. La valeur de u_2 est 80,8.
2. La valeur de v_1 est 125.
3. La suite (u_n) est une suite arithmétique.
4. La suite (v_n) est une suite géométrique.
5. Pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 380 \times 0,4^n$.

77 COMPÉTENCE Valider, communiquer

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

1^{er} contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 5 euros par mois jusqu'à la fin du bail.
2^e contrat : un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36^e mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs.)

QCM

78 COMPÉTENCE S'appropriier, analyser

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse, puis justifier.

Dans le cadre d'une étude économique, une hypothèse retenue sur l'évolution du montant mensuel brut du SMIC pour 35 heures de travail hebdomadaire est, qu'entre 2017 et 2025, ce montant augmente de 1 % par an. Ce montant mensuel est modélisé par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1\,480,27$ (SMIC brut en euros en 2017, source INSEE).

L'entier n désigne le rang de l'année $(2017 + n)$.

1. Pour tout entier naturel n , une expression de u_n est :

- a. $u_n = 1\,480,27 \times 1,01^n$ b. $u_n = 1\,480,27 + 0,01n$
c. $u_n = 1\,480,27 \times 0,01^n$ d. $u_n = 1\,480,27 + 1,01n$

2. Avec ce modèle, une estimation du montant mensuel brut du SMIC en 2022 est :

- a. 1 540,37 € b. 1 554,28 € c. 1 555,78 € d. 1 571,34 €.

3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables n et u , après exécution du programme, contiennent :

```

n=0
u=1480.27
while u<1600:
    n=n+1
    u=u*1.01
print (n,u)

```

- a. $n = 8$ et $u = 1\,600$
b. $n = 7$ et $u = 1\,602,92$
c. $n = 5$ et $u = 1\,480,27$
d. $n = 8$ et $u = 1\,602,92$

4. Au centième près, une personne payée au SMIC aura gagné du 1^{er} janvier 2017 au 31 décembre 2025 la somme de :

- a. 147 180,35 € b. 128 135,76 €
c. 137 230,45 € d. 12 265,03 €

79



COMPÉTENCE Réaliser, raisonner

Mouna a reçu 80 000 € en héritage. Elle décide de placer cette somme et trouve un placement au taux de 6 %. Mais chaque année, elle doit retirer 4 000 € pour payer les impôts dus à ce placement. On appelle C_n le capital acquis au bout de n années de placement.

1. Expliquer pourquoi (C_n) vérifie la relation suivante :

$$C_{n+1} = 1,06 \times C_n - 4\,000.$$

2. Calculer à la calculatrice les premiers termes de cette suite. Est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. On considère la suite auxiliaire (U_n) définie par :

$$U_n = C_n - 50\,000.$$

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

b. Exprimer U_n puis C_n en fonction de n .

c. De quelle somme Mouna disposera-t-elle au bout de 5 ans ?

d. Mouna veut acheter une maison à 180 000 €. Combien d'années devra-t-elle attendre avant de disposer de cette somme ?

► Le permis de conduire

CAPACITÉ Savoir prendre une décision entre deux propositions en justifiant.

Chloé, âgée de 15 ans au 1^{er} janvier 2019, réside dans une agglomération française.

Pour anticiper le financement de son permis de conduire, elle décide de placer sur un produit d'épargne ses 600 euros d'économies à partir du 1^{er} janvier 2019.

Information 1 : conditions de souscription du livret jeune

- Montant maximum de placement : 1 600 euros.
- Taux d'intérêt annuel de 2,75 % (proposé par sa banque).
- Avoir entre 12 et 25 ans.
- Résider en France.
- Montant minimum à l'ouverture : 10 euros.

Information 2 : coût moyen du permis de conduire

- La loi impose un minimum de 20 heures de conduite avant de se présenter au permis.
- Une enquête de la CLCV (Consommation, Logement et Cadre de Vie) menée au printemps 2019 auprès de 665 auto-écoles souligne que ce forfait de 20 heures est facturé du simple au double selon les régions.
- Par ailleurs, même si le minimum imposé par la loi est de vingt heures de conduite, il en faut plutôt trente en moyenne.
- Ainsi, en comptant les frais de dossier, il est préférable de prévoir un budget de 1 500 euros.

1. Expliquer pourquoi Chloé remplit les conditions permettant de souscrire au livret jeune.

2. On modélise le placement de Chloé par une suite (u_n) de premier terme u_0 correspondant au placement de Chloé.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n) . On précisera la valeur de u_0 et de la raison q .

b. Pour tout entier n , exprimer le terme u_n en fonction de n .

c. Chloé aura-t-elle la somme nécessaire pour passer son permis au 1^{er} janvier 2022 ?



En salle informatique



lienmini.fr/10445-59

Chloé aura besoin de 1 500 euros pour financer son permis. Ses parents lui conseillent de verser chaque mois sur le livret la somme supplémentaire de 25 euros, à partir du 1^{er} février 2019. Ils lui expliquent que le taux annuel du livret jeune correspond à un taux mensuel de 0,226 %. Ses parents lui conseillent d'utiliser un tableur afin de simuler l'évolution de son épargne.

Voici le tableau imaginé par Chloé :

Aide pour le tableur :

– dans la colonne A, à partir de la cellule A2 choisir, comme format de cellule, une date ;

– dans la colonne B, à partir de la cellule B2, choisir, comme format de cellule, un nombre à deux décimales.

1. Quelle formule Chloé doit-elle saisir dans la cellule B3 afin d'obtenir la somme de 626,36 € ?

	A	B
1	Date	Epargne en Euros
2	01/01/19	600,00
3	02/01/19	
4	03/01/19	
5	04/01/19	
6	05/01/19	
7	06/01/19	
8	07/01/19	

2. Déterminer la somme dont Chloé pourrait disposer au 1^{er} juillet 2019.

3. Chloé veut déterminer au bout de combien de mois elle aurait l'argent nécessaire pour financer son permis en suivant le conseil de ses parents. À l'aide du tableur, proposer une valeur.

4. Chloé décide de noter u_n la somme, en euros, disponible le nième mois après l'ouverture du livret. Ainsi $u_0 = 600$.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b. Chloé décide d'écrire l'algorithme suivant :

Compléter l'algorithme pour que Chloé puisse déterminer le nombre de mois cherché.

c. Programmer cet algorithme en utilisant Python.

d. Au bout de combien de mois Chloé aura-t-elle l'argent nécessaire pour financer son permis si elle suit les conseils de ses parents ?

```

N ← 0
U ← 600
Tant que...
    N ← ...
    U ← ...
Fin Tant que
  
```

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
80 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = -2$. Exprimer u_n en fonction de n .	Exprimer u_n en fonction de n dans le cadre d'une suite arithmétique.	$u_n = 4 - 2n$
81 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = -5$. Exprimer u_n en fonction de n .	Exprimer u_n en fonction de n dans le cadre d'une suite géométrique.	$u_n = -3 (-5)^n$
82 (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $r = -4$. Calculer $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$.	Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.	$S = \frac{20}{2}(5 - 71) = -660$
83 (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -2$ et de raison $q = -2$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{19} u_k$.	Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.	$S = -2 \times \frac{1 - (-2)^{19}}{1 - (-2)} = -349\,526$

84  Initialement, une population de bactéries compte 50 000 individus. Cette population augmente de 23 % toutes les heures, évolution modélisée par une suite (u_n) .

- Donner la valeur de u_0 . Calculer u_1 et u_2 (arrondir les valeurs à l'entier le plus proche).
- a. En déduire que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,23.
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- a. Exprimer u_n en fonction de n .
b. Calculer u_7 à l'entier près. Que représente ce nombre ?
- En utilisant la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries dépassera 500 000.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On utilise le coefficient multiplicateur : $1 + \frac{23}{100} = 1,23$ qui traduit une hausse de 23 %.	1. $u_0 = 50\,000$ (population de départ) $u_1 = 1,23 \times u_0 = 61\,500$; $u_2 = 1,23 \times u_1 = 75\,645$.
2. a. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = q$, u_0 , u_1 et u_2 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q . b. $u_{n+1} = q \times u_n$.	2. a. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{61\,500}{50\,000} = 1,23$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{75\,645}{61\,500} = 1,23$. (u_n) est géométrique de raison 1,23. b. $u_{n+1} = 1,23 \times u_n$.
3. a. $u_n = u_0 \times q^n$. → Voir Exercice résolu 5 p. 19 b. On remplace n par 7. On contextualise la valeur de 7 dans l'énoncé.	3. a. $u_n = 5\,000 \times 1,23^n$ b. $u_7 = 5\,000 \times 1,23^7$. À l'entier près $u_7 = 212\,964$. Au bout de 7 heures la population de bactéries compte 212 964 individus.
4. On utilise la formule $u_{n+1} = 1,23u_n$ avec $u_0 = 50\,000$.	4. $n = 12$. Au bout de 12 heures, la population aura dépassé 500 000 individus.

85

CAPACITÉS



- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

À l'Île de La Réunion, la variété d'ananas la plus cultivée est l'ananas Victoria.

L'exportation de cette variété d'ananas vers la métropole est en plein essor. Une coopérative réunionnaise se consacre exclusivement à l'exportation d'ananas Victoria vers la métropole. Entre 2012 et 2019, la coopérative a augmenté ses exportations de 10,5 % par an. En 2019, les exportations ont atteint 1 100 tonnes.

Le but de cet exercice est d'étudier deux modélisations différentes de l'évolution de la quantité d'ananas Victoria exportés par cette coopérative.

1. Dans cette question, on s'intéresse à une première modélisation : on suppose qu'après 2019, les exportations vont continuer à progresser de 10,5 % par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n) où pour tout entier naturel n , u_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en 2019 + n . On a : $u_0 = 1\,100$.

a. Déterminer la quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2020 puis en 2021.

b. Exprimer en fonction de n le terme de rang n de cette suite.

Méthode On regarde l'indice du premier terme de la suite. Ici, l'indice est 0. On sélectionne alors la formule : $u_n = u_0 \times q^n$, où q est la raison de la suite.

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 19

c. Donner alors la quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2030 puis en 2035.

Méthode On détermine l'entier naturel n pour lequel $2025 = 2019 + n$, puis on remplace n par la valeur trouvée dans l'expression $u_n = u_0 \times q^n$.

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 19

d. En utilisant un tableur ou un programme, déterminer en quelle année on peut prévoir que la quantité d'ananas exportés par cette coopérative dépassera 2 000 tonnes.

e. Déterminer le nombre de tonnes d'ananas qui seront exportées entre 2019 et 2040. On arrondira à la tonne près.

Méthode On détermine l'entier naturel n pour lequel $2040 = 2019 + n$, puis on calcule la somme des n premiers termes de cette suite géométrique :

$$1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 19

2. Dans cette question, l'exportation des ananas est modélisée par la suite (v_n) , définie par : $v_0 = 1\,100$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,7 v_n + 477$ où v_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en 2019 + n .

a. Calculer v_1 et v_2 .

b. La suite (v_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifier.

Méthode On calcule $v_1 - v_0$ et $v_2 - v_1$.

Si $v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = r$, alors (v_n) est arithmétique de raison r . Ou on calcule $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$. Si $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = q$ alors (v_n) est géométrique de raison q .

c. On considère l'algorithme ci-contre :

```
v=1100
for i in range(3):
    v=0.7*v+477
print(v)
```

Quelle valeur est affichée par cet algorithme en sortie ? Interpréter ce résultat en termes d'exportation d'ananas.

d. On dispose du tableau de valeurs suivant :

	A	B	C
1	n	année	v_n
2	0	2019	1100
3	1		
4	2		

– que faut-il saisir dans la cellule B3 pour afficher 2020 ?

– que faut-il saisir dans la cellule C3 pour obtenir la valeur de v_1 ?

e. En recopiant les cellules des colonnes A, B et C vers le bas, trouver le nombre de tonnes d'ananas exportés en 2040.

f. En utilisant la fonction somme, déterminer le nombre de tonnes d'ananas qui seront exportées entre 2019 et 2040. On arrondira à la tonne près.

3. Entre la modélisation proposée à la question **1.** et celle proposée à la question **2.**, laquelle permettra la réalisation du plus gros volume d'exportation entre 2019 et 2040 ?

86  Créer un programme permettant de réaliser pour tout entier n non nul :

1. La somme des n premiers entiers naturels.
2. La somme des carrés des n premiers entiers naturels.
3. La somme des cubes des n premiers entiers naturels.
4. La somme des inverses des n premiers entiers naturels.

87 Jules et Léo décident d'acheter le même ordinateur portable. Ils ne disposent pas de la somme nécessaire pour régler immédiatement leur achat. Le vendeur leur propose des facilités de paiement.

En incluant les intérêts, chacun devra verser un acompte et rembourser un total de 2 000 euros (acompte compris) sur une durée de 12 mois selon des modalités à définir. Jules choisit de verser 80 euros au moment de l'achat, puis il rembourse des mensualités fixes de 160 euros chacun des 12 mois suivants.

Léo verse 125 euros à l'achat, puis ses mensualités augmentent à chaque fois de 3 % chacun des 11 mois suivants. Ainsi, sa première mensualité augmentera de 3 % par rapport aux 125 euros initialement versés. Le 12^e mois, il rembourse la différence entre les 2 000 euros dus et la somme totale qu'il a déjà remboursée.

Partie A : Le choix de Jules

On note u_0 la somme versée par Jules à l'achat de l'ordinateur, et u_n la somme totale remboursée par Jules au bout de n mois.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
- b. Exprimer u_n en fonction de n .

Partie B : Le choix de Léo

On note v_0 la somme versée par Léo à l'achat de l'ordinateur, et v_n le montant de la mensualité de Léo le n ième mois avec n entier compris entre 1 et 11.

1. Calculer v_1 et v_2 . On arrondira les résultats à l'euro le plus proche.
2. a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.
- b. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Quelle somme totale Léo a-t-il remboursée à la fin du 11^e mois ? Quel est le montant de la 12^e mensualité ?
4. À partir de quel mois les mensualités de Léo sont-elles plus élevées que celles de Jules ?

88  La survie des éléphants d'Afrique est menacée par le braconnage (chasse illégale).

Partie A

En l'absence de braconnage, on estime le taux de croissance de la population d'éléphants d'Afrique à 1,5 % par an. Pour tout entier naturel n , on note u_n l'effectif de cette population pour l'année 2013 + n en l'absence de braconnage. La population totale d'éléphants d'Afrique était estimée à 470 000 individus en 2013.

1. a. Calculer le nombre d'éléphants d'Afrique en 2014 en l'absence de braconnage.
- b. Donner la nature de la suite (u_n) et en préciser le premier terme et la raison.
- c. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
2. Estimer le nombre d'éléphants d'Afrique en 2028 dans ces conditions.

Partie B

1. Actuellement, un éléphant d'Afrique est tué tous les quarts d'heure par le braconnage.

Justifier qu'environ 35 000 éléphants d'Afrique sont tués chaque année par le braconnage. On considérera qu'une année a 365 jours.

2. À l'aide d'un tableur, on a obtenu les résultats suivants, arrondis à 0,1 (les effectifs de la population d'éléphants tiennent compte du braconnage).

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Effectif (en milliers d'individus)	470,0	442,1	413,7	384,9	355,7	326,0

Année	2019	2020	2021	2022	2023
Effectif (en milliers d'individus)	295,9	265,3	243,3	202,9	170,9

Dans une interview accordée en 2013, le Fonds mondial pour la nature s'alarme : « si l'on ne réagit pas, la population d'éléphants d'Afrique aura baissé de près de 64 % en dix ans ».

Justifier cette affirmation par un calcul.

3. On considère l'algorithme suivant.

- a. Programmer cet algorithme et donner le résultat qui s'affiche.
- b. Comment l'interpréter ?

```
n=2013
u=470000
while u>0:
    n=n+1
    u=u*1.015-35000
print (n)
```

2

Fonction inverse

CAPACITÉ

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.



Une entreprise cherche assez naturellement à minimiser ses coûts de production. Tout aussi généralement, ce n'est pas le coût de chaque unité produite qu'elle cherche à rendre minimal, mais le coût moyen de production, c'est-à-dire le coût global de production par unité produite.

Comment déterminer la quantité à produire par une entreprise pour minimiser ses coûts de production ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 37



Découvrons
la fabrication du verre

4:25

lienmini.fr/10445-40

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde et de Première

Questions
Flash

Diaporama

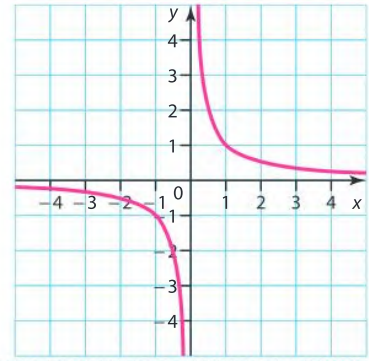
15 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-41

1 La fonction inverse

- La fonction inverse est la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Sa courbe représentative est une hyperbole.
- La fonction inverse est **impaire** ; l'hyperbole représentant la fonction est donc symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.



2 Signe d'une fonction affine

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où $a \neq 0$, s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$. Elle est du signe de a lorsque $x > -\frac{b}{a}$.

3 Signe d'une fonction polynôme de degré 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $a \neq 0$, s'annule pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$. Elle est du signe de a sauf sur l'intervalle $]x_1; x_2[$.

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Aide

	a	b	c																															
1. L'inverse de 3 par la fonction inverse est :	-3	0,333	$\frac{1}{3}$	1																														
2. Parmi ces différentes propositions, celle qui est exacte est :	$\frac{1}{25} < \frac{1}{27} < \frac{1}{29}$	$\frac{1}{147} < \frac{1}{14,8} < \frac{1}{1,49}$	$\frac{1}{54} < \frac{1}{58} < \frac{1}{5,2}$	1																														
3. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ est :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-0,5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	-0,5	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0,5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	0,5	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0,5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	0,5	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	2						
x	$-\infty$	-0,5	$+\infty$																															
$f(x)$	-	0	+																															
x	$-\infty$	0,5	$+\infty$																															
$f(x)$	-	0	+																															
x	$-\infty$	0,5	$+\infty$																															
$f(x)$	+	0	-																															
4. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,1x + 4$ est :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>40</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	40	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-40</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	-40	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>40</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	40	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	2						
x	$-\infty$	40	$+\infty$																															
$f(x)$	-	0	+																															
x	$-\infty$	-40	$+\infty$																															
$f(x)$	+	0	-																															
x	$-\infty$	40	$+\infty$																															
$f(x)$	+	0	-																															
5. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5(x + 2)(x + 6)$ est :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-6</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	0	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-6</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>6</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	2	6	$+\infty$	$f(x)$	+	0	0	+	3
x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$																														
$f(x)$	-	0	0	-																														
x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$																														
$f(x)$	+	0	0	+																														
x	$-\infty$	2	6	$+\infty$																														
$f(x)$	+	0	0	+																														
6. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x - 3)(x + 1)$ est :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	0	-	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	0	+	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	$f(x)$	-	0	0	-	3
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$																														
$f(x)$	-	0	0	-																														
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$																														
$f(x)$	+	0	0	+																														
x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$																														
$f(x)$	-	0	0	-																														

→ Voir **Corrigé** p. 178

OBJECTIF Étudier le comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition → **Cours 1** p. 38

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	10	800	10 000	50 000	400 000	1 000 000
$f(x)$						

b. Vers quel nombre semblent se rapprocher les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

2. Si cette conjecture est vraie, cela signifie qu'on peut s'approcher de la valeur obtenue autant qu'on le souhaite. On vérifie cela à l'aide d'un algorithme écrit en langage Python :

```
A=float(input("Entrer un nombre positif proche de 0 "))
x=1
while 1/x > A:
    x=10*x
print('x=',x)
```

a. Le programmer et donner la valeur obtenue à la sortie lorsque $A = 0,000\,01$.

b. Interpréter le résultat affiché.

c. Donner la valeur obtenue lorsque $A = 2,5 \times 10^{-8}$ et interpréter le résultat obtenu.

Synthèse $\frac{1}{x}$ peut être aussi proche de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-10	-1 000	-8 000	-100 000	-500 000	-2 000 000
$f(x)$						

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \dots\dots$$

b. Recopier et compléter : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$

4. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	0,1	0,025	0,000 08	0,000 002	0,000 000 1
$f(x)$						

b. Comment semblent se comporter les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0 ?

5. Si cette conjecture est vraie, cela signifie qu'on peut obtenir des valeurs de $f(x)$ aussi grandes que l'on veut en s'approchant suffisamment de 0 en restant positif. On vérifie cela à l'aide d'un algorithme écrit en langage Python :

```
A=float(input("Entrer un nombre positif"))
x=0.1
N=1
while 1/x < A:
    N=N+1
    x=1/10**N
print('x=',x)
```

a. Le programmer et donner la valeur obtenue à la sortie lorsque $A = 350\,000$.

b. Interpréter le résultat affiché.

c. Donner la valeur obtenue lorsque $A = 20\,000\,000$ et interpréter le résultat obtenu.

Synthèse $\frac{1}{x}$ peut être aussi grand que l'on veut si l'on choisit x positif suffisamment proche de 0.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

6. a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,05	-0,000 1	-0,000 02	-0,000 004	-0,000 000 5
$f(x)$						
$ f(x) $						

b. Comment semblent se comporter les valeurs de $|f(x)|$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus proches de 0 ?

c. Recopier et compléter : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \dots\dots\dots$



2

À la recherche de la dérivée

OBJECTIF Déterminer le nombre dérivé de la fonction inverse en un nombre réel → Cours 2 p. 38

1. Recopier et compléter :

Si f est une fonction dérivable en un a alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dots$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a. Ouvrir une feuille de tableur et suivre les instructions suivantes :

Étape 1 Reproduire la première ligne comme ci-dessous :

	A	B	C
1	h	$f(2+h)-f(2)$	Taux de variation

Étape 2 Dans la cellule A2, saisir le nombre 0,5 et dans la cellule A3 saisir la formule $=A2/2$. Étirer la cellule A3 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Étape 3 Dans la cellule B2, saisir la formule permettant de calculer $f(2+h) - f(2)$. Étirer la cellule B2 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Étape 4 Saisir dans la cellule C2 la formule qui convient pour que soit calculé le taux de variation souhaité.

Étirer la cellule C2 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Lorsque h se rapproche de 0 (en étant positif), quelle est la limite du taux de variation ?

b. Remplacer le nombre 0,5 de la cellule A2 par $-0,5$.

Lorsque h se rapproche de 0 (en étant négatif), quelle est la limite du taux de variation ?

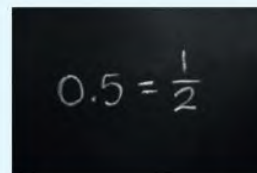
c. À l'aide des questions précédentes, conjecturer la valeur de $f'(2)$.

d. Justifier que pour tout nombre réel h non nul, $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{1}{2(2+h)}$ puis valider la conjecture de la question c.

3. Généralisation

Soit a un nombre réel non nul. Justifier que pour tout nombre réel h non nul : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$.

En déduire une expression de $f'(a)$ en fonction de a .



3

Attention, embouteillages sur la chaîne !

STI2D

INDUSTRIE

OBJECTIF Étudier les variations d'une fonction pour en déterminer son minimum → Cours 2 p. 38

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre.

Le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :

$$C(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72.$$

Le coût moyen de production d'une tonne de bouteilles quand on en produit x tonnes

est la fonction notée C_M et définie par $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ avec $x \in [1 ; 10]$.

1. Exprimer le coût moyen de production en fonction de x .

2. a. Tracer la courbe représentative de la fonction C_M dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 tonne sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées).

b. Déterminer graphiquement le nombre de bouteilles à produire pour obtenir un coût moyen minimum.

3. a. Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$, $C'_M(x) = \frac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .

c. Retrouver la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.



1

Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

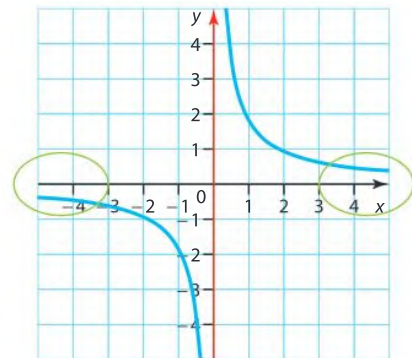
La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ étant définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, on s'intéresse au comportement des images $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche des bornes de son ensemble de définition.

PROPRIÉTÉS • Soit x un nombre réel strictement **positif**. On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment grand.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

• Soit x un nombre réel strictement **négatif**. On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut si l'on choisit x suffisamment petit.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



CONSÉQUENCE GRAPHIQUE • En $-\infty$ et en $+\infty$, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

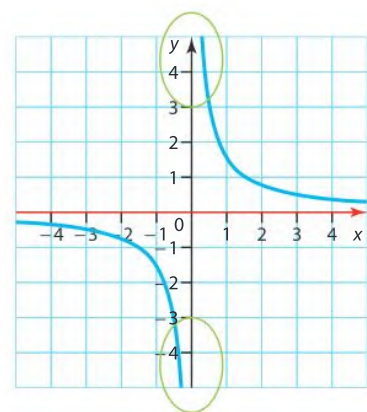
On dit que l'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à l'hyperbole en $-\infty$ et en $+\infty$.

PROPRIÉTÉS • On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut dès lors que x est choisi suffisamment proche de 0 en restant positif.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

• On peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès lors que x est choisi suffisamment proche de 0 en restant négatif.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



CONSÉQUENCE GRAPHIQUE • Lorsque x se rapproche de 0, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à l'hyperbole.

→ Voir **Exercice résolu 1**

2

Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

THÉORÈME La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. On a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Tableau de variation complet de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 0$

→ Voir **Exercices résolus 2 et 3**

Exercice résolu

1

Calculer la limite d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = 5 \times \frac{1}{x} + 2$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Méthode Pour calculer la limite d'une fonction

- 1 On **identifie** les opérations et la fonction inverse dans l'expression de la fonction.
- 2 On **utilise** le cours sur les limites de la fonction inverse et les règles de calculs pour déterminer la limite demandée.

Solution

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{x} + 2.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \times \frac{1}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \times \frac{1}{x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

→ Voir **Exercices 15 à 22** p. 42

Exercice résolu

2

Calculer la dérivée d'une fonction

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = -5x^2 + x - \frac{2}{x}.$$

Méthode Pour calculer la dérivée d'une fonction

- 1 On **identifie** l'opération et les fonctions usuelles dans l'expression de la fonction.
- 2 On **calcule** les dérivées des fonctions usuelles identifiées.

Solution

$$f = u + v + w \text{ avec } u(x) = -5x^2, v(x) = x \text{ et } w(x) = -\frac{2}{x}. \text{ Donc } f'(x) = -5 \times 2x + 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -10x + 1 + \frac{2}{x^2}.$$

→ Voir **Exercices 23 à 30** p. 42-43

Exercice résolu

3

Étudier les variations d'une fonction

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x + \frac{4}{x}.$$

Méthode Pour étudier les variations d'une fonction

- 1 On **calcule** $f'(x)$ que l'on écrit sous la forme d'un quotient et dont on factorise, si l'on peut, le numérateur.
- 2 On **étudie** le signe de $f'(x)$. Si $f'(x)$ change de signe, on détermine avant ce qui la fait changer de signe. On **obtient** les variations de f grâce au signe de $f'(x)$.

Solution

$$f'(x) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Sur $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x-2)$.

Or, la fonction $x \mapsto (x-2)(x+2)$ est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont -2 et 2 . Elle est du signe de a , autrement dit strictement positive (car $a = 1$) sauf sur l'intervalle $]-2; 2[$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$\nearrow$		-4	$\searrow$		4	$\nearrow$	

→ Voir **Exercices 31 à 36** p. 43

1 Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Lorsque x se rapproche des bornes de l'ensemble de définition de f , on a :

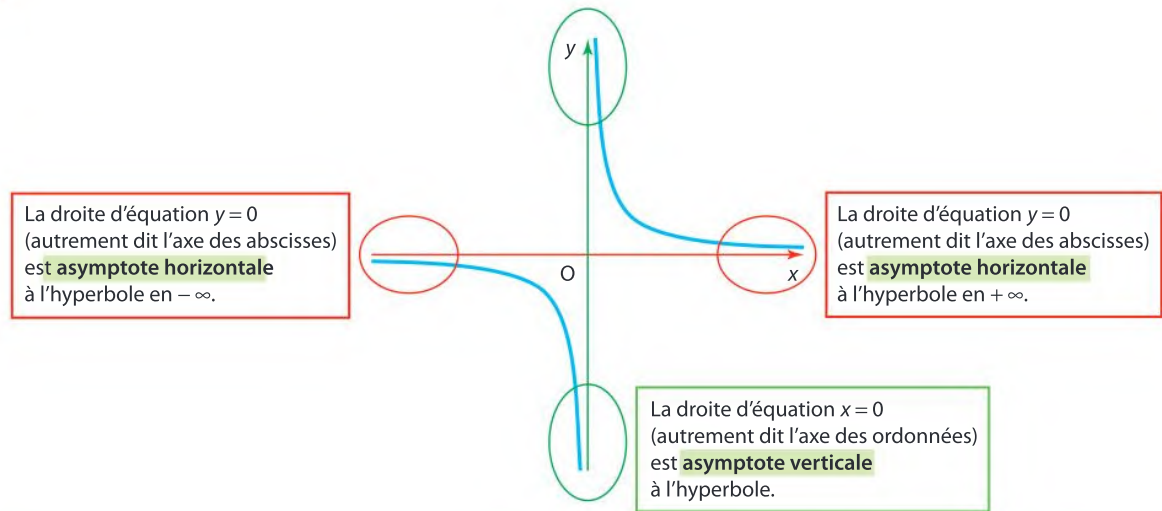
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Interprétation graphique



2 Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

On a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- Tableau de variation

Le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	0 $\searrow$	$+\infty$ $\searrow$	0

1 Questions Flash

Diaporama

15 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-42

Calculer des limites en $+\infty$

2 Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{6}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{x} + 1$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x} - 8$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{41}{x} + 9$

Calculer des limites en $-\infty$

3 Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{9}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 + \frac{2}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -20 + \frac{1}{x}$

Calculer des limites en 0

4 Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{16}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{11}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{22}{x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{6}{x}$

Calculer des dérivées de fonctions

Dans les exercices 5 à 9, calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I donné.

5 a. $f(x) = \frac{26}{x}$; $I =]-\infty; 0[$.

b. $g(x) = -\frac{12}{x}$; $I =]-\infty; 0[$.

c. $h(x) = -\frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

6 a. $f(x) = 7 + \frac{8}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

b. $g(t) = \frac{17}{t} - 9$; $I =]-\infty; 0[$.

c. $h(x) = -5 + \frac{31}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

7 a. $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

b. $g(x) = 5x - 2 + \frac{14}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

c. $h(t) = -1,25t + \sqrt{3} - \frac{100}{t}$; $I =]0; +\infty[$.

8 a. $f(t) = 5t^2 - 6t + \frac{37}{t}$; $I =]0; +\infty[$.

b. $g(x) = -6x^2 - 3,2x + 20 - \frac{4}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

c. $h(t) = \frac{41}{t} + \frac{1}{2}t^2 - 7t + 1$; $I =]0; +\infty[$.

9 a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{13}{x}$; $I =]-\infty; 0[$.

b. $g(t) = -\frac{5}{t} + 4t^3 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{9}{10}t + \frac{3}{7}$; $I =]0; +\infty[$.

Calculer des nombres dérivés

10 Pour chacune des fonctions f , calculer le nombre dérivé $f'(a)$.

a. $f(x) = \frac{24}{x}$; $a = -2$.

b. $g(x) = -3x + 5 - \frac{9}{x}$; $a = 1$.

c. $h(x) = \frac{250}{x} + 2x^2 - 6$; $a = -5$.

d. $k(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - \frac{18}{x}$; $a = 3$.

Étudier le signe de fonctions

Dans les exercices 11 à 14, étudier le signe de chacune des fonctions f définies sur l'ensemble D donné.

11 a. $f(x) = \frac{16}{x^2}$; $D =]-\infty; 0[$.

b. $f(x) = -\frac{9}{x^2}$; $D = \mathbb{R}^*$.

12 a. $f(x) = \frac{4(x-1,1)(x+1,1)}{x^2}$; $D =]0; +\infty[$.

b. $f(x) = \frac{4(x-1,1)(x+1,1)}{x^2}$; $D =]-\infty; 0[$.

13 a. $f(x) = \frac{3(x-2)(x+8)}{x^2}$; $D = \mathbb{R}^*$.

b. $f(x) = \frac{-0,3(x-7,2)(x+7,2)}{x^2}$; $D = \mathbb{R}^*$.

14 a. $f(x) = \frac{4x^3 + x^2 + 12}{x^2}$; $D =]0; +\infty[$.

b. $f(x) = \frac{(x-11)(2x^2 + 6x + 3)}{x^2}$; $D =]0; +\infty[$.

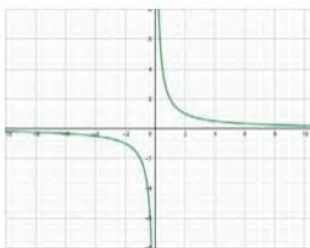
Comportement
de la fonction inverse

→ Aide Cours 1 p. 38

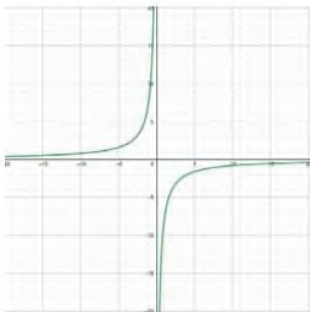
Question de cours

- 15** 1. Rappeler la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche de 0 en étant positif et celle lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x}$. En remarquant que $f(x) = 3 \times \frac{1}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.
- 16** f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{7}{x}$. En remarquant que $f(x) = -7 \times \frac{1}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.
- 17** f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 6 + \frac{22}{x}$.
1. Écrire $f(x)$ sous la forme $6 + k \times \frac{1}{x}$ où k est un nombre réel.
2. En déduire la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.
→ Voir Exercice résolu 1 p. 39
- 18** f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $f(x) = 4 - \frac{39}{x}$.
1. Écrire $f(x)$ sous la forme $4 + k \times \frac{1}{x}$ où k est un nombre réel.
2. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$ puis celle en 0.
→ Voir Exercice résolu 1 p. 39

- 19** On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.
1. Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement ces résultats.



- 20** On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{8}{x}$.
1. Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement ces résultats.



21 A l'Algo PYTHON Écrire un programme

f est une fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{a}{x}$ où a est un nombre réel.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition dans le cas où $a = 8$ puis dans le cas où $a = -4$.
2. a. Écrire un algorithme en langage Python dont le rôle est d'afficher la limite de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition pour une valeur de a saisie par l'utilisateur.
b. Le programmer sur la calculatrice ou sur un ordinateur et le faire fonctionner pour retrouver les résultats obtenus à la question 1.

Vrai ou faux

- 22** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
1. Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{14}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{23}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.
3. Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - 7$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7$.
4. Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$.

Dérivée et sens de variation
de la fonction inverse

→ Aide Cours 2 p. 38

Question de cours

- 23** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{9}{x}$.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de f .

Dans les exercices 24 à 28, calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Écrire le résultat sous forme de quotient.

- 24** a. $f(x) = \frac{6}{x}$ b. $g(x) = -\frac{8,25}{x}$
c. $h(x) = -\frac{1}{q}$ d. $l(x) = \frac{1,3}{x}$
e. $m(x) = -\frac{20}{x}$ f. $p(x) = \frac{8}{x}$

25 a. $h(x) = \frac{20}{x} - 4,2$ b. $g(x) = 3 - \frac{17,3}{x}$
 c. $f(t) = -5t + \frac{4}{t}$ d. $k(x) = 4x - 2 - \frac{5}{x}$
 → Voir **Exercice résolu 2** p. 39

26 a. $f(x) = 10,2x - 6 + \frac{3,1}{x}$ b. $g(x) = -0,5x + 3 - \frac{7}{x}$ c. $h(x) = -\frac{7,2}{x} + 3,5x - 1,2$
 → Voir **Exercice résolu 2** p. 39

27 a. $f(t) = 7t^2 + 2,8t - 1 + \frac{0,6}{t}$ b. $g(x) = \frac{3}{x} - 9x^2 + x$ c. $h(q) = 5q^2 + 4,7 + \frac{10}{q} - 3,1q$
 → Voir **Exercice résolu 2** p. 39

28 a. $f(x) = 0,1x^3 + 5x^2 - 3x - 4,2 + \frac{8}{x}$ b. $g(t) = -4t^3 + 0,3t^2 + 2,5 - \frac{2}{t}$
 → Voir **Exercice résolu 2** p. 39

QCM

- 29** Indiquer pour chaque question la bonne réponse.
- Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5 + \frac{7}{x}$, alors :
 a. $f'(x) = 5 - \frac{7}{x^2}$ b. $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$ c. $f'(x) = \frac{7}{x^2}$
 - Si f est la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ par $f(x) = -8,3x + 1 - \frac{110}{x}$, alors :
 a. $f'(x) = -8,3 - \frac{110}{x^2}$ b. $f'(x) = \frac{110}{x^2}$
 c. $f'(x) = \frac{-8,3x^2 + 110}{x^2}$
 - Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[10; 100]$ par $f(x) = 4x^2 - 5x + 1 + \frac{16}{x}$, alors :
 a. $f'(x) = \frac{8x^3 - 5x^2 - 16}{x^2}$ b. $f'(x) = \frac{8x^3 - 5x^2 + 16}{x^2}$
 c. $f'(x) = \frac{8x^3 - 4x^2 - 16}{x^2}$

- 30**  Confirmer par le calcul les informations suivantes données par un logiciel de calcul formel.

a.  Dérivée $\left(x - 100 + \frac{6400}{x}\right)$
 → $1 - \frac{6400}{x^2}$
 Factoriser $\left(1 - \frac{6400}{x^2}\right)$
 → $(x - 80) \cdot \frac{x + 80}{x^2}$

b.  Dérivée $\left(2x - 3 + \frac{50}{x}\right)$
 → $2 - \frac{50}{x^2}$
 Factoriser $\left(2 - \frac{50}{x^2}\right)$
 → $2(x - 5) \cdot \frac{x + 5}{x^2}$

31 f est la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ par :

$$f(x) = -\frac{1,5}{x}.$$

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $] -\infty; 0[$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.
- En déduire le sens de variation de f sur $] -\infty; 0[$.
 → Voir **Exercice résolu 3** p. 39

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{6}{x} + 2,3$.

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de 0.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- En déduire le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$.
 → Voir **Exercice résolu 3** p. 39

33 ALGO PYTHON Écrire un algorithme

f est une fonction définie sur l'intervalle $] 0; +\infty[$ par $f(x) = a + \frac{b}{x}$ où a et b sont des nombres réels avec $b \neq 0$.

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel appartenant à $] 0; +\infty[$.
- La valeur de a influence-t-elle le sens de variation de f sur l'intervalle $] 0; +\infty[$?
- Discuter suivant les valeurs de b le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.
- a. Écrire un algorithme en langage Python dont le rôle est d'afficher le sens de variation de f pour une valeur de a et de b saisies par l'utilisateur.
 b. Le programmer sur la calculatrice ou sur ordinateur et le faire fonctionner pour $a = 6,4$ et $b = 7$ puis pour $a = -3,2$ et $b = -5,9$ afin de vérifier son bon fonctionnement.

34 Soit f la fonction définie sur $] 0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,16x + 4,7 + \frac{1}{x}.$$

- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] 0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{0,16(x - 2,5)(x + 2,5)}{x^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.
- En déduire les variations de f sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.

35 Soit f la fonction définie sur $] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$.

- Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] 0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.
- En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $] 0; +\infty[$.

36 Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par :

$$f(x) = x^3 + 11x - 7 - \frac{9}{x}.$$

- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $] -\infty; 0[$.
- En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

Comportement de la fonction inverse

37  Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{31}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la calculatrice et conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Déterminer les deux asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
- 2.** Valider les conjectures précédentes en calculant ces limites.

38  Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{12}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur la calculatrice et conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Déterminer les deux asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
- 2.** Valider les conjectures précédentes en calculant ces limites.

39  Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{25}{x}.$$

Valider par le calcul les résultats suivants obtenus par un logiciel de calcul formel.

1	Limite $\left(-\frac{25}{x}, -\infty\right)$
☐	$\rightarrow 0$
2	LimGauche $\left(-\frac{25}{x}, 0\right)$
☐	$\rightarrow -\infty$
3	LimDroite $\left(-\frac{25}{x}, 0\right)$
☐	$\rightarrow -\infty$
4	Limite $\left(-\frac{25}{x}, \infty\right)$
☐	$\rightarrow 0$

40 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2 + \frac{4}{x}.$$

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

QCM

41 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x} =$

- a. $+\infty$ b. 0 c. 17

2. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{8}{x} =$

- a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. -8

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3 + \frac{1}{x} =$

- a. 0 b. -3 c. $-\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} 4 + \frac{18}{x} =$

- a. $+\infty$ b. 0 c. 4

Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

Vrai ou faux

42 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $f(x) = x^2 + 11x - 5 + \frac{3}{x}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{(x-0,5)(2x^2+12x+6)}{x^2}.$$

2. La dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x}$ est définie par $f'(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

3. La fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{13,4}{x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

4. La fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5x^3 - \frac{4,7}{x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5. La fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(t) = 2t + \frac{18}{t}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 3[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

43 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,1x - 1 + \frac{0,4}{x}.$$

Montrer que pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{0,1(x-2)(x+2)}{x^2}$.

44 Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 19x - 11,4 - \frac{5}{x}.$$

Montrer que pour tout réel x non nul,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-10x+5)}{x^2}.$$

45 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1; 1]$ par :

$$f(x) = 2 - 0,1x - \frac{0,025}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,1; 1]$, $f'(x) = \frac{-0,1(x-0,5)(x+0,5)}{x^2}$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1; 1]$.

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -10x + 62 - \frac{3\,240}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x non nul,

$$f'(x) = \frac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}.$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

47 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par : $f(x) = 5 - \frac{10}{x}$. Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	1	10
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-5	4

48 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0,5x + 2 + \frac{8}{x}$. Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		-2		6		

49 Lorsqu'un véhicule roule entre $10 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ et $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, sa consommation d'essence c (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) par l'expression $c(v) = 0,06v + \frac{150}{v}$.

1. Vérifier que pour tout v appartenant à l'intervalle $[10 ; 130]$, $c'(v) = \frac{0,06(v-50)(v+50)}{v^2}$.

2. Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10 ; 130]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction c .

3. a. En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale.

b. Déterminer la consommation minimale en litres.

50 Une entreprise fabrique des tables de jardin. La production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.



Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à $C(q) = q^2 + 50q + 100$ où q appartient à l'intervalle $[1 ; 30]$.

1. a. Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

b. Calculer le coût unitaire de production, en euros, pour 20 tables produites.

2. À chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production, $C_u(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a. Représenter la fonction C_u sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites, le coût unitaire, en euros, est inférieur ou égal à 80.

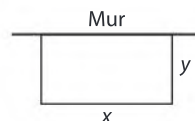
b. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1 ; 30]$, $C'_u(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.

c. Étudier le signe de $C'_u(q)$ sur l'intervalle $[1 ; 30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_u .

d. Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

51 Une jardinerie souhaite

construire une extension rectangulaire à l'extérieur du magasin pour stocker des arbres en pots. L'aire de cette extension est égale à 722 m^2 . L'un des côtés est un mur du magasin ; le gérant souhaite clôturer les 3 autres côtés avec du grillage et goudronner le sol. Le prix du grillage est 15 € le mètre et celui du goudron 25 € le m^2 . On note x et y les longueurs, en mètres, des côtés de l'extension et on admet que x appartient à l'intervalle $[20 ; 60]$.



1. Justifier que $y = \frac{722}{x}$.

2. On note $l(x)$ la longueur, en mètres, de la clôture.

a. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[20 ; 60]$, $l(x) = x + \frac{1444}{x}$.

b. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[20 ; 60]$, $l'(x) = \frac{(x-38)(x+38)}{x^2}$.

c. Étudier le signe de $l'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 60]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction l .

d. En déduire les dimensions de cette extension pour que la longueur de la clôture soit minimale et déterminer le prix à payer par le responsable de cette jardinerie.

52 Un moulin

artisanal peut produire chaque jour une quantité q de farine biologique où q est compris entre 0,3 et 6 tonnes.

À chaque valeur de q appartenant à l'intervalle $I = [0,3 ; 6]$, on associe le coût unitaire de production, $C_u(q) = 4q + \frac{9}{q}$, exprimé en centaines d'euros.



1. Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction C_u et conjecturer la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal.

2. a. Démontrer que pour tout réel q appartenant à l'intervalle I , $C'_u(q) = \frac{4(q-1,5)(q+1,5)}{q^2}$.

b. Déterminer le signe de $C'_u(q)$ sur l'intervalle I .

c. Dresser le tableau des variations de la fonction C_u .

d. En déduire la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal et déterminer le coût unitaire minimal en euros.



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
53 Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{24}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.		
54 Si f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 8$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.		
55 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\frac{6}{x} + 10$ alors $f'(x) = -\frac{6}{x^2}$.		
56 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 8x - 5 + \frac{2}{x}$ alors $f'(x) = \frac{8x^2 + 2}{x^2}$.		
57 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 7x - 4 + \frac{9}{x}$ alors $f'(x) = \frac{(x+3)(2x^2 + x - 3)}{x^2}$.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- 58 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{11}{x}$.
- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
 - 11
 - 0
 - $-\infty$
 - On a : $f'(x) =$
 - $\frac{11}{x^2}$
 - $-\frac{11}{x^2}$
 - 11
 - La fonction f :
 - est strictement croissante.
 - est strictement décroissante.
 - change de variation.
- 59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0,01x + 1 + \frac{9}{x}$.
- Pour tout réel x non nul, $f'(x) =$
 - $\frac{0,01x^2 + 9}{x^2}$
 - $\frac{0,01(x-30)(x+30)}{x^2}$
 - $1,01 - \frac{9}{x^2}$
 - La fonction f :
 - est strictement monotone sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
 - est strictement monotone sur $]-\infty; 0[$ et change de variation sur $]0; +\infty[$.
 - change de variation sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- 60 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par $f(x) = 0,5x^2 - 7,5x + \frac{32}{x}$.
- Pour tout réel x non nul, $f'(x) =$
 - $\frac{(x-8)(x^2 + 0,5x + 4)}{x^2}$
 - $\frac{x^3 - 32}{x^2}$
 - $x - 7,5 + \frac{32}{x^2}$
 - Sur l'intervalle $[1; 10]$, la fonction f :
 - est strictement décroissante.
 - est strictement croissante.
 - change de variation.
 - Sur l'intervalle $[1; 10]$, la fonction f :
 - admet un maximum en 8.
 - admet un minimum en 8.
 - admet un minimum en 5,5.

→ Vérifier les résultats p. 178

61 In english



A company produces x thousand litres of paint with $x \in [0,5; 8]$. The average cost of production of x thousand litres of paint in thousand euros is : $C_M(x) = x + 4 + \frac{25}{x}$.

- Calculate $C'_M(x)$.
- Draw the variation table of the function C_M and deduce the number of litres of paint the company needs to produce for its average cost to be minimal.

62 COMPÉTENCE Calculer

Une entreprise produit au plus 60 000 téléphones mobiles pour la France et les vend 800 € l'unité. Les coûts de fabrication, en euros, sont modélisés par l'expression : $C(q) = 0,01q^2 + 250q + 2\,496\,400$ (où q est le nombre d'exemplaires fabriqués et vendus).

- Montrer que le bénéfice, selon le nombre q d'exemplaires vendus, est défini sur $[0; 60\,000]$ par : $B(q) = -0,01q^2 + 550q - 2\,496\,400$.
- On s'intéresse désormais au bénéfice unitaire qui est modélisé par la fonction B_U définie sur $[0; 60\,000]$ par $B_U(q) = \frac{B(q)}{q}$. Sur un tableur, on a préparé une feuille de calculs dont on donne, ci-dessous, un aperçu :

	A	B	C
1	Nombre d'exemplaires q	Bénéfice $B(q)$	Bénéfice unitaire $B_U(q)$
2	10 000	2003600	200,36000
3	11 000	2343600	213,05455
4	12 000	2663600	221,96667
5	13 000	2963600	227,96923
6	14 000	3243600	231,68571
7	15 000	3503600	233,57333
8	16 000	3743600	233,97500
9	17 000	3963600	233,15294
10	18 000	4163600	231,31111
11	19 000	4343600	228,61053
12	20 000	4503600	225,18000

- Quelle formule doit-on saisir en C2 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs du bénéfice unitaire ?
- D'après le tableau, estimer le nombre d'exemplaires à fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice unitaire maximal.
- Déterminer l'expression de $B_U(q)$; en déduire celle de $B'_U(q)$.
- Établir le tableau de variation de la fonction B_U sur $[0; 60\,000]$ et en déduire le nombre d'exemplaires à fabriquer et à vendre pour avoir un bénéfice unitaire maximal.

63 COMPÉTENCE Raisonner

Une entreprise fabrique chaque jour x litres d'un produit chimique, où x appartient à $[1; 50]$. Le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $[1; 50]$ par $C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200$, les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

- Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction C_M définie par $\frac{C(x)}{x}$, où $x \in [1; 50]$.

- Exprimer le coût moyen de production en fonction de x .
- Justifier que pour tout x appartenant à $[1; 50]$,

$$C'_M(x) = \frac{0,5(x-20)(x+20)}{x^2}.$$

- Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur l'intervalle $[1; 50]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .
- En déduire la quantité de produit chimique à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2. Le coût marginal de production, noté C_m , pour une quantité produite x , est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire. On a donc $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

- Calculer le coût marginal pour une production de 10 litres de produit, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 10 litres à 11 litres.
- En pratique, les économistes assimilent le coût marginal de production à la dérivée du coût total et considèrent donc que $C_m(x) = C'(x)$. Calculer $C'(10)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.
- Les économistes affirment que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal. Résoudre l'équation $C_m(x) = C_M(x)$ pour confirmer l'affirmation faite par les économistes.

64 COMPÉTENCE Représenter

Un confiseur produit chaque jour une quantité x , comprise entre 0 et 100 kg de pâtes de fruits.

Le coût total quotidien de fabrication, en euros, de x kg de pâtes de fruits est donné par

$$C_T(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 2x + 149,5.$$

Le coût moyen, en euros, pour une production de x kg de pâtes de fruits est : $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

1. Conjecturer un résultat

- Ouvrir un fichier GeoGebra. Construire la courbe représentant la fonction C_T ainsi que la droite (OM) où $O(0; 0)$ et M est un point de la courbe.
- Exprimer le coefficient directeur de la droite (OM) en fonction de x et justifier qu'il est égal à $C_M(x)$.
- Déplacer le point M sur la courbe afin de déterminer graphiquement la quantité de pâtes de fruits à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2. Démontrer la conjecture par le calcul

- Déterminer l'expression de $C'_M(x)$.
- Justifier que pour tout x appartenant à $]0; 100]$,
$$C'_M(x) = \frac{(x-65)(0,002x^2 + 0,04x + 2,6)}{x^2}.$$
- Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur $]0; 100]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M sur $]0; 100]$.
- En déduire la quantité de pâtes de fruits à produire pour que le coût moyen soit minimal.

Des baskets en matières recyclées... et recyclables

CAPACITÉ Déterminer des extrema par le calcul et à l'aide d'un algorithme.

Une entreprise fabrique des baskets dont les composants utilisés dans la fabrication sont 100 % recyclés et recyclables. Elle fabrique entre 5 et 100 paires de baskets par jour.

Elle estime que le coût total de production, en euros, de la fabrication de x paires de baskets est donné par : $C(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x + 8\,836$. Lorsque x paires de baskets sont fabriquées, on appelle coût moyen d'une paire de baskets, le quotient $\frac{C(x)}{x}$. On le note $C_M(x)$.

1. Justifier que pour tout x appartenant à $[5 ; 100]$,

$$C_M(x) = x^2 - 90x + 2\,700 + \frac{8\,836}{x}.$$

2. a. Calculer $C'_M(x)$ pour tout x appartenant à $[5 ; 100]$ et justifier que

$$C'_M(x) = \frac{(x - 47)(2x^2 + 4x + 188)}{x^2}.$$

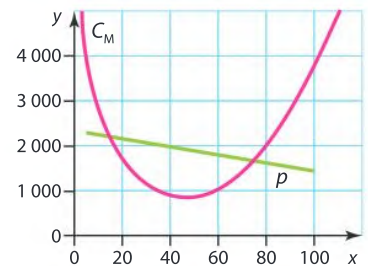
b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ lorsque x appartient à $[5 ; 100]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M .

c. En déduire le nombre de paires de baskets à produire pour que le coût moyen soit minimal.

3. Le prix de vente $p(x)$ d'une paire de baskets dépend de la quantité vendue. Lorsque x est compris entre 5 et 100, on a $p(x) = -9x + 2\,340$.

On donne ci-contre la courbe représentative des fonctions C_M et p .

Déterminer graphiquement le nombre x_0 de paires de baskets à fabriquer pour que le bénéfice réalisé par l'entreprise sur une paire de baskets soit maximal.



En salle informatique



lienmini.fr/10445-44

On se propose de déterminer un encadrement du nombre x_0 à l'aide d'un algorithme.

Pour cela, on divise l'intervalle $[5 ; 100]$ en 3 sous-intervalles de même longueur : $[5 ; c]$, $[c ; d]$ et $[d ; 100]$.

On cherche alors auquel de ces 3 sous-intervalles appartient x_0 .

On réitère ce procédé jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle obtenu soit inférieure à la précision choisie.

Voici l'algorithme Python :

```
from math import*
def Benefice(x) :
    return -x**2+81*x-360-8836/x
a=5
b=100
while b-a>1:
    h=(b-a)/3
    c=a+h
    d=b-h
    if Benefice(c)>Benefice(d):
        a=c
    else:
        b=d
print(a,b)
```

1. Justifier l'expression écrite à la ligne 3.

2. Expliquer pourquoi si $\text{Benefice}(c) > \text{Benefice}(d)$ alors x_0 ne peut pas être dans l'intervalle $[d ; b]$.

À quel intervalle appartient alors x_0 ?

Expliquer pourquoi si $\text{Benefice}(c) \leq \text{Benefice}(d)$ alors x_0 ne peut pas être dans l'intervalle $[a ; c]$.

À quel intervalle appartient alors x_0 ?

3. En utilisant la question précédente, compléter les lignes 11 et 13 de l'algorithme ci-contre.

4. Programmer l'algorithme et déterminer x_0 .

Énoncé

Automatisme à utiliser

Réponse

65 Écrire $0,25x^2 - 1,44$ sous la forme $a(x - b)(x + b)$ où a et b sont des réels.

Factoriser par 0,25 puis faire apparaître une identité remarquable.

$$0,25(x - 2,4)(x + 2,4)$$

66 Donner le signe de $f(x) = -3(x - 5)(x + 5)$ suivant les valeurs du réel x .

Déterminer les 2 racines du trinôme puis donner son signe grâce à celui de $a = -3$.

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

67 Donner le signe de $f(x) = (x - 2)(3x^2 + x + 7)$ suivant les valeurs du réel x , où $x \in [0 ; 8]$.

Justifier que, sur $[0 ; 8]$, l'un des facteurs est positif et étudier le signe de l'autre facteur.

x	0	2	8
$f(x)$	$-$	0	$+$

68 Le coût de production, exprimé en millions d'euros, pour fabriquer q milliers de tonnes d'un produit est donné par $C(q) = \frac{q^2}{4} + q + 4$ où $q \in [1 ; 20]$.

1. Démontrer que le coût unitaire de production d'un millier de tonnes, noté $U(q)$, de ce produit lorsque la production est de q milliers de tonnes est $U(q) = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}$.

2. Justifier que $U'(q) = \frac{(q - 4)(q + 4)}{4q^2}$ où q appartient à l'intervalle $[1 ; 20]$.

3. Étudier le signe de $U'(q)$ sur l'intervalle $[1 ; 20]$ et dresser le tableau de variation de U .

4. L'entreprise décide de choisir le niveau de production à produire qui minimisera son coût unitaire. Déterminer cette production.

Méthode à appliquer

Solution rédigée

1. On utilise la formule $U(q) = \frac{C(q)}{q}$ puis on « casse » le quotient pour obtenir le résultat de $U(q)$ sous la forme attendue.

$$1. U(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + q + 4}{q} = \frac{q^2}{4q} + \frac{q}{q} + \frac{4}{q} = \frac{q^2}{4} \times \frac{1}{q} + 1 + \frac{4}{q} = \frac{q}{4} + 1 + \frac{4}{q}.$$

2. On dérive chacun des termes de $U(q)$ puis on factorise le numérateur de $U'(q)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 39

$$2. U'(q) = \frac{1}{4} \times 1 + 0 + 4 \times \left(-\frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{4}{q^2} = \frac{q^2 - 16}{4q^2} = \frac{(q - 4)(q + 4)}{4q^2}$$

3. On justifie que, sur l'intervalle $[1 ; 20]$, étudier le signe de $U'(q)$ revient à étudier celui de $(q - 4)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 39

3. Sur $[1 ; 20]$, $4q^2 > 0$ et $(q + 4) > 0$ donc $U'(q)$ est du signe de $(q - 4)$. Et $q - 4 \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 4$. D'où :

q	1	4	20
$U'(q)$	$-$	0	$+$
$U(q)$	5,25	3	6,2

4. On cherche, dans le tableau de variation, la valeur de q qui rend minimale la fonction U .

4. Le coût unitaire est minimal pour une production de 4 000 tonnes de produit (4 milliers de tonnes).

SUJET GUIDÉ

BAC

69 CAPACITÉS

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [20 ; 150]$ par $f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}$.

- Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \frac{2}{x^2}(x - 81)(x + 81)$.

Méthode Dériver chacun des termes de $f(x)$ puis factoriser le numérateur de $f'(x)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 39

- En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I .

Méthode Justifier que, sur l'intervalle I , étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier celui de $(x - 81)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 39

- Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I .
- Représenter la fonction f sur la calculatrice et déterminer la valeur arrondie à 10^{-1} près des solutions de l'équation $f(x) = 350$.

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $5 + \frac{v^2}{300}$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

- On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

- Exprimer t en fonction de v .
- Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à $\frac{3\,000}{v} + 2v$.
- Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

- En utilisant la **Partie A** :

- Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

- Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

70 CAPACITÉ

- Étudier des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Une entreprise produit des appareils électroménagers. Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par : $C(x) = x^2 + 50x + 100$ pour $5 \leq x \leq 40$.

- L'entreprise vend chaque appareil 100 euros.

- Expliquer pourquoi le bénéfice horaire réalisé par la fabrication et la vente de x objets est égal à :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 100 \text{ pour } x \text{ appartenant à l'intervalle } [5 ; 40].$$

- B' étant la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[5 ; 40]$, calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

- Dresser le tableau de variation de B sur l'intervalle $[5 ; 40]$.

- Quel est le nombre d'appareils à produire pour que le bénéfice horaire de l'entreprise soit maximal ?

- Le coût unitaire de production d'un appareil lorsque x appareils sont produits est égal à $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

- Montrer que $f(x) = x + 50 + \frac{100}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

- f' étant la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[5 ; 40]$, montrer que $f'(x) = \frac{(x - 10)(x + 10)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

Méthode Dériver chacun des termes de $f(x)$ puis factoriser le numérateur de $f'(x)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 39

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[5 ; 40]$ et dresser le tableau de variation de f .

Méthode Justifier que sur l'intervalle $[5 ; 40]$, étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier celui de $(x - 10)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 39

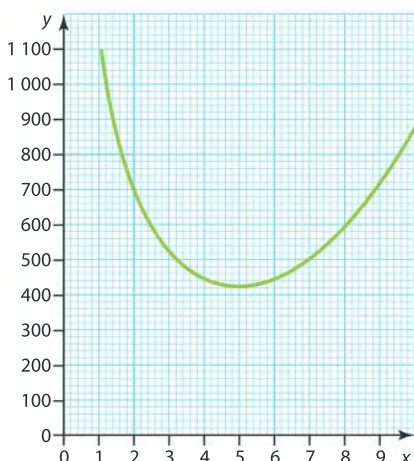
- Pour quelle valeur de x le coût unitaire est-il minimal ? Préciser alors sa valeur.

71 Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres. Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction C définie pour x appartenant à $[1 ; 10]$ par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Partie A : Lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_M définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par : $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$. La représentation graphique de la fonction C_M est donnée ci-dessous.



- Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_M(7)$.
- Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.

Partie B : Calculs

- Montrer que :

$$C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$$

pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.

- a. Démontrer que :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$$

pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.

- b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
- c. En déduire la longueur de tissu à produire pour que le coût moyen soit minimal.

72 Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués est donné par : $C(x) = x^2 + 50x + 900$, pour $x \in [10 ; 60]$.

Partie A

- Quel est le coût de production de 20 meubles ?
- Quel est le coût de production par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles ?
- Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x meubles fabriqués. Exprimer $f(x)$ en fonction de x , pour tout x appartenant à l'intervalle $[10 ; 60]$.

Partie B

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[10 ; 60]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}.$$

- Justifier que $f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[10 ; 60]$.
- Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$									

- Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 5 meubles en abscisses et 1 cm pour 5 euros en ordonnées en commençant la graduation à 100.

Partie C

Dans cette partie, la production est comprise entre 10 et 60 meubles.

- Quel nombre de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.
- Chaque meuble est vendu 115 euros.
 - Construire la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 115$ sur le graphique précédent.
 - Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
 - En déduire l'intervalle de production pour lequel l'artisan réalise un bénéfice.
- Exprimer, en fonction de x , la recette $R(x)$ produite par la vente de x meubles.
- En déduire l'expression en fonction de x du bénéfice $B(x)$ réalisé par la vente des x meubles (utiliser l'expression de $C(x)$ donnée dans la **Partie A**).
- Calculer $B(20)$, $B(45)$ et $B(30)$. Les résultats trouvés sont-ils en accord avec les conclusions de la question 2. c. ?

3

Fonctions exponentielles de base a

CAPACITÉS

- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a .
- Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
- Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.



Les fonctions exponentielles permettent de modéliser toutes sortes d'évolutions, l'évolution moyenne d'une population ou la consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse. Ainsi, si à $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, la consommation d'une voiture de sport est de $4,3 \text{ L}$ aux 100 km , elle est de $14,8 \text{ L}$ à $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$!

Si cette voiture de sport passe de $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ à $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, de quel pourcentage baissera sa consommation d'essence ?



→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 55

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions
Flash

Diaporama

10 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-02

1 Les suites géométriques

- Soit u_n la suite géométrique de raison **positive** q et de premier terme u_0 .
Formule de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Formule explicite : $u_n = u_0 \times q^n = u_p \times q^{n-p}$.
- Si $u_0 > 0$, si $0 < q < 1$ alors u_n est strictement **croissante**.
si $q > 1$ alors u_n est strictement **décroissante**.

2 Les calculs de puissances

Soit a et b deux réels positifs, n et p des entiers non nuls :

- $a \times a \times a \times \dots \times a = a^n$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

3 Les taux d'évolution

- **Augmenter** de t % une valeur, c'est la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ = Coefficient Multiplicateur (CM).
- **Diminuer** de t % une valeur, c'est la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
- Si une valeur subit n **évolutions successives**, de coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, CM_3, \dots, CM_n$, alors le coefficient multiplicateur global est $CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \dots \times CM_n$.

Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. Si (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$ alors $v_n =$	6^n	2×3^n	3×2^n	$2v_{n+1}$	1
2. La suite $u_n = 1,5 (0,4)^{n-1}$ est :	croissante	décroissante	non monotone	constante	1
3. $\frac{2,5^2 \times 2,5^{-2}}{2,5^4} =$	1	$2,5^{-3}$	$2,5^4$	$2,5^{-4}$	2
4. Une augmentation de 5 % puis une diminution de 7 % est une :	baisse de 2 %	hausse de 2 %	baisse de 2,35 %	baisse de moins de 2 %	3
5. Un article de 20 euros augmente de 4 % par trimestre. Quel est son prix au bout de 3 ans ?	30 euros	22,5 euros	environ 54,88 euros	environ 32 euros	3

→ Voir **Corrigé** p. 178

OBJECTIF Découvrir la fonction exponentielle de base $a \rightarrow$ **Cours 1** p. 56

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,87 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Sur la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B3 pour obtenir les termes de cette suite par recopie vers le bas ?

	A	B	C	D
1	n	u_n	x	$f(x)$
2	0	1	0	
3	1		0,2	
4	2		0,3	
5	3		0,4	
6	4		0,5	
7	5		0,6	
8	6		0,7	
9	7		0,8	
10	8		0,9	
11	9		1	
12	10		1,1	

2. Représenter par un nuage de points les 10 premiers termes.

3. Dans la cellule D2, inscrire la fonction $f(x) = 0,87^x$ définie sur $[0 ; 10]$ et la recopier vers le bas puis représenter la courbe de f par un nuage de points.

4. Le prix d'un smartphone haut de gamme de 1 000 euros baisse régulièrement de 13 % par an. En utilisant la colonne B ou D, répondre aux questions suivantes :

- Quel est son prix au bout de 5 ans ? Au bout de 2 ans et demi ? De 4 ans et 3 mois ?
- Au bout de combien de temps son prix initial aura-t-il baissé de moitié ?



OBJECTIF Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives $\rightarrow$ **Cours 4** p. 58

Louna a placé le 1^{er} janvier 2017 un capital de 1 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4 %. Le 30 juin 2020, elle retire l'intégralité de son capital. La banque lui reverse 1 147,14 euros. Surprise par ce montant, elle s'aperçoit qu'elle avait opté pour un taux mensuel et non annuel.

1. a. Si t est le taux mensuel, montrer que t est solution de

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 1,04.$$

b. En déduire la valeur de t en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

2. Louna a ainsi retiré son capital au bout de 3 ans et demi. N'y a-t-il pas un autre moyen plus simple pour retrouver le capital le 30 juin 2020 ?

Aide : sur la calculatrice, taper $1\,000 \times 1,04^{3,5}$.



3

Un coquetier conceptuel → Mémento p. 173

STI2D

CONCEPTION DE PRODUITS

OBJECTIF Modéliser la conception d'un produit → Cours 1 p. 56

1. Ouvrir une feuille GeoGebra et créer un curseur a allant de 0,1 à 10 incrément 0,1.

2. Pour $a = 1$, $a = 0,4$, $a = 1,2$, $a = 2,7$, représenter les différentes fonctions $f(x) = a^x$.

Aide : dans le champ de saisie, taper $f(x) = \text{fonction}[a^x, -10, 10]$.



3. Étudier le sens de variation de $f(x) = a^x$ suivant les valeurs de a .

4. Trouver les deux fonctions utilisées pour fabriquer ce coquetier.

4

Lever le pied, c'est écologique ! → Mémento p. 176

ENVIRONNEMENT

OBJECTIF Modéliser une situation concrète par une fonction exponentielle → Cours 1 p. 56

On modélise la consommation, en litres d'essence, d'une voiture de sport par la fonction f définie sur $[10, 130]$ par $f(x) = 0,6 \times 1,025^x$ où x est la vitesse en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.



	A	B
1	Vitesse ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$)	Consommation ($\text{l} = f(x)$)
2	10	
3	20	
4	30	
5	40	
6	50	
7	60	

1. Indiquer la formule à écrire en B2 qui, par recopie vers le bas, calcule la consommation de cette voiture.

2. Déterminer les consommations à 50, 80, 90, 110 et 130 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Interpréter les résultats.

3. a. À partir de quelle vitesse la consommation dépasse-t-elle 10 L ?

b. Si on passe de 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ à 80 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, de quel pourcentage baisse la consommation d'essence ?

c. Si le prix de l'essence est de 1,50 euro le litre, quelles sont les économies réalisées sur 300 km en passant de 90 à 80 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?



1

Les fonctions exponentielles de base a

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$. Elle est définie pour tout **entier naturel** n .

En prolongeant son ensemble de définition pour tout **réel strictement positif**, on définit la fonction exponentielle de base a .

DÉFINITION La fonction $x \mapsto a^x$ avec a réel strictement positif s'appelle la **fonction exponentielle** de base a .

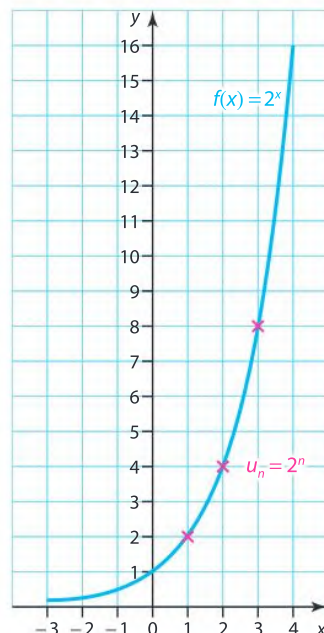
REMARQUES

- Si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$ est une fonction **constante**.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x , $f(x) > 0$.
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- À l'aide de la calculatrice, on peut calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base a : $1,5^{5,1} = 7,097$ à 10^{-3} près.

EXEMPLES

- La fonction $x \mapsto 1,5^x$ est une fonction exponentielle de base 1,5.
- La fonction $x \mapsto 0,6235^x$ est une fonction exponentielle de base 0,6235.

→ Voir **Exercice résolu 1**



2

Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ Pour tous réels x et y et $a > 0$,

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

EXEMPLES

$$5^{2,5} \times 5^{0,5} = 5^{2,5+0,5} = 5^3 = 125 \quad \bullet \quad (\sqrt{2})^{7,4} \times (\sqrt{2})^{0,6} = (\sqrt{2})^8 = 2^4$$

PROPRIÉTÉS Pour tous réels x et y et n entier relatif :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \textcircled{1} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad \textcircled{2} \quad (a^x)^n = a^{nx} \quad \textcircled{3}$$

DÉMONSTRATION

- ① $a^x \times a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ soit $a^x \times a^{-x} = 1$ d'où $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- ② $a^{x-y} = a^{x+(-y)} = a^x \times a^{-y} = a^x \times \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$.
- ③ C'est une propriété des puissances entières.

EXEMPLES

$$\bullet \quad \frac{8,75^3 \times 8,75^{-5}}{8,75^5} = \frac{8,75^{-2}}{8,75^5} = 8,75^{-2-5} = 8,75^{-7}$$

$$\bullet \quad (1,8^4)^{-1,1} \times 1,8^{4,2} = 1,8^{-4,4} \times 1,8^{4,2} = 1,8^{-0,2}$$

→ Voir **Exercice résolu 2**

Exercice résolu

1

Passer d'une suite géométrique de raison a à la fonction exponentielle de base a

Rémi place 500 euros au taux annuel de 4,5 % pendant n années et $0 < n < 18$. Soit (u_n) le capital à l'année n .

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.
2. Quel est le capital de Rémi au bout de 3 ans ? De 17 ans ?
3. Soit la fonction f définie pour tout réel x appartenant à $[0 ; 18]$ par $f(x) = 500(1,045)^x$.

a. Calculer $f(1,5)$ et $f\left(\frac{7}{3}\right)$.

b. Interpréter concrètement les résultats.

Solution

1. $u_{n+1} = \left(1 + \frac{4,5}{100}\right)u_n$ donc u_n est une suite géométrique

de raison 1,045 et de premier terme $u_0 = 500$.

2. La formule explicite est $u_n = 500 \times 1,045^n$
donc $u_3 = 500 \times 1,045^3 = 570,58$ euros
et $u_{17} = 500 \times 1,045^{17} = 1\,056,69$ euros.

Méthode

Pour passer d'une suite géométrique de raison a à la fonction exponentielle de base a

- 1 On détermine la formule de récurrence de la suite.
- 2 On utilise la formule explicite de la suite.
- 3 On utilise la calculatrice.

3. a. $f(1,5) = 500 \times 1,045^{1,5} = 534,13$.

b. $f\left(\frac{7}{3}\right) = 500 \times 1,045^{\frac{7}{3}} = 554,08$.

c. Au bout d'un an et demi, le capital sera de 534,13 euros.
Au bout de 2 ans et 4 mois $\left(\frac{7}{3} \text{ années}\right)$, le capital sera de 554,08 euros.

→ Voir Exercices 37, 38, 41 p. 62

Exercice résolu

2

Transformer des expressions numériques avec les propriétés algébriques

1. Écrire plus simplement avec la forme a^x les expressions suivantes :

a. $(1,3^2)^{0,2} \times \frac{1,3^{-3}}{1,3^{2,5}}$

b. $\frac{3,5^{-2} \times 3,5^{-1,5}}{5^{-3,5}}$

2. Montrer que $(1,4^x - 2)(1,4^x + 4) = 1,4^{2x} + 2(1,4)^x - 8$.

3. Simplifier l'expression : $\frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} + \frac{1,1^{x+0,5}}{2,2}$.

Solution

1. a. $(1,3^2)^{0,2} \times \frac{1,3^{-3}}{1,3^{2,5}} = 1,3^{0,4} \times 1,3^{-3-2,5}$
 $= 1,3^{0,4-3-2,5}$
 $= 1,3^{-5,1}$

b. $\frac{3,5^{-2} \times 3,5^{-1,5}}{5^{-3,5}} = \frac{3,5^{-2-1,5}}{5^{-3,5}}$
 $= \frac{3,5^{-3,5}}{5^{-3,5}}$
 $= \left(\frac{3,5}{5}\right)^{-3,5}$
 $= 0,7^{-3,5}$

Méthode

Pour transformer des expressions numériques avec les propriétés algébriques

- 1 On utilise les propriétés connues :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^n = a^{nx}$$

2. $(1,4^x - 2)(1,4^x + 4) = 1,4^x \times 1,4^x + 4 \times 1,4^x - 2 \times 1,4^x - 2 \times 4$
 $= 1,4^{2x} + 2 \times 1,4^x - 8$

3. $\frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} + \frac{1,1^{x+0,5}}{2,2} = \frac{1,1^{x-0,5} + 1,1^{x+0,5}}{2 \times 1,1}$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{1,1^{x-0,5}}{1,1} + \frac{1}{2} \times \frac{1,1^{x+0,5}}{1,1}$
 $= \frac{1}{2} \times 1,1^{x-0,5-1} + \frac{1}{2} \times 1,1^{x+0,5-1}$
 $= \frac{1}{2} \times 1,1^{x-1,5} + \frac{1}{2} \times 1,1^{x-0,5}$
 $= \frac{1}{2} \times 1,1^x (1,1^{-1,5} + 1,1^{-0,5})$

→ Voir Exercices 44 à 52 p. 63

3

Sens de variation

A Sens de variation de $x \mapsto a^x$

PROPRIÉTÉS Soit la fonction exponentielle f de base a telle que $x \mapsto a^x$ avec a réel **strictement positif**.

Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 1$, alors $f(x) = a^x$ est **constante** sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLES

- La fonction $f(x) = 1,3^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 0,6^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 1^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.

REMARQUES

- La fonction $f(x) = a^x$ a le même sens de variation que la suite géométrique $u_n = a^n$.
- Toutes les courbes des fonctions $f(x) = a^x$ passent par le point $(0 ; 1)$.

B Sens de variation de $x \mapsto ka^x$

PROPRIÉTÉS Soit k réel et a réel strictement positif.

Si $k > 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

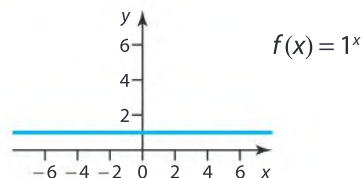
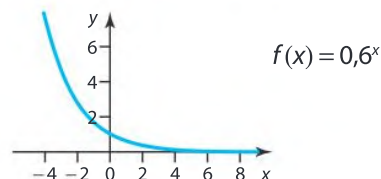
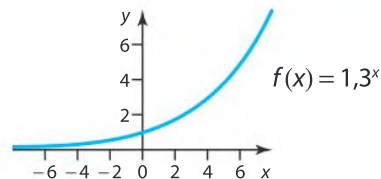
Si $k < 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE • La fonction $f(x) = -2(0,457)^{-1,7}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $k = -2 < 0$ et $a = 0,457 < 1$.

→ Voir **Exercice résolu 3**

Vocabulaire

On parle de **croissance** ou **décroissance exponentielle**.



4

Taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions

DÉFINITION On appelle **taux moyen d'évolution** t le réel $100\left(\text{CM}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ où CM est le coefficient multiplicateur global sur n évolutions.

En effet, le taux t vérifie l'équation $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = \text{CM}$ pour t réel d'où $1 + \frac{t}{100} = \text{CM}^{\frac{1}{n}}$.

REMARQUE • Si $t > 0$, l'évolution correspond à une **augmentation**, si $t < 0$, à une **diminution**.

EXEMPLE • On veut calculer le taux moyen annuel t d'une augmentation de 20 % en 10 ans. Le coefficient CM global est $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = \left(1 + \frac{20}{100}\right)^{10} = 1,2$.

Soit $t = 100\left(1,2^{\frac{1}{10}} - 1\right) = 100(1,2^{0,1} - 1) \approx 1,84 \%$.

→ Voir **Exercice résolu 4**

Exercice résolu

3

Étudier le sens de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$

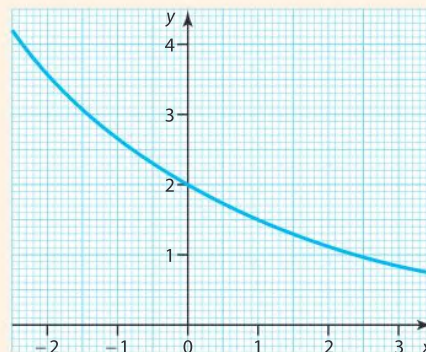
Soit la fonction $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer l'image de $-1,5$ puis $f(0)$.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Montrer que la courbe représentative de f passe par le point $(0; 2)$ et le point $(0,5; \sqrt{3})$.

Solution

1. $f(-1,5) = 2 \times (0,75)^{-1,5} \approx 3,08$.
 $f(0) = 2 \times (0,75)^0 = 2$.
2. $k = 2$ et $a = 0,75$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. On a $f(0) = 2$ donc la courbe représentative de f passe par le point $(0; 2)$.
 $f(0,5) = 2 \times (0,75)^{0,5}$
 $= 2 \times \frac{3^{0,5}}{4}$
 $= 2 \times \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$
 $= \sqrt{3}$.

La courbe représentative de f passe par le point $(0,5; \sqrt{3})$.



Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$

- 1 On utilise la calculatrice.
- 2 si $a > 1$ et $k > 0$ alors $f(x) = a^x$ est croissante.
Si $0 < a < 1$ et $k > 0$ alors $f(x) = a^x$ est décroissante.
- 3 $a^{0,5} = \sqrt{a}$.

→ Voir Exercices 59 à 65 p. 63

Exercice résolu

4

Déterminer un taux d'évolution annuel moyen

La cote en bourse d'une action a augmenté de 3 % par an pendant 5 ans. Elle a ensuite baissé de 4 % pendant 4 ans puis a de nouveau augmenté de 2 % pendant 3 ans.

1. Quel est le taux d'évolution global ?
2. Quel est le taux annuel moyen après 12 évolutions ?
3. L'action valait 52 euros. Quelle est sa cote au bout de 12 ans ?

Solution

1. Pour la première augmentation, le coefficient multiplicateur annuel est : $1 + 0,03 = 1,03$. Le coefficient multiplicateur global sur les 5 ans est donc : $1,03^5$.
De même, on obtient $0,96^4$ pour la baisse de 4 % pendant 4 ans et $1,02^3$ pour l'augmentation de 2 % pendant 3 ans.
 $CM = 1,03^5 \times 0,96^4 \times 1,02^3 = 1,045$.
Le taux d'évolution global est donc 4,5 % à 10^{-3} près.

Méthode

Pour déterminer un taux d'évolution annuel moyen

- 1 Le taux d'évolution global est égal au coefficient multiplicateur global (CM).
- 2 On utilise la formule $100(CM^{\frac{1}{n}} - 1)$.
- 3 On applique le taux annuel moyen sur la période de 12 ans.

2. Soit t le taux annuel moyen.

$$t = 100 \left(1,045^{\frac{1}{12}} - 1 \right) = 0,367 \text{ \%}$$

Le taux annuel moyen sur 12 ans est 0,367 %.

3. Le taux global sur 12 ans est : $(1,00367)^{12}$.

Si l'action valait 52 euros, sa valeur au bout de 12 ans est :
 $52 \times (1,00367)^{12} = 54,33$ euros.

→ Voir Exercices 76 à 81 p. 64

1 Les fonctions exponentielles de base a

- Les fonctions $f(x) = a^x$ peuvent être considérées comme un prolongement à des valeurs réelles de la suite géométrique a^n où n est un entier naturel.
- Si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$, f est une fonction **constante**.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x , $f(x) > 0$.
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

2 Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y , n entier relatif et $a > 0$,

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

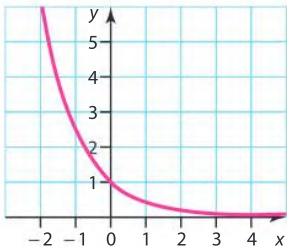
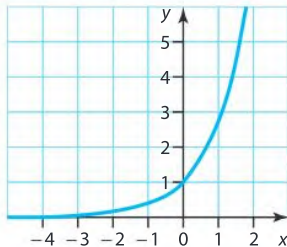
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^n = a^{nx}$$

3 Sens de variation

- Sens de variation de $x \mapsto a^x$

$0 < a < 1$	$a > 1$
$f(x) = a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$f(x) = a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
	

- Sens de variation de $x \mapsto ka^x$

Soit k réel et a réel strictement positif.

Si $k > 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

4 Taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives

- $t = 100(\text{CM}^{\frac{1}{n}} - 1)$ où CM est le **coefficient multiplicateur global** sur n évolutions.

$$\text{CM} = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Le **coefficient multiplicateur global** d'une augmentation de 20 % pendant trois ans est ainsi : $\left(1 + \frac{20}{100}\right)^3 = 1,2^3 = 1,728$.

Le **taux d'évolution moyen** est égal à : $100(1,728^{\frac{1}{3}} - 1) = 20$.

1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-03

Suites géométriques de raison positive

2 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2,5 et de premier terme $u_0 = 1$.

Calculer u_1 et u_{20} .

3 Un capital de 1 000 euros est placé à un taux annuel de 3 %.

Quelle est sa valeur au bout de 10 ans ?

4 Soit la suite $u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Montrer que u_n est une suite géométrique et donner les variations de u_n .

Prolongement aux réels

5 On considère la fonction $f(x) = 2^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(0)$, $f(-0,5)$ et $f(2,5)$.

6 Donner l'expression de la fonction f exponentielle de base $\frac{1}{3}$ telle que $f(0) = -2$.

7 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(0,25)^{-x}$. Donner la valeur exacte de $f(0)$, $f(-1)$ et $f(0,5)$.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,2^x$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(3,5)$.

2. Déterminer le pourcentage d'évolution entre ces deux images.

9 À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $0,75^x = 5,5$.

Manipuler les propriétés algébriques

Dans les exercices 10 à 13, simplifier à chaque fois l'expression :

10 $\frac{2^{1,5}}{2^{-3,7}} \times 2^{2,3}$

11 $(3^{0,6})^2 \times 3^{-0,8} \times 3^{-1,5}$

12 $\frac{0,1 - 0,1^4}{0,1^2}$

13 $\pi^{-2,5} \times \pi^2 \times \pi^{1,5} \times \sqrt{\pi}$

Sens de variation de $f(x) = a^x$ et $f(x) = k^{ax}$

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi^x$. Étudier son sens de variation.

15 Soit la fonction $f(x) = \left(\frac{7}{8}\right)^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Dresser son tableau de variation sur $[-2 ; 3,5]$.

16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(0,25)^x$.

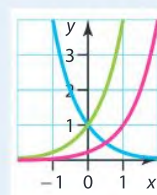
1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Donner la valeur exacte de $f(0,5)$.

17 Soit la fonction $f(x) = -2,5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

18 On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions du type $f(x) = ka^x$, où k et a sont des réels et $a > 0$. Trouver graphiquement k et a pour chacune de ces fonctions.



19 Trouver une expression d'une fonction $f(x) = ka^x$ décroissante sur $\mathbb{R}$ dont $f(1) = 2$.

Taux annuel moyen équivalent à n évolutions

20 Calculer le taux d'évolution global correspondant à 18 augmentations de 2 %.

21 La décote d'une voiture est de 20 % par an. Calculer le taux moyen mensuel de la décote.

22 Le prix d'un produit subit 2 diminutions de 5 % puis 4 augmentations de 3 %. Calculer le taux moyen après ces 6 évolutions.

23 Une moto de 125 cm³ à 2 500 euros subit 4 hausses mensuelles de 1 % puis 8 baisses consécutives de 0,75 % sur 1 an. Ce prix a-t-il augmenté ou diminué au bout d'un an ? Calculer le taux moyen mensuel au bout d'un an.

24 Pendant 3 ans, le prix d'un produit suit 2 augmentations de t % et 1 diminution de 5 %. Le taux annuel moyen est de 3,5 %. Déterminer le taux t de l'augmentation.

25 Calculer le taux d'évolution global correspondant à 4 augmentations de 5 % et 5 diminutions de 4 %. En déduire le taux moyen après ces 9 évolutions.

Fonctions exponentielles
de base a

→ Aide Cours 1 p. 56

Question de cours

- 26** Étudier le sens de variation de la suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme 1 puis celui de la fonction $f(x) = 0,8^x$.
- 27** Soit u_n la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 1. Calculer u_1 et u_{10} .
- 28** Soit $u_n = 0,75^n$. Montrer que u_n est une suite géométrique puis donner son sens de variation.
- 29** Représenter par un nuage de points les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{2}$.
- 30** Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme -2 et de raison 1,5.
- 31** Représenter la courbe de $f(x) = 1,5^x$ sur $[-2; 5]$.
- 32** Calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction $f(x) = 0,5^x$.
- 33** Soit $f(x) = (\sqrt{3})^x$. Calculer $f(1,5)$ et $f(\pi)$.
- 34** Soit la fonction $f(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^x$. Calculer les images de 0 et de 1 par f .
- 35** Donner l'expression de la fonction exponentielle de base 0,1 et dont l'image de 0 vaut 1.
- 36** À l'aide de la calculatrice, trouver une valeur de x à 10^{-3} près pour que $3,5^x = 1\,000$.
- 37** Soit deux suites géométriques $u_n = 2 \times (0,75)^n$ et $v_n = -3(1,2)^{-n}$.
- Déterminer le 1^{er} terme et la raison de chacune des suites.
 - Calculer u_1, v_1, u_4 et v_4 .
- Voir Exercice résolu 1 p. 57
- 38** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ et $g(x) = -3(1,2)^{-x}$. Calculer les images de $-1,5$ et $2,5$ par f et g .

Vrai ou faux

- 39** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
- La fonction $f(x) = 2(0,9)^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}$.
 - Si $f(x) = -2(1,1)^x$ alors $f(5) < f(4)$.
 - L'équation $-(0,01)^x = -1$ n'admet pas de solution.

40 Montrer que 2 n'a pas d'antécédent par la fonction $f(x) = -3 \times a^x$.

41  On utilise un tableur pour obtenir différents termes de la suite géométrique u_n de raison 0,95 et de premier terme 35 et différentes images de la fonction $f(x) = 35(0,95)^x$.

	A	B	C	D
1	n	$u(n)$	x	$f(x) = 35(0,95)^x$
2	0	35	0	35
3	1		1	
4	2		2	
5	3		3	
6	4			
7	5			

- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B3 pour calculer, par recopie vers le bas, tous les termes de la suite ?
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 pour calculer, par recopie vers le bas, toutes les images de la fonction f ?
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer les antécédents de 2 et de 4,5 par f .

Coup de pouce

- Pour l'antécédent de 2, taper : `1 solve(4.5*0.5^x)=2`

42  **Modifier un programme**
On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
from math import*
def resol(k):
    x=-20
    while ((1.5**x)<k):
        x=x+0.1
    return x
```

- Que fait ce programme quand on tape `resol(3)`, `resol(-1)` ?
- Modifier ce programme afin qu'il puisse résoudre l'équation $2(0,8)^x = 0,5$. En déduire la solution de cette équation.

QCM

43 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- Si $f(x) = 9^x$ alors :
 - $f(-1) = 0$
 - $f(-1) = -9$
 - $f(-1) = \frac{1}{9}$
- Si $f(x) = -2(0,16)^x$ alors $f(0,5)$ est :
 - positive
 - $-1,6$
 - $-0,8$
- La solution de l'équation $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4\sqrt{6}}{27}$ est :
 - $\sqrt{6}$
 - $\frac{7}{2}$
 - $\frac{\sqrt{6}}{27}$

Propriétés algébriques

→ Aide Cours 2 p. 56

Question de cours

44 Montrer que : $\frac{2^{2,5} \times 2^{-1,5}}{(2^{-3,5})^{-1,5}} = 2^{-4,25}$.

45 Simplifier : $0,89^{1,5} \times 0,89 \times 0,89^{-3,2}$.

46 Simplifier : $3,5^{2,2} \times 2^{2,2} \times 0,5^{2,2}$.

47 Simplifier : $\frac{4,1^{2,5} \times 4,1^{-5,2}}{4,1^{-4,8} \times 4,1^{2,7}}$.

48 Montrer que : $5,5^{-1,2} \times \sqrt{5,5} = 5,5^{-0,7}$.

49 Calculer à l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près, $(2,5^{-3,2})^{2,7}$.

50 Simplifier : $\pi^{2,8} \times (\pi^{-1,5})^2$.

51 Simplifier : $\left(\left(\frac{9}{4} \right)^3 \times 2,25^{-1,5} \right)^{-1}$.

52 Simplifier les expressions suivantes :

$A = 5^{-3} \times 5^{-5}$ $B = \frac{2,7^3 \times 2,7^{-5}}{2,7^5}$ $C = (4,5^3)^{-2,1} \times 4,5^{6,2}$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 57

53 Si $f(x) = 2,1^x$ simplifier le calcul : $f(1) \times f(-2,5) \times f(3)$.

54 Développer l'expression : $\frac{1}{2}(0,5^x - 1)(0,5^x + 1)$.

55 Montrer que : $\left(\frac{a^{1+0,25x}}{a^{1-0,25x}} \right)^2 = a^x$.

56 Écrire avec une seule base a l'expression : $(a^{0,8} \times a^{-1,3} \times a^{2,5})^3$.

QCM

57 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. $\frac{a^{x-1} \times a^2 \times a^{-x}}{a^{x+1}}$ vaut :

a. a^x b. a^{-x} c. 1

2. $(3^{1,2})^{-0,5} \times \frac{3}{3^{-2,5}}$ est égal à :

a. $3^{-2,9}$ b. $3^{1,6}$ c. $3^{2,9}$

3. Si $f(x) = -1,5(0,4)^x$ alors $f(0,5) \times f(-1,5)$ est égal à :

a. $-1,5(0,4)^{-1}$ b. $\frac{90}{16}$ c. $2,25(0,4)^1$

Vrai ou faux

58 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $(\sqrt{3,1})^3 = 3,1^{3,5}$

2. $(a^{2x+3})^2 = a^{4x+9}$

3. $2,5^{2,7} + 2,1^{1,3} = 2,1^4$

Sens de variation

→ Aide Cours 3 p. 58

Question de cours

59 Soit la fonction $f(x) = 3,2^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Dresser son tableau de variation sur $[-2 ; 2]$ en justifiant.

60 Dans chaque cas, donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$:
a. $f(x) = 2,21^x$ b. $f(x) = 0,94^x$

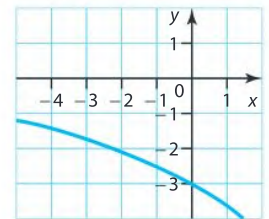
61 Dans chaque cas, donner le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$:
a. $g(x) = 0,99^{-x}$ b. $g(x) = 1,001^{-x}$

62 Dans chaque cas, donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$:
a. $f(x) = 0,005 \times 2,6^x$ b. $f(x) = 2\,500 \times 0,99^x$
→ Voir Exercice résolu 3 p. 59

63 Dans chaque cas, donner le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$:
a. $h(x) = 2,3(5^x)$ b. $h(x) = 0,4(0,87^x)$

64 Dans chaque cas, donner le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$:
a. $h(x) = 8\,000(0,25^{-x})$ b. $h(x) = 0,4(0,87^{-x})$

65 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction $f(x) = ka^x$.
Quelle est l'expression de f parmi les 4 propositions suivantes ?
Justifier.

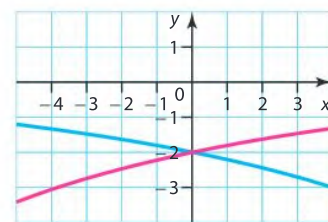


- $f_1(x) = 3(0,8)^x$
- $f_2(x) = -3(0,8)^x$
- $f_3(x) = -3(1,2)^x$
- $f_4(x) = 3(1,2)^{-x}$

66 On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g telles que :

$f(x) = -2(0,9)^x$ et $g(x) = -2(1,1)^x$.

Identifier la courbe de f et celle de g .



67 Montrer que la courbe de la fonction $f(x) = 2(0,5)^x$ passe par le point $A(-1 ; 4)$.

68 Étudier le sens de variation de la fonction définie par :
 $f(x) = -3,1(3,1)^x$.

69 Donner l'expression de la fonction $f(x) = ka^x$ telle que $f(0) = -2$ et $f(1) = -1$.

70 Soit la fonction $f(x) = (2,8)^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Dresser son tableau de variation sur $[-1,5; 1,5]$ en justifiant.
2. Pourquoi 0 n'a pas d'antécédent par f ?

71 Voici le tableau de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$.

1. Déterminer les valeurs de k et a .
2. Compléter alors l'image de 1 et de 3,5.

x	-1	0	1	3,5
f(x)	5	1,5		

72 Trouver l'expression de la fonction exponentielle de base a de la forme $f(x) = ka^{x-1}$ dont $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$.

QCM

73 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. La fonction $f(x) = 0,8^{-x}$ est :
a. croissante b. décroissante c. négative
2. la fonction $f(x) = -3(1,001)^x$ est :
a. croissante b. décroissante c. croissante puis décroissante
3. la fonction $f(x) = -a^x$ avec a réel tel que $0,3 < a < 0,9$ est :
a. négative b. décroissante c. positive

Vrai ou faux

74 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $f(x) = -2,1(0,1)^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction exponentielle de base $a > 0$ est soit croissante soit décroissante.
3. La fonction $f(x) = \frac{2}{3} \times (\pi^{-x})$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Taux d'évolution moyen

→ Aide Cours 4 p. 58

Question de cours

- 75** 1. Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 hausses de 3 %.
2. Quel est le taux d'évolution moyen équivalent à 5 augmentations de 3 % ?

76 Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 20 augmentations de 0,5 %.

77 Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 3 baisses de 2 %.

78 Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à une hausse de 1 % et une baisse de 2 %.

79 Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 2 baisses de 3 % suivies d'une baisse de 2 %.

80 Déterminer le taux moyen équivalent à 2 augmentations de 3 % suivi de 2 diminutions de 1 %.

81 Déterminer le taux moyen équivalent à 3 baisses de 2 % suivi de 3 hausses de 3 %.

Vrai ou faux

82 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. 2 baisses de 10 % et 1 hausse de 20 % correspond à une baisse de 1 %.
2. Le taux annuel moyen correspondant à 2 hausses annuelles de 10 % puis 3 baisses annuelles de 5 % est moins de 1 %.
3. Un taux annuel moyen est toujours positif.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 59

QCM

83 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. Le taux d'évolution moyen équivalent à 10 augmentations de 3,2 % est environ :
a. $\frac{1}{3}$ b. 0,315 c. 3,2
2. Le taux d'évolution moyen correspondant à 2 augmentations de 10 % et une baisse de 5 % est :
a. 5 % b. 4,75 %
c. solution de l'équation $(1+t)^3 = 1,2 \times 0,95 \times 1,2$.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 59

84 Montrer que la solution x de l'équation $(1+x)^5 = 5,5$ est $5,5^{0,2} - 1$.

85  Voici un algorithme en langage naturel et en langage Python.

```
from math import*
D= float(input("saisir D"))
F=float(input("saisir F"))
N=int(input("saisir N"))
C=F/D
Q=C**(1/N)
T=(Q-1)*100
print ("le taux est ",T)
```

```
D ← ?
F ← ?
N ← ?
C ← F/D
Q ← C1/N
T ← (Q - 1) × 100
Afficher T
```

1. Expliquer les valeurs de C , Q et T .
2. La population d'une ville est passée de 10 453 à 23 542 habitants en 10 ans.

En utilisant cet algorithme, calculer le taux de croissance moyen annuel.

Fonctions exponentielles de base a

86  **STI2D** Une usine fabrique des valves pour robinets. Le 1^{er} janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P , en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.



Au bout de n mois écoulé, on a donc la suite $P_n = 2 \times (1,03)^n$ pour n entier.

Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction $P(x) = 2 \times (1,03)^x$ où x est un réel.

On considère qu'un mois dure 30 jours. Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de $P(0,2)$ et au bout de 15 jours $P(0,5)$.

1. Montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 2.
 2. Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?
 3. Calculer la production le 1^{er} février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.
- À l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de valves de robinets dépassera 4 500 par jour.

87 1. Quelle semble être la nature des fonctions f et g représentées ci-contre ? Justifier.

2. En vous appuyant sur cette hypothèse, déterminer les expressions de f et de g .

3. La courbe de g passe-t-elle par le point $A(-3; 0,2)$?

4. La courbe de f passe par le point $B(x; 3)$. Quelle est la valeur de x ?



88  **STMG** Mélissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 0,75 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.



1. Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours (1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde de son compte ?
2. Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Mélissa avait-elle placé initialement ?
3. Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour que son compte atteigne 2 000 euros ?

89 Soit la fonction $f(x) = 1,5^x$ et la fonction g telle que $g(x) = 1,25^x$.

1. Graphiquement, en combien de points ces courbes semblent-elles se couper ?
2. Montrer que résoudre $f(x) = g(x)$ revient à résoudre l'équation $1,2^x = 1$ puis conclure.



90  **STMG** Emma veut vendre un casque audio qu'elle n'utilise plus et dont le prix est compris entre 10 et 30 euros sur les sites de vente d'occasion.

Elle estime que, pour un prix de x euros d'occasion, l'offre $f(x)$ sera $f(x) = 1,05^x$ et la demande $g(x) = 7 \times (1,05)^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variation et de signes de f et de g sur $[10; 30]$.
2. Montrer que le prix d'équilibre est solution de l'équation $1,1025^x = 7$.
3. En déduire le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre.



Coup de pouce

- Le prix d'équilibre est celui qui égalise la demande et l'offre, il est donc solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Sens de variation

91   **Utiliser un programme**

Soit la fonction $f(x) = 3,5^x$ définie sur $[-1; 5]$.

1. Dresser son tableau de signes et de variation sur $[-1; 5]$.
2. En utilisant le tableau de variation, dire pourquoi l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur $[-1; 5]$.
3. Utiliser l'algorithme ci-dessous en langage Python pour résoudre l'inéquation $f(x) > 2 000$.

```
from math import*
def resol(k):
    x=-1
    while(3.5**x<k):
        x=x+0.1
    return x
```

- 92**   Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 8]$ par : $f(x) = 25\,000 \times 1,1^x$.



- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.
- Déterminer les variations de f sur $[0; 8]$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

- 93** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0,3^{x+2} + 3 \times 0,3^{x+1} - 0,3^x.$$

- Calculer les images de 0, 1 et -2 par f .
- Factoriser l'expression de f par $0,3^x$.
- En déduire le signe et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Vrai ou faux

- 94** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Une suite géométrique de raison 1,47 correspond à une fonction exponentielle de base 0,47.
- Une fonction exponentielle de base 0,95 correspond à une décroissance de 5 %.
- Une grandeur qui a un taux de croissance annuel de 200 % correspond à une fonction exponentielle de base 2.
- Une fonction exponentielle de base $\frac{1}{22}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

QCM

- 95** Indiquer pour chaque question la bonne réponse.

- La fonction $f(x) = -2(0,54)^{-x}$ est :
 a. décroissante sur $\mathbb{R}$. b. positive sur $\mathbb{R}$.
 c. de base 0,54.
- La fonction $f(x) = kq^x$ pour k réel et q réel tel que $q > 0$ est :
 a. décroissante si $0 < q < 1$. b. positive si $q > 1$
 c. croissante pour $0 < q < 1$.
- La fonction exponentielle de base a $f(x) = a^x$ est :
 a. nulle en une unique abscisse. b. positive sur $\mathbb{R}$.
 c. positive si $a > 1$.

- 96**   **Tester un programme**

Soit la fonction $f(x) = 2,5^x$ définie sur $[0; 10]$.

- Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $[0; 10]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour k réel appartenant à l'intervalle $[0; 500]$.
- On considère l'algorithme suivant traduit en langage Python :

```
from math import*
def resol(k):
    a=0
    b=10
    while b-a>1:
        m=(a+b)/2
        if (2.5**m<k):
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

- Exécuter la fonction `resol(20)`. Interpréter le résultat
- Reproduire et compléter le tableau ci-dessous pour retrouver le résultat de **a**.

a	0	0	...
b	10	5	...
b - a > 1 ?	vrai	...	
m	5	...	
2,5^x < k ?	faux	...	

Taux d'évolution moyen

- 97** Soit t le taux d'évolution annuel de 24 %. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer à 0,01 % près :

- Le taux mensuel moyen équivalent à t .
- Le taux trimestriel moyen équivalent à t .
- Le taux semestriel moyen équivalent à t .
- Le taux quotidien moyen équivalent à t .

- 98** Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8 % pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?



99 De 30 % en 2018, le taux d'endettement d'un ménage est passé à 10 % en 2020.

1. Déterminer le taux d'évolution moyen annuel.
2. Si l'évolution se poursuit, quel sera le taux d'endettement en 2030 ?

100 En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

1. Quelle est sa population en 2020 ?
2. Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

101 La cote argus d'une voiture mise en circulation le 1^{er} avril 2015 est modélisée par la fonction $f(x) = 21\,345(1,2)^{-x}$ où x est le temps écoulé en années depuis le 1^{er} avril 2015.



1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter les résultats.
2. En déduire le taux de diminution annuel de la valeur de la voiture.
3. Cette voiture est revendue le 1^{er} octobre 2019.
 - a. Calculer la cote argus de cette voiture à cette date, puis le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat.
 - b. En déduire le taux mensuel moyen de la décote.

102 De 2010 à 2017, le nombre d'étudiants à l'université est passé de 1 437 000 à 1 584 800 pour atteindre 1 672 300 à la rentrée 2018.



1. Calculer le coefficient multiplicateur entre 2010 et 2017 puis entre 2017 et 2018.
2. En déduire le taux d'évolution moyen annuel du nombre d'étudiants entre 2010 et 2018.

103 Le gouvernement d'un pays envisage de baisser une taxe de 30 % en 5 ans.

1. Justifier que le pourcentage de baisse moyenne annuelle est de 6,89 %.

2. La première année, la taxe a baissé de 5 %, la deuxième de 1 % et la troisième de 3 %. Quel pourcentage de baisse annuel moyen doit décider ce gouvernement pour atteindre les objectifs en supposant que le pourcentage est le même les deux dernières années ?

104 **STMG** Paul, élève de terminale STMG, dispose de 300 euros qu'il souhaite placer sur un livret au taux annuel de 0,78 %.



1. Quel est son capital au bout de 36 mois ?
2. Quel sera son capital quand il aura doublé son âge ?
3. Combien d'années Paul devra-t-il patienter pour doubler son capital initial ?

105 **STL** On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.



1. Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?
2. Donner l'expression de la fonction exponentielle de base a .
3. Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

106 **STI2D** Une machine-outil achetée neuve coûte 20 000 euros. Son prix de revente baisse de 18 % par an.



1. Quel est le prix de revente au bout de 3 ans ? de 4 ans et demi ?
2. Au bout de combien d'années le prix de revente passera en dessous de 2 000 euros ?
3. Pour des raisons financières, la machine doit être vendue au bout de 37 mois. Quel sera alors son prix de revente ?



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
107 La suite $u_n = 2(0,8)^{-n}$ est géométrique et croissante.		
108 L'image de $-0,5$ par la fonction $f(x) = 2(4)^{-x}$ est 4.		
109 $\frac{3^{2,5} \times \sqrt{3}}{9^{0,5}}$ est égal à 9.		
110 La fonction $f(x) = -3,1(3,1)^x$ est décroissante.		
111 0 n'a pas d'antécédent par la fonction $f(x) = -2 \times (1,2)^x$.		
112 Si $f(x) = a^x$ alors $f(x) \times f(-x) = 1$.		
113 La courbe représentative de la fonction $f(x) = 2(0,8)^{-x}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.		
114 Un taux d'évolution moyen annuel n'est jamais négatif.		
115 Entre 2005 et 2011, le prix du gaz a augmenté de 65 %, ce qui correspond à un taux annuel moyen de 10,8 %.		
116 Si un taux annuel moyen est de 5,2 % alors l'évolution sur 10 ans est de plus de 52 %.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- 117** La fonction $f(x) = -3(0,5)^x$ a des images sur $\mathbb{R}$:
- a. positives. b. négatives. c. positives si $x < 0$ et négatives si $x > 0$.
- 118** $1 + 1,1^x + 1,21^x =$
- a. $\frac{1-1,1^{3x}}{1-1,1}$ b. $10 - 1,1^{3x}$ c. $10(1,1)^{3x}$
- 119** La fonction $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ est :
- a. définie sur $\mathbb{R}^+$. b. toujours strictement positive. c. toujours strictement croissante.
- 120** La fonction $f(x) = -2(1,5)^{-x}$ est :
- a. croissante. b. décroissante. c. positive.
- 121** L'équation $(2,1)^x = (2,1)^{-2x+1}$ admet sur $\mathbb{R}$:
- a. aucune solution. b. une seule solution. c. une infinité de solutions.
- 122** La solution t de l'équation $(1-t)^7 = 1,45$ est :
- a. $1,45^7 - 1$ b. $(1-1,45)^{\frac{1}{7}}$ c. $1-1,45^{\frac{1}{7}}$
- 123** Le taux annuel moyen correspondant à 5 augmentations de 2 % suivies de 3 diminutions de 1 % est :
- a. 7 % . b. moins de 7 % . c. plus de 7 % .

→ Vérifier les résultats p. 178

124 In English



For a man, the heart frequency during the recovery stage after a 8 minutes exercise test is modelled by $f(t) = 660(0,85)^t$ for t time in minutes and the numbers of beats per minute.

1. Give the variation of f .
2. Give the numbers of beats after a 10 minutes recovery.
3. Find the recovery time threshold for a heart rate below 115 beats.

125 COMPÉTENCE Modéliser

Les organismes vivants contiennent du carbone 14 (élément radioactif). À leur mort, ce carbone 14 présent se désintègre. La concentration en carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort (t milliers d'année) est modélisée par la fonction $f(t) = 15,3 \times (0,883)^t$.

1. Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$.
2. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration de carbone 14 égale à 7,24 unités. Estimer l'âge de ces fragments.
3. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus dater. Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

126 COMPÉTENCE Calculer



La longueur d'un glacier, en km, est donnée par la fonction $f(t) = 15,6 - 0,2(1,01)^t$ où t est le nombre d'années écoulées depuis l'année 2000.



1. Quelle était la longueur du glacier en 2000 ? Quelle était sa longueur en 2019 ?
2. À l'aide de la calculatrice, estimer l'année de disparition du glacier.

127 COMPÉTENCE Raisonner, calculer, communiquer

La résistance à la compression (en mégapascal) d'une dalle en béton est modélisée par la fonction $R(t) = 28(1 - (0,87)^t)$ où t est la durée de séchage en jours.

1. Calculer la résistance quand le béton vient d'être préparé, c'est-à-dire pour $t = 0$.
2. Pourquoi cette résistance n'atteindra jamais 28 mégapascals ?



3. On peut marcher sur cette dalle dès que la résistance est supérieure à 14 mégapascals. Après combien de jours de séchage est-il possible de marcher dessus ?

128 COMPÉTENCE Modéliser

Dans un pays, entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction $f(t) = 100(0,994)^t$ où t est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1. Calculer l'indice le 1^{er} janvier 2015 puis le 1^{er} mai 2017.
2. Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.

129 COMPÉTENCE Modéliser, calculer

Le nombre mensuel de visiteurs d'un musée est modélisé par $v(t) = 1\,520(1,05)^t$ où t est le temps en mois écoulé depuis l'ouverture en mai 2015.



1. Calculer le nombre de visiteurs le 1^{er} janvier 2017.
2. Calculer le nombre de visiteurs prévu le 1^{er} janvier 2022.
3. Calculer $\frac{v(1) - v(0)}{v(0)}$.

Interpréter ce calcul et le contextualiser.

4. Il faudra recruter un agent supplémentaire si le nombre de visiteurs dépasse 3 000. Déterminer la date de recrutement d'un agent.

► Créer un algorithme de construction des points de $f(x) = a^x$

CAPACITÉ Intercaler entre deux points un troisième point d'abscisse (respectivement d'ordonnée) la moyenne arithmétique (respectivement géométrique) des abscisses (respectivement des ordonnées) des deux points initiaux.

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Donner la forme explicite de la suite (u_n) .
2. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n) .
3. En remarquant que $1,5^{-n} = \frac{1}{1,5^n}$ pour n entier naturel, donner les différentes valeurs de $1,5^n$ pour $-7 < n < 7$ puis représenter le nuage de points $(n; 1,5^n)$.
4. Soit $B(n; 1,5^n)$ un point du nuage précédent.
 - a. Quelle est l'ordonnée du point A, d'abscisse $n - 1$, puis celle du point C, d'abscisse $n + 1$?
 - b. Comparer la moyenne arithmétique des abscisses des points A et C à l'abscisse de B.
 - c. Calculer $\sqrt{y_A \times y_C}$.

Aide : la moyenne arithmétique des abscisses des points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$

est $\frac{x_A + x_B}{2}$.

La moyenne géométrique des ordonnées des points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$ est $\sqrt{y_A \times y_B}$.

Remarque : chaque point du nuage a pour abscisse la moyenne arithmétique des abscisses des deux points qui l'entourent et a pour ordonnée la moyenne géométrique des ordonnées des points qui l'entourent.

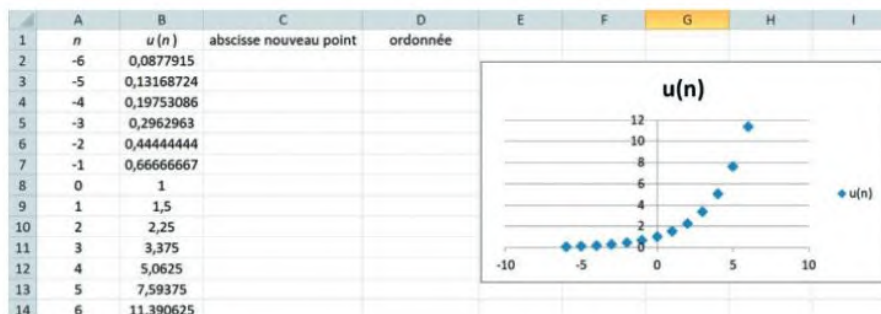


En salle informatique



lienmini.fr/10445-05

1. Reproduire sur tableur la feuille de calcul ci-dessous :



2. Saisir en C2 la formule `=MOYENNE(A2;A3)` et la copier jusqu'en C13 puis saisir en D2 la formule `=MOYENNE.GEOMETRIQUE(B2;B3)` et la copier jusqu'en D13.
3. Insérer ces nouveaux points sur le graphique.
- Aide :** faire un clic droit sur le graphique puis **Sélectionner des données** et **Ajouter**.
4. Refaire ce processus plusieurs fois : on retrouve la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1,5^x$.

SUJET RÉSOLU

BAC

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
130 Si $u_n = 2^n$, calculer u_3 .	$u_3 = 2^3$	8
131 Si $f(x) = 4^x$, calculer $f(0,5)$.	$a^{0,5} = \sqrt{a}$	$f(0,5) = 4^{0,5} = 2$
132 Simplifier : $1,5^{-2,3} \times 1,5^{5,3}$.	$a^p \times a^q = a^{p+q}$	$1,5^3$
133 Simplifier : $\frac{0,8^{2,5} \times 0,8^{-1}}{(0,8^{(1,5)^2})}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$0,8^{-1,5}$
134 Donner le sens de variation de $f(x) = -6(0,54)^x$ sur $\mathbb{R}$.	Étudier le signe de k et comparer la base à 1.	f croissante
135 Si le coefficient multiplicateur global est de 1,21 sur 2 évolutions, alors le taux moyen t est de :	On applique la formule $= 100 \left(\text{CM}^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$	$t = 10 \%$

136  Après administration d'un médicament, on modélise la concentration (en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$) de son principe actif dans le sang par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 15 (0,82)^t$ où t est le temps en heure après l'injection.

- Déterminer la concentration initiale.
- Déterminer la concentration au bout de deux heures.
- Étudier son sens de variation en justifiant.
- Au bout de combien de temps la concentration aura-t-elle diminué de moitié ?
- Estimer à l'aide de votre calculatrice au bout de combien de temps la concentration sera inférieure à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Méthode à appliquer

Solution rédigée

1. Le temps initial est le temps $t = 0$. On remplace t par 0 dans l'expression de $f(t)$.	1. $f(0) = 15 (0,82)^0 = 15 \times 1 = 15 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
2. Ici, $t = 2$. On remplace t par 2 dans l'expression de $f(t)$.	2. $f(2) = 15 (0,82)^2 = 10,086 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
3. $f(t)$ est de la forme ka^x avec $k=15$ et $a=0,82$. On applique les propriétés du cours sur le sens de variation. → Voir Exercice résolu 3 p. 59	3. $k = 15 > 0$ et $a = 0,82 < 1$ donc f est strictement décroissante.
4. Il faut résoudre $f(t) = 7,5$.	4. À la calculatrice, on trouve qu'au bout de 3 h 30 la concentration diminue de moitié ($f(t) < 7,5$).
5. Utiliser le menu TABL de la calculatrice.	5. Au bout de 36 h 52 min ($f(36,86) = 9,98 \cdot 10^{-3}$) la concentration sera inférieure à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

SUJET GUIDÉ

BAC

137 CAPACITÉ



- Modéliser une situation par une fonction du type $f(x) = ka^x$.

Wetube est un site spécialisé dans le streaming écologique sur Internet. La durée de chargement d'une vidéo (en secondes) en fonction du nombre d'internautes connectés x (en milliers) est modélisée par la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par $f(x) = 0,25(1,5)^x$.

- Quelle est la durée de chargement si 1 000 internautes sont connectés ? 5 000 internautes ?

Méthode Il s'agit de calculer les images par f de 1 et 5.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

- Calculer $f(8)$ et interpréter le résultat
- Étudier le sens de variation de f et interpréter le résultat.

Méthode On étudie le signe de k et on compare la base a à 1.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 59

- À l'aide de la calculatrice, estimer à partir de combien de personnes connectées la durée de chargement dépasse 3 secondes.

- Compléter ce programme python pour répondre à la question 4.

```
from math import*
def resol(k):
    t=1
    while (0.25*(1.25)**t < k):
        t=t+0.1
    return t
```

138 CAPACITÉ



- Modéliser une situation par une suite et par une fonction exponentielle de base a .

- Une ville comptait 20 000 habitants en 2015 et chaque année ce nombre a baissé de 7 %.

- Modéliser cette situation par une suite géométrique u , u_n représentant le nombre d'habitants en milliers à l'année $2015 + n$.

Méthode La forme explicite d'une suite géométrique est $u_n = u_0 \times q^n$ où q est la raison de la suite.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

- Calculer le nombre d'habitants en 2019.

- À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population sera inférieure à 15 000 habitants.

- Compléter cet algorithme pour répondre à la question c.

```
from math import*
def seuil(N):
    N=0
    U=20
    while (U>15):
        N=N+1
        U=20*(0.93**N)
    return(N)
```

- Représenter les premiers termes de cette suite par un nuage de points.

- On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation d'une fonction exponentielle $f(x) = ka^x$.

- Déterminer une expression de f .

Méthode Utiliser deux images par f et identifier k et a .

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

- Déterminer à l'aide de la calculatrice le mois et l'année où le nombre d'habitants sera divisé par 2.

139 CAPACITÉ

- Rechercher un taux moyen.

- On sait qu'entre 2002 et 2009, le nombre d'internautes en Chine est passé de 60 millions à 385 millions. Calculer le taux d'évolution moyen annuel du nombre d'internautes en Chine entre 2002 et 2009.

Méthode Le coefficient multiplicateur CM est le quotient $\frac{V_A}{V_D}$ où V_A est la valeur d'arrivée et V_D la valeur

de départ. On a donc : $t = 100 \left(\frac{V_A}{V_D}^{\frac{1}{t}} - 1 \right)$.

- Le nombre d'internautes a quadruplé entre 2009 et 2015.

- Calculer le taux moyen annuel entre 2009 et 2015.

Méthode Le coefficient multiplicateur CM est donné par le terme « a quadruplé »....

- Donner le nombre d'internautes en 2015.

- Le nombre a augmenté de 15 % entre 2015 et 2016 puis de 32 % entre 2016 et 2019.

Déterminer le taux annuel moyen entre 2015 et 2019 puis le nombre d'internautes en 2019 en Chine.

Méthode On applique la formule avec $n = 4$

$CM = 1,15 \times 1,32^3$ et $t = 100(CM^{\frac{1}{4}} - 1)$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 59

140



Une espèce animale est menacée depuis 1950. Le nombre d'animaux, en millions, de cette espèce est donné par la fonction $f(t) = 35(0,948)^t$ où t est le temps en années écoulé depuis 1950.

1. Calculer $f(0)$ et $f(50)$. Interpréter concrètement ces résultats.
2. Calculer le pourcentage de diminution de cette espèce en 50 ans puis le taux annuel moyen de baisse sur ces 50 ans.
3. Pourquoi cette espèce est-elle menacée ? Va-t-elle disparaître complètement ? Justifier.
4. À l'aide de la calculatrice, résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ et interpréter le résultat.
5. Compléter l'algorithme ci-dessous en langage python qui permet de répondre à la question 4.

```
from math import*
def resol(k):
    x=0
    while (          ):
        x=x+1
    return x
```

141



Le nombre, en milliards, de SMS envoyés par les Français peut être modélisé par la fonction $s(t) = 3,3(1,44)^t$ où t est le nombre d'années écoulées depuis 2005.

1. Calculer le nombre de SMS envoyés en 1 an.
2. Calculer $\frac{s(t+1)}{s(t)}$.
En déduire le taux annuel d'augmentation du nombre de SMS envoyés.
3. Répondre aux affirmations suivantes par vrai ou faux en justifiant.
 - a. La barre des 200 milliards de SMS a été atteinte en 2019.
 - b. Le taux d'augmentation en 10 ans est de 235 %.
 - c. Le taux annuel moyen sur 10 ans est de 23,5 %.

142



Partie A

Une dose d'un médicament est injectée dans le sang par piqûre intraveineuse. On suppose que le médicament se répartit instantanément dans le sang et que sa concentration initiale dans le sang est égale à $85 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. On admet que le corps élimine chaque heure 25 % du médicament. On considère la suite (C_n) où C_n désigne la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang n heures après l'injection avec n désignant un entier naturel. On a ainsi $C_0 = 85 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir à 0,01. Interpréter ces deux résultats.

2. Montrer que la suite (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Pour calculer à chaque heure la concentration de médicament présente dans le sang, on utilise un tableau.

	A	B
1	n	Cn
2	0	85,00
3	1	
4	2	
5	3	35,86
6	4	26,89
7	5	20,17
8	6	15,13
9	7	11,35
10	8	8,51
11	9	6,38
12	10	4,79

Quelle formule à recopier vers le bas, faut-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les premières valeurs de la suite (C_n) ?

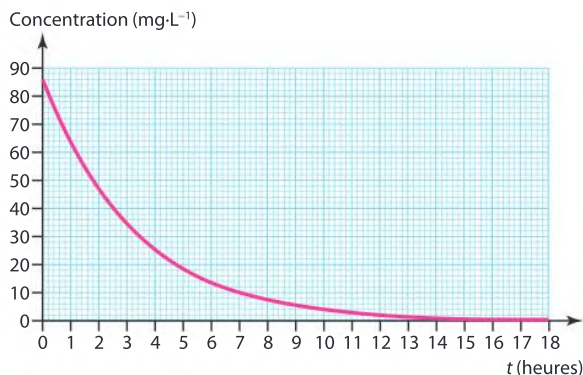
4. Exprimer C_n en fonction de n . En déduire la concentration de médicament dans le sang au bout de 14 heures. Arrondir à 0,01.

Partie B

Pour avoir des résultats plus précis, on admet que la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang t heures après l'injection peut être modélisée par la fonction G définie sur $[0; 19]$ par :

$$G(t) = 85 \times 0,75^t$$

La courbe représentative de la fonction G est tracée ci-dessous :



1. Par lecture graphique, avec la précision permise par le graphique, déterminer :

- a. La concentration de médicament présente dans le sang au bout de 4 heures et 30 minutes.
- b. Le temps à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 50 % de la concentration initiale.

2. Déterminer par le calcul une valeur approchée à 0,1 heure près du temps t_0 à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 20 % de la concentration initiale, puis exprimer cette valeur approchée en heures et minutes.

4

Fonction logarithme décimal

CAPACITÉS

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.



On estime le niveau sonore d'une moto aux alentours de 90 décibels. Le seuil de douleur de l'oreille humaine se situe à environ 120 décibels.

Le niveau sonore de ces deux motos côte à côte est-il supportable pour les spectateurs ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 77

Découvrons si les décibels s'ajoutent

2:57

lienmini.fr/10445-60

Lucy Glöckner lors de son exploit au bol d'Or 2017.

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde et de Première

Questions
Flash

Diaporama

12 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-61

1 Calculer avec des puissances

Soit n un entier naturel.

- $10^n = 1\ 0...0$ (1 suivi de n zéros).
- $10^{-n} = 0,0...0\ 1$ (n chiffres à droite de la virgule).

EXEMPLES : $10^8 = 1\ 00\ 000\ 000$; $10^{-4} = 0,000\ 1$.

Soit a un nombre réel non nul et m et n deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$

2 Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux nombres réels appartenant à l'intervalle I .

- Dire que f est croissante sur l'intervalle I signifie que : **si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.**

Les images sont rangées dans **le même ordre** que les nombres a et b .

- Dire que f est décroissante sur l'intervalle I signifie que : **si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.**

Les images sont rangées dans **l'ordre contraire** de celui des nombres a et b .

- Une fonction **monotone** sur un intervalle I est une fonction soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse sans utiliser la calculatrice puis justifier.

	a	b	c	Aide
1. -10^{-3} est égal à :	-0,001	0,001	1 000	1
2. $3,1 \times 10^4$ est égal à :	3 100	31 000	310 000	1
3. $(2^3 \times 2)^2$ est égal à :	2^6	2^8	2^5	1
4. $10^{-8} \times 10^6$ est égal à :	10^{-2}	10^{-14}	10^2	1
5. $2,5 \times 10^{-3}$ est égal à :	0,025	-0,002 5	0,002 5	1
6. La fonction cube est :	croissante sur $\mathbb{R}$.	décroissante sur $\mathbb{R}$.	n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.	2
7. On sait qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I . Alors la fonction $2f : x \mapsto 2f(x)$ est :	décroissante sur I .	croissante sur I .	n'est pas monotone sur I .	2

→ Voir **Corrigé** p. 178

OBJECTIF Définir le logarithme décimal → Cours 1A p. 78

Un virus informatique se propage sur les ordinateurs *via* un email comportant une fausse pièce jointe : un clic pour ouvrir la pièce jointe contamine l'ordinateur où est lu le message. On estime que chaque heure, le nombre d'ordinateurs infectés est multiplié par 10. La ville de Downtown, où se propage le virus, compte plus de 50 000 ordinateurs, que ce soit chez les particuliers ou dans les entreprises.



1. On note a_n le nombre d'ordinateurs infectés à la n ème heure. On pose $n = 0$ l'instant où le premier ordinateur a été infecté. Ainsi $a_0 = 1$.
 - a. Déterminer les valeurs des termes a_1 et a_2 . Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
 - b. Exprimer a_n en fonction de n .

2. On considère la fonction $f : x \mapsto 10^x$ définie sur $[0 ; 10]$. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	1	2		4	5
$f(x)$				1 000		

3. On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction notée **log**, et définie sur $]0 ; +\infty[$ telle que $\log(10^x) = x$.

Ainsi si on a $10^x = y$ où $y > 0$, alors $\log(y) = x$.

Réciproquement : si, pour $y > 0$, $\log(y) = x$, alors $y = 10^x$.

Exemple : $\log(10^3) = 3$; $\log(10^2) = 2$.

Quelle est la valeur de $\log(1)$? de $\log(10)$?

4. a. À l'aide de la calculatrice et de la touche **log**, recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant éventuellement $\log(y)$ à 0,01 près :

y	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	55 000	60 000
$\log(y)$							

- b. En utilisant ce tableau, dire au bout de combien de temps seront infectés tous les ordinateurs de la ville. Donner le résultat en heures, puis en heures et minutes. De quelle équation ce résultat est-il une solution approchée ?

OBJECTIF Utiliser les propriétés de la fonction logarithme décimal → Cours 1B et D p. 78

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \log(x)$.

f est la fonction logarithme décimal.

1. Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
2. Quel semble être le sens de variation de la fonction logarithme décimal ?
3. On admet que la fonction logarithme décimal est croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - a. Comparer les nombres suivants :
 - $\log(3,5)$ et $\log(3,05)$;
 - $\log(\sqrt{2})$ et $\log(1,4)$;
 - $\log(3)$ et $\log(\pi)$.
 - b. Sachant que $\log(1) = 0$, en déduire le signe de $\log(x)$ lorsque $x > 1$ et le signe de $\log(x)$ lorsque $x < 1$.
 - c. En déduire le tableau de signes de la fonction logarithme décimal sur $]0 ; +\infty[$.

3 Où l'image d'un produit est la somme des images

OBJECTIF Connaître les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal → Cours 2 p. 80

Partie A

1. On sait que $\log(10^x) = x$ et que $\log(10^y) = y$. À quoi est égal $\log(10^x \times 10^y)$?

Recopier et compléter : $\log(10^x \times 10^y) = \dots + \dots$

De manière générale, on admettra que pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

2. En utilisant le résultat admis précédemment, à quoi est égal $\log(a^2)$, où a est un réel strictement positif ?

On admettra que, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n , $\log(a^n) = n\log(a)$.

3. Soit b un réel strictement positif. On sait que $b \times \frac{1}{b} = 1$. En utilisant cette égalité, montrer que :

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b).$$

Partie B

Le niveau d'intensité sonore N d'un son, exprimé en décibels (dB), est donné par la relation :

$N = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ où I est l'intensité sonore de la source de bruit (exprimée en Watts par mètre carré).

1. Montrer que si on multiplie par 2 l'intensité sonore I , alors cela revient à augmenter de 3 dB environ le niveau sonore N .

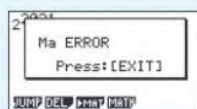
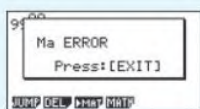
2. L'intensité sonore d'une moto en course est de 90 dB. Sachant que les intensités sonores de deux motos s'ajoutent, quel est le niveau sonore des deux motos côte à côte ?



4 Utilisation du logarithme décimal dans l'écriture des nombres

OBJECTIF Obtenir le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un très grand nombre → Cours 2 p. 80

1. Voici ce qu'affiche une calculatrice lorsque l'on tape 99^{99} ou bien 2^{2021} .



Certaines calculatrices n'ont pas les capacités suffisantes pour effectuer ces calculs.

La notation $\log$ désigne la fonction logarithme décimal.

a. Soit un nombre entier positif N comportant 2 chiffres. N est donc compris entre 10 et 99. On a donc l'encadrement suivant : $10^1 \leq N \leq 10^2 - 1$, ce qui peut s'écrire aussi $10^1 \leq N < 10^2$.

Montrer que l'on a : $1 \leq \log(N) < 2$.

b. Soit N un entier positif à 3 chiffres. Montrer que $2 \leq \log(N) < 3$.

c. De manière générale, soit N un entier positif à p chiffres. Montrer que $p - 1 \leq \log(N) < p$.

Le nombre p de chiffres de l'entier positif N est donc le premier entier supérieur (ou égal) à son logarithme décimal.

On note $\text{ENT}(x)$ le nombre entier tel que $\text{ENT}(x) \leq x < \text{ENT}(x) + 1$; on a donc : $p = \text{ENT}(\log(N)) + 1$.

2. Application : déterminer le nombre de chiffres des nombres 99^{99} et 2^{2021} .

1

Fonction logarithme décimal

A Définition du logarithme décimal

DÉFINITION Pour tout nombre réel strictement positif b , il existe un unique nombre réel x tel que $10^x = b$.
Ce nombre est appelé **logarithme décimal de b** .

REMARQUE • $10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b)$.

EXEMPLES

- $10^4 = 10\,000 \Leftrightarrow 4 = \log(10\,000)$
- $10^{-3} = 0,001 \Leftrightarrow -3 = \log(10^{-3})$

DÉFINITION On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe son logarithme décimal, c'est-à-dire la fonction définie par : $x \mapsto \log(x)$.

REMARQUES

- La fonction logarithme décimal est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Pour tout nombre réel x , $\log(10^x) = x$.

EXEMPLES

- $\log(10^4) = 4$
- $\log(10^{-3}) = -3$

Cas particuliers

$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$ et pour tout entier relatif n , $\log(10^n) = n$.

EXEMPLES

- $\log(1\,000) = \log(10^3) = 3$
- $\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$.

→ Voir **Exercice résolu 1**

B Sens de variation de la fonction logarithme décimal

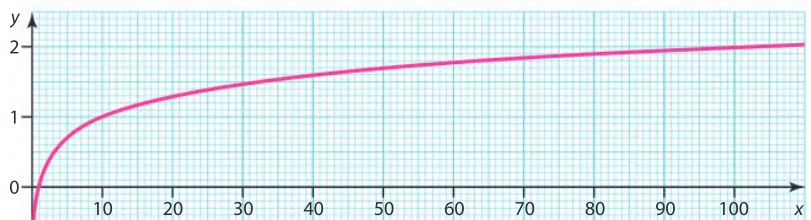
PROPRIÉTÉ (admise) La fonction logarithme décimal est **strictement croissante** sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Ce qui entraîne :

$$a \leq b \Leftrightarrow \log(a) \leq \log(b).$$

REMARQUE • $a = b \Leftrightarrow \log(a) = \log(b)$.

C Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme décimal est représentée ci-contre dans un repère orthogonal du plan.



D Tableau de signes de la fonction log

La stricte croissance de la fonction $\log$ et $\log(1) = 0$ permet de dresser le tableau de signes de la fonction $\log$.

→ Voir **Exercice résolu 2**

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\log(x)$	-	0	+

Notation

On note $\log(b)$ le **logarithme décimal de b** .

Exercice résolu

1

Utiliser la définition du logarithme décimal

Écrire sous forme décimale chacun des nombres suivants :

1. $\log(10^3)$
2. $\log(10^{-6})$
3. $\log(0,001)$
4. $\log(10\,000)$
5. $\log(0,01)$
6. $\log(0,000\,1)$

Méthode

Pour écrire sous forme décimale un nombre avec la définition du logarithme décimal

- 1 On écrit les nombres à l'aide d'une puissance de 10 si besoin.
- 2 On applique la définition du logarithme décimal.

Solution

1. $\log(10^3) = 3$.
2. $\log(10^{-6}) = -6$.
3. $\log(0,001) = \log(10^{-3}) = -3$.
4. $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$.
5. $\log(0,01) = \log(10^{-2}) = -2$.
6. $\log(0,000\,1) = \log(10^{-4}) = -4$.

→ Voir Exercices 25 à 28 p. 84

Exercice résolu

2

Utiliser le sens de variation de la fonction logarithme décimal pour comparer deux images

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

1. $\log(\pi)$ et $\log(3,14)$.
2. $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$.
3. $\log(3 \times 10^{-3})$ et $\log(3 \times 10^{-4})$.
4. $\log(1,414\,2)$ et $\log(1,414\,3)$.
5. $\log(2,56 \times 10^{-2})$ et $\log(2\,570 \times 10^{-5})$.

Méthode

Pour comparer deux images avec le sens de variation de la fonction log

- 1 On compare les deux nombres situés entre parenthèses.
- 2 Puis on utilise la croissance de la fonction logarithme décimal sur l'intervalle $]0; +\infty[$ pour comparer les images de ces deux nombres.

Solution

1. $\log(\pi)$ et $\log(3,14)$
On sait que $\pi > 3,14$ donc $\log(\pi) > \log(3,14)$ puisque la fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2. $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$
 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\log(\sqrt{2}) < \log(\sqrt{3})$.
3. $\log(3 \times 10^{-3})$ et $\log(3 \times 10^{-4})$
 $10^{-3} > 10^{-4}$ donc $\log(3 \times 10^{-3}) > \log(3 \times 10^{-4})$.
On conclut que $\log(3 \times 10^{-3}) > \log(3 \times 10^{-4})$.
4. $\log(1,414\,2)$ et $\log(1,414\,3)$
Comme $1,414\,2 < 1,414\,3$, on a donc :
 $\log(1,414\,2) < \log(1,414\,3)$.
5. $\log(2,56 \times 10^{-2})$ et $\log(2\,570 \times 10^{-5})$
 $2,56 \times 10^{-2} = 0,025\,6$ et $2\,570 \times 10^{-5} = 0,025\,7$
donc $2,56 \times 10^{-2} < 2\,570 \times 10^{-5}$.
Grâce à la stricte croissance de la fonction log, on déduit que $\log(2,56 \times 10^{-2}) < \log(2\,570 \times 10^{-5})$.

→ Voir Exercices 30 à 32 p. 84

2

Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

THÉORÈME (admis) Pour tous nombres réels strictement positifs a et b ,
 $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

EXEMPLE • $\log(200) = \log(2 \times 100) = \log(2) + \log(100) = \log(2) + \log(10^2) = \log(2) + 2$.
 La calculatrice donne $\log(2) \approx 0,301$ d'où $\log(200) \approx 2,301$.

Le théorème ci-dessus permet de démontrer les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS a et b sont deux réels strictement positifs et n est un entier relatif.
 $\log(a^n) = n\log(a)$ ① $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$ ② $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ ③

DÉMONSTRATION DE LA RELATION ① SUR QUELQUES VALEURS DE n

Pour $n = 2$, $\log(a^2) = \log(a \times a) = \log(a) + \log(a)$ d'après le théorème. D'où $\log(a^2) = 2\log(a)$.

Pour $n = 3$, $\log(a^3) = \log(a \times a^2) = \log(a) + \log(a^2) = \log(a) + 2\log(a) = 3\log(a)$.

La relation ② a été découverte dans l'activité 3. La relation ③ découle de la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ et de la relation ②, en appliquant le théorème précédent.

PROPRIÉTÉ (admise) Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :
 $\log(a^x) = x\log(a)$

EXEMPLES

- $\log(3 \times 10^3) = \log(3) + \log(10^3) = \log(3) + 3$
- $\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$ • $\log\left(\frac{3^2}{2^3}\right) = \log(3^2) - \log(2^3) = 2\log(3) - 3\log(2)$

→ Voir Exercice résolu 3

3

Équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

PROPRIÉTÉS (admisses) Soit x et y deux réels strictement positifs.
 $\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$ $\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$

EXEMPLES

- Résoudre l'équation $2^x = 100$.
 $2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(100)$
 $\Leftrightarrow x\log(2) = \log(10^2) = 2$
 $\Leftrightarrow x = \frac{2}{\log(2)}$
- Résoudre l'inéquation $5^x < 0,0001$.
 $5^x < 0,0001 \Leftrightarrow \log(5^x) < \log(10^{-4})$
 $\Leftrightarrow x\log(5) < -4$
 $\Leftrightarrow x < \frac{-4}{\log(5)}$
 $(\log(5) > 0 : \text{l'inégalité est conservée}).$

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu

3

Simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales

1. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$:
 a. $\log(8 \times 10^3)$ b. $\log(1\,600)$ c. $\log(0,32)$
2. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(3)$:
 a. $\log(27)$ b. $\log(0,09)$ c. $\log(0,008\,1)$
3. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(a)$, où a est un nombre réel strictement positif :
 a. $\log(a^2 \times a^3)$ b. $\log\left(\frac{a^7}{a^3}\right)$ c. $\log\left(\frac{1}{a^3}\right)$

Solution

1. a. $\log(8 \times 10^3) = \log(2^3 \times 10^3) = \log(2^3) + \log(10^3) = 3\log(2) + 3$.
 b. $\log(1\,600) = \log(16 \times 10^2) = \log(2^4) + \log(10^2) = 4\log(2) + 2$.
 c. $\log(0,32) = \log(32 \times 10^{-2}) = \log(2^5 \times 10^{-2}) = \log(2^5) + \log(10^{-2}) = 5\log(2) - 2$.
2. a. $\log(27) = \log(3^3) = 3\log(3)$.
 b. $\log(0,09) = \log(9 \times 10^{-2}) = \log(3^2) + \log(10^{-2}) = 2\log(3) - 2$.
 c. $\log(0,008\,1) = \log(81 \times 10^{-4}) = \log(3^4) + \log(10^{-4}) = 4\log(3) - 4$.
3. a. $\log(a^2 \times a^3) = \log(a^2) + \log(a^3) = 2\log(a) + 3\log(a) = 5\log(a)$.
 b. $\log\left(\frac{a^7}{a^3}\right) = \log(a^7) - \log(a^3) = 7\log(a) - 3\log(a) = 4\log(a)$.
 c. $\log\left(\frac{1}{a^3}\right) = -\log(a^3) = -3\log(a)$.

Méthode

Pour simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales

- 1 On **identifie** l'opération algébrique qui figure entre les parenthèses et, si besoin, on fait apparaître une puissance de 10.
- 2 On **applique** les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal.

→ Voir Exercices 39 à 43 p. 85

Exercice résolu

4

Résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ (x réel), une inéquation du type $a^n < b$ (n entier)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $2\,000 \times 0,4^x = 3\,000$
2. $15 \times 2^x < 8$

Méthode

Pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ (x réel), une inéquation du type $a^n < b$ (n entier)

- 1 On **ramène** l'équation (ou l'inéquation) à la forme $a^x = b$ (ou $a^x < b$).
- 2 On **applique** le logarithme décimal aux deux membres de l'équation (ou de l'inéquation).
- 3 On **simplifie** les écritures en utilisant la propriété $\log(a^x) = x\log(a)$.
- 4 On **applique** les opérations algébriques sur l'équation (ou l'inéquation) pour isoler l'inconnue x .

Solution

1. $2\,000 \times 0,4^x = 3\,000$ donne $0,4^x = \frac{3\,000}{2\,000}$ soit $0,4^x = 1,5$.

$\log(0,4^x) = \log(1,5)$ d'où $x\log(0,4) = \log(1,5)$.

On obtient $x = \frac{\log(1,5)}{\log(0,4)}$ ($x \approx -0,442$ à $0,001$ près par excès).

2. $15 \times 2^x < 8$ donne $2^x < \frac{8}{15}$.

$\log(2x) < \log\left(\frac{8}{15}\right)$ d'où $x\log(2) < \log\left(\frac{8}{15}\right)$.

Comme $\log(2) > 0$, on obtient $x < \frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)}$.

$\frac{\log\left(\frac{8}{15}\right)}{\log(2)} \approx -0,907$ (à 10^{-3} près par défaut).

→ Voir Exercices 47, 48, 51, 52 p. 85

1 Fonction logarithme décimal

- Pour tout nombre réel strictement positif b , il existe un unique nombre réel x tel que $10^x = b$. Ce nombre est appelé **logarithme décimal** de b . On note **$\log(b)$** le logarithme décimal de b .

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b).$$

- On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe son logarithme décimal, c'est-à-dire la fonction définie par : $x \mapsto \log(x)$.

La fonction logarithme décimal est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

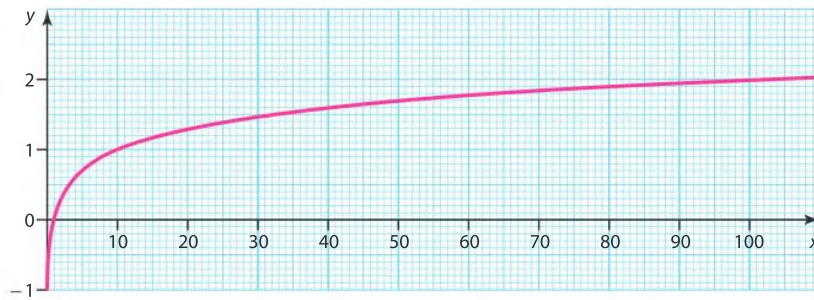
Pour tout nombre réel x , **$\log(10^x) = x$** .

- Cas particuliers** : **$\log(1) = 0$** ; **$\log(10) = 1$** et pour tout entier naturel n , **$\log(10^n) = n$** .

- La fonction logarithme décimal est **strictement croissante** sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, **$a \leq b \Leftrightarrow \log(a) \leq \log(b)$** .

- Dans un repère orthogonal du plan, la **courbe représentative** de la fonction logarithme décimal est :



- Tableau de signes de la fonction logarithme décimal**

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\log(x)$	-	0	+

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , **$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$** .

- a et b étant deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, on a :

$$\log(a^n) = n\log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

- Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x : **$\log(a^x) = x\log(a)$** .

3 Équations du type $a^x = b$ et inéquations du type $a^x < b$

- Soit x et y deux réels strictement positifs.

$$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$$

1 Questions Flash

Diaporama

12 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-62

Calculs avec le logarithme décimal

Dans les exercices 2 à 4, donner la forme décimale des nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

- 2** a. $\log(100)$ b. $\log(1\ 000)$
c. $\log(10\ 000)$ d. $\log(1\ 000\ 000)$
- 3** a. $\log(0,1)$ b. $\log(0,001)$
c. $\log(0,000\ 1)$ d. $\log(0,000\ 000\ 1)$
- 4** a. $\log(10^2 \times 10^{-1})$ b. $\log(10^6 \times 10^{-4})$
c. $\log(10^{-5} \times 10^{-2})$ d. $\log(0,1 \times 0,001)$

Sens de variation de la fonction logarithme décimal

5 Comparer dans chaque cas les deux nombres sans utiliser la calculatrice :

- a. $\log(0,003)$ et $\log(0,03)$.
b. $\log(3 \times 10^{-1})$ et $\log(30 \times 10^{-3})$.
c. $\log\left(\frac{5}{7}\right)$ et $\log\left(\frac{5}{11}\right)$. d. $\log(2)$ et $\log\left(\frac{2}{3}\right)$.

6 Comparer dans chaque cas les nombres suivants :
a. $\log(0,2)$ et $\log(0,004)$. b. $\log(0,25)$ et $\log(0,205)$.
c. $\log(0,0039)$ et $\log(0,039)$.

7 Donner le signe des nombres suivants en les comparant avec $\log(1)$:

- a. $\log(0,015)$ b. $\log(1,001)$
c. $\log(0,999\ 9)$ d. $\log(100 \times 10^{-3})$

8 Dans chacun des cas suivants, encadrer le nombre donné à l'aide de deux entiers relatifs, sans utiliser la calculatrice.

- a. $\log(0,02)$ b. $\log(0,25)$
c. $\log(7,5)$ d. $\log(2\ 021)$

Propriétés algébriques du logarithme décimal

Dans les exercices 9 à 12, sans utiliser la calculatrice, exprimer les nombres suivants en fonction de $\log(2)$ ou $\log(5)$.

- 9** a. $\log(200)$ b. $\log(400)$
c. $\log(80)$ d. $\log(32)$

- 10** a. $\log(0,2)$ b. $\log(0,004)$
c. $\log(0,08)$ d. $\log(0,032)$

- 11** a. $\log(25)$ b. $\log(125)$
c. $\log(50)$ d. $\log(25\ 000)$

- 12** a. $\log(0,5)$ b. $\log(0,002\ 5)$
c. $\log(0,625)$ d. $\log(0,005)$

13 Exprimer en fonction de $\log(2)$ et $\log(3)$ les expressions suivantes :

- a. $\log(6)$ b. $\log(24)$ c. $\log(18)$ d. $\log(1\ 200)$

14 Exprimer en fonction de $\log(5)$ les nombres suivants :

- a. $\log(500)$ b. $\log(0,05)$
c. $\log(50\ 000)$ d. $\log(0,25)$

15 Exprimer en fonction de $\log(3)$ les nombres suivants :

- a. $\log(9)$ b. $\log(27)$ c. $\log(0,3)$ d. $\log(30)$

Dans les exercices 16 et 17, exprimer chaque somme ou différence à l'aide d'un seul log.

Coup de
pouce

$$\bullet \log(3) - \log(2) = \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(1,5)$$

- 16** a. $\log(25) + \log(2)$ b. $\log(27) - \log(3)$
c. $\log(4) - \log(8)$ d. $\log(100) + \log(0,25)$

- 17** a. $\log(0,1) + \log(200)$ b. $\log(500) - \log(125)$
c. $\log(0,002) + \log(10\ 000)$

Équations du type $a^x = b$ et inéquations du type $a^x < b$

18 Parmi les nombres donnés ci-dessous, un seul est solution de l'équation $10^x = 50$. Lequel ?

- a. $\log(50)$ b. $\log(5)$ c. $\log(40)$ d. 5

19 Parmi les nombres donnés ci-dessous, un seul est solution de l'équation $\log(x) = 2$. Lequel ?

- a. 100 b. 0,01 c. 4 d. $\log(2)$

Dans les exercices 20 à 23, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes.

- 20** a. $10^x = 1$ b. $10^x = 0,001$ c. $2^x = 128$ d. $5^x = 0,25$

- 21** a. $3 \times 10^x = 0,000\ 1$ b. $30 \times 2^x = 60$
c. $1\ 000 \times 5^x = 3\ 000$ d. $4 + 2^x = 10$

- 22** a. $2^x < 32$ b. $0,3^x > 10$ c. $5^x \leq 125$ d. $0,8^x \geq 5$

- 23** a. $4 \times 5^x < 100$ b. $0,5^x + 10 \leq 35$
c. $20 \times 1,2^x > 100$ d. $1\ 500 \times 0,8^x \geq 3\ 000$

Fonction logarithme décimal

→ Aide **Cours 1** p. 78

Question de cours

- 24** 1. Soit n un entier naturel. À quoi est égal $\log(10^n)$?
2. Comparer $\log(0,0001)$ et $\log(10^{-6})$.

- 25** Écrire sous forme décimale les nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

- a. $\log(0,1)$ b. $\log(100)$
c. $\log(0,000\ 000\ 001)$ d. $\log(1\ 000\ 000\ 000)$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 79

- 26** Écrire sous forme décimale les nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

- a. $\log(10^6)$ b. $\log(10^{121})$
c. $\log(10^{-12})$ d. $\log(10)$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 79

- 27** Déterminer sans calculatrice l'image par la fonction logarithme décimal de chacun des nombres suivants :

- a. 100 000 b. 10 000 000
c. 10^{21} d. 10^{2021}

- 28** Déterminer sans calculatrice l'image par la fonction logarithme décimal de chacun des nombres suivants :

- a. 0,000 1 b. 0,000 01
c. 0,000 000 01 d. 10^{-9}

- 29** À l'aide de la calculatrice, reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième près) :

x	2	3	4	5	6
$\log(x)$					

- 30** Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\log(0,01)$; $\log(1,1)$; $\log(1,001)$; $\log(0,001)$.

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 79

- 31** Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants sans utiliser la calculatrice.

$\log(0,2)$; $\log(0,004)$; $\log(0,25)$; $\log(0,205)$; $\log(0,0039)$; $\log(0,039)$; $\log(0,199)$.

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 79

- 32** Ranger dans l'ordre décroissant les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

$\log(2 \times 10^{-5})$; $\log(2,4 \times 10^{-3})$; $\log(25 \times 10^{-2})$; $\log(0,24 \times 10^{-1})$; $\log(204 \times 10^{-5})$.

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 79

- 33** Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \log(x^2)$.

1. Avec la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

Coup de pouce

- fenêtre d'affichage : $x_{\min} = 1$ et $x_{\max} = 10$; $y_{\min} = 0$ et $y_{\max} = 5$.

2. Quel semble être le sens de variation de la fonction f ?
3. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

- 34** Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Avec la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

Coup de pouce

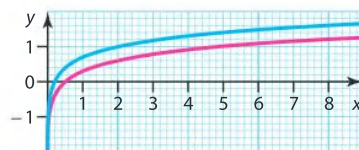
- fenêtre d'affichage : $x_{\min} = 1$ et $x_{\max} = 10$; $y_{\min} = 0$ et $y_{\max} = 5$.

2. Quel semble être le sens de variation de la fonction f ?
3. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

- 35** On a représenté dans le repère ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies sur $]0 ; 9]$ par :

$$f(x) = \log(5x) \text{ et } g(x) = \log(2x).$$

Identifier chacune des courbes en justifiant votre réponse.



- 36** On a représenté dans le repère ci-dessous les courbes des fonctions f et g définies sur $]0 ; 10]$ par $f(x) = \log(2x)$ et $g(x) = \log(x^2)$.

1. Identifier chacune des courbes en justifiant votre réponse.



Avec la précision permise par le graphique :

2. Lire graphiquement l'image de 5 par la fonction f et l'image de 6 par la fonction g .
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

→ Aide Cours 2 p. 80

Question de cours

- 37** 1. Soit a et b deux nombres strictement positifs. À quoi est égal $\log(a \times b)$?
2. Soit $a > 0$. À quoi est égal $\log\left(\frac{1}{a}\right)$?

38  Sans calculatrice, déterminer la valeur de chacun des nombres suivants :

- a. $\log(1\ 000)$ b. $\log(100 \times 10^{-8})$
c. $\log(10^{-9} \times 10^7)$ d. $\log(0,000\ 1)$

39  Sachant que $\log(5) \approx 0,7$ à 0,1 près, déterminer sans calculatrice une valeur approchée des nombres suivants à 0,1 près :

- a. $\log(0,5)$ b. $\log(0,05)$
c. $\log(25)$ d. $\log(500)$

40  Sachant que $\log(2) \approx 0,3$ à 0,1 près, déterminer sans calculatrice une valeur approchée des nombres suivants à 0,1 près :

- a. $\log(0,2)$ b. $\log(2\ 000)$
c. $\log(8)$ d. $\log(20)$

41 Exprimer en fonction de $\log(a)$ les expressions suivantes, a étant un réel strictement positif :

- a. $\log(a^3)$ b. $\log(a^5) - \log(a^2)$
c. $\log(a^{-3}) + \log(a^2)$ d. $\log(10a^5)$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 81

42 Exprimer en fonction de $\log(a)$, a étant un réel strictement positif, les expressions suivantes :

- a. $\log\left(\frac{1}{a}\right)$ b. $\log\left(\frac{1}{a^2}\right)$
c. $\log\left(\frac{a^5}{a^2}\right)$ d. $\log\left(\frac{10}{a}\right)$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 81

43 Exprimer en fonction de $\log(2)$ et $\log(5)$ les nombres suivants :

- a. $\log(20)$ b. $\log(40)$
c. $\log(200)$ d. $\log(250)$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 81

Vrai ou faux

44  Sans calculatrice, indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- $\log(25)$ est supérieur à $3\log(5)$.
- $\log(0,001)$ est inférieur à $\log(10^{-4})$.
- $\log(0,01) - 2\log(0,1) = 0$.

Équations du type $a^x = b$ et inéquations du type $a^x < b$

→ Aide Cours 3 p. 80

Question de cours

- 45** 1. Quelle est la solution de l'équation $10^x = 3$?
2. Quelle est la solution de l'équation $3^x = 2$?
3. 2 est-il une solution de l'inéquation $3^x < 4$?

QCM

46 1. Parmi les nombres suivants, quelle est la solution de l'équation $\log(x) = 3$?

- a. $x = \log(3)$ b. $x = \frac{3}{\log(3)}$ c. $x = 10^{-3}$ d. $x = 10^3$

2. Parmi les valeurs suivantes de x , une seule est solution de l'équation $\log(2x) = 0$, laquelle ?

- a. $x = 0,2$ b. $x = 0,5$ c. $x = -2$ d. $x = 0$

3. Parmi les valeurs suivantes de x , une seule est solution de l'équation $10^x = 6$, laquelle ?

- a. $x = 0,6$ b. $x = \log(6)$ c. $x = \log(0,6)$
d. $x = 10^6$

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $5^x = 10$

b. $2^x = -1$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 81

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $3^x = 0$

b. $2 \times 3^x = 20$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 81

49 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\log(x) = -1$

b. $\log(x) = 3$

50 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $2\log(x) = 1$

b. $-3\log(x) + 1 = 4$

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $5^x \leq 10$

b. $2^x > 10$

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $4 \times 2^x \leq 16$

b. $5 \times 3^x \geq 25$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 81

53 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\log(x) < 1$

b. $2\log(x) > 4$

Vrai ou faux

54 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- 100 est une solution de l'équation $\log(x) + 1 = 3$.
- 0,1 est une solution de l'équation $2\log(x) - 1 = -3$.
- $3\log(x) + 1 = -2$ a pour solution $x = 10$.
- $\log(x^2) + \log(x) = 3$ a pour solution $x = 10$.

Fonction logarithme décimal

55 Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant sans utiliser la calculatrice :

x	0,1			0,001	
$\log(x)$		0	2		-5

56 Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant sans utiliser la calculatrice :

x	0,01			0,000 1	
$\log(x)$		1	-2		-1

57 Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir éventuellement au dixième près) :

x	1	5	25	125	625
$\log(x)$					

58 Encadrer le logarithme décimal de chacun des nombres suivants par deux entiers :

- a. 0,000 2 b. 201 000
c. 2 500 d. 0,05

Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

59 Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant les propriétés de la fonction logarithme décimal (arrondir éventuellement à 0,1 près $\log(x)$) :

x	1	2	5	10	20
$\log(x)$ arrondi à 0,1 près		0,3			

60 Exprimer le logarithme décimal de chacun des nombres suivants en fonction de $\log 3$ et de $\log 7$:

- a. 0,00147
b. 11 907
c. $2\,700 \times 490$

61 En astronomie, la magnitude apparente, notée M , revient à mesurer combien une étoile apparaît brillante vue de la Terre.

L'astronome Norman Pogson (1829-1891) a introduit la formule suivante :

$$M = -2,5 \log(E) + k$$

où E est l'éclat de l'étoile observée (puissance reçue par unité de surface) et k est une constante indépendante du choix de l'étoile.



L'étoile Véga a une magnitude apparente fixée à 0. On note E_0 l'éclat apparent de Véga.

- Exprimer la constante k à l'aide de $\log(E_0)$.
- Montrer alors que $M = -2,5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$.
- a. Si l'étoile observée est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga, quel est le signe de sa magnitude apparente ?
b. Que peut-on dire de sa magnitude par rapport à celle de Véga ?
- Déterminer la magnitude apparente des astres suivants d'éclat E : Vénus : $E = 69,18 E_0$; Mars : $E = 8,32 E_0$; Neptune : $E = 6,9 \times 10^{-4} E_0$. On arrondira à 0,1 près.
- Déterminer l'éclat des astres suivants de magnitude apparente M en fonction de E_0 :
Soleil : $M = -26,8$; Pleine lune : $M = -12,6$; Uranus : $M = 5,7$.

Équations du type $a^x = b$ et inéquations du type $a^x > b$

62 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $2^x = 5$
b. $3^x = 10$
c. $5^{x+1} = 25$

63 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $\log(2x) = 2$
b. $\log(x+1) = 3$

64 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $\log(2x+1) = 1$
b. $\log(3x-2) = 0$

65 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $5^x > 1$
b. $2^x \leq 1$

66 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $\log(2x) > 1$
b. $\log(3x+1) \leq 0$

- 67**   **STMG** Un restaurant d'une station balnéaire ouvre au début du printemps. Le gérant relève le nombre de repas servis chaque semaine.



Les résultats des quatre premières semaines sont donnés dans le tableau suivant :

Rang de la semaine n	1	2	3	4
Nombre de couverts y_n	78	108	159	224

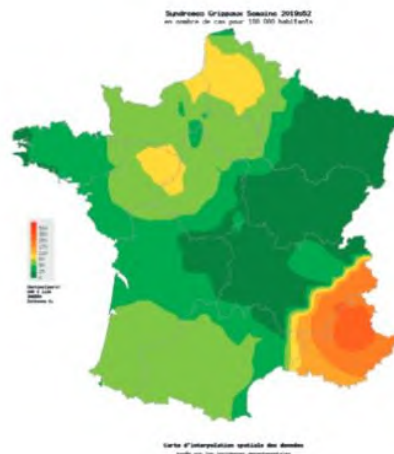
- Représenter graphiquement le nuage de points $(n; y_n)$. Prendre 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 unités sur l'axe des ordonnées.
 - Le nuage de points précédent permet d'envisager un ajustement dit de type exponentiel par la fonction f définie pour $x \in [1; +\infty[$ par $f(x) = 54 \times (1,43)^x$.
- a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$ arrondi à l'unité près					

- b. Si l'on retient cet ajustement de type exponentiel, quel nombre de couverts peut prévoir le gérant la cinquième semaine ?
3. Le restaurant a une capacité maximum de 810 couverts par semaine.
- a. Résoudre par le calcul, en utilisant la fonction logarithme décimal et le tableur ou la calculatrice, l'inéquation : $54 \times (1,43)^x > 810$.
- b. Si la fréquentation du restaurant évolue suivant ce modèle exponentiel, au bout de combien de semaines le gérant commencera-t-il à refuser des clients ?
4. Compléter le programme en Python ci-dessous afin qu'il permette de résoudre le problème posé à la question 3.

```
from math import *
def f(x):
    return 54*1.43**x
x=...
while f(x)<=810:
    x+=1
print('Le gérant commencera à refuser des clients après',..., 'semaines.')
```

- 68**  Chaque semaine, le Réseau Sentinelles collecte auprès de ses médecins des informations permettant notamment d'estimer le nombre de cas de certaines maladies (grippe, varicelle, oreillons, etc.) sur une période donnée.



Ainsi, a-t-on évalué, pendant plusieurs semaines à partir de début janvier 2020, le nombre de personnes présentant des symptômes grippaux.

Pendant les six premières semaines d'observation, le taux d'incidence de la grippe est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $f(t) = 24 \times 1,27^t$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'observation.

- Calculer le taux d'incidence de la grippe au bout de la 1^{re} semaine d'observation. Donner la valeur exacte de ce taux d'incidence.
- a. Résoudre l'inéquation $24 \times 1,27^t > 60,96$.
b. Au bout de combien de semaines écoulées le taux d'incidence de la grippe dépassera-t-il le double du taux d'incidence observé au bout de la première semaine ?

- 69**   **Lire un programme**
Voici un programme en langage python :

```
from math import log
def f(x):
    if x>0:
        resultat = log(x, 10)
        print ("l'image de ",x, "est", resultat)
    else:
        print ("le nombre",x, "n'a pas d'image")
```

La commande $\log(x, 10)$ permet d'obtenir l'image du nombre x par la fonction logarithme décimal.

Voici ce qui s'affiche dans la console après plusieurs essais :

```
Console Python
>>> f(100)
l'image de 100 est 2.0
>>> f(2)
l'image de 2 est 0.30102999566398114
>>> f(-1)
le nombre -1 n'a pas d'image |
```

Que permet de faire le programme ci-dessus ?

70 **AlGO** **PYTHON** **STL** Le pH, potentiel hydrogène d'une solution aqueuse, est lié à la concentration molaire en ions oxonium H_3O^+ , notée $[\text{H}_3\text{O}^+]$, dans la solution par la relation $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$.

Connaissant le pH, la concentration des ions oxonium est donnée par la relation :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}.$$

- Comment varie la concentration des ions oxonium d'une solution lorsque le pH de la solution augmente ?
- Recopier et compléter le tableau suivant sachant qu'une solution aqueuse est dite :
 - acide si le pH est inférieur à 7 ;
 - basique si le pH est supérieur à 7 ;
 - neutre si le pH est égal à 7.

Solution	pH	Solution acide, basique, neutre	$[\text{H}_3\text{O}^+]$
Soude	14		
Acide chlorhydrique			1
Eau de javel	11,5		
Eau distillée			10^{-7}
Café	5		
Acide gastrique			10^{-2}
Salive humaine	6,5		

3. Le pH d'une boisson à base de cola donne 2,7. Calculer la concentration en ions H_3O^+ .

4. Une solution a une concentration en $[\text{H}_3\text{O}^+]$ égale à $10^{-5} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Déterminer son pH.

5. Voici un programme en Python :

```
from math import log
def p_h(x):
    resultat=-log(x,10)
    p=round(resultat,0)
    return(p)
```

Coup de pouce

- L'instruction `log(x,10)` désigne l'image de x par la fonction logarithme décimal. Voici ce qui s'affiche dans la console pour $x = 10^{-12}$:

```
Console Python
>>> p_h(10**-12)
12.0
>>> |
```

- Que permet d'obtenir ce programme ?
- A quoi correspond l'instruction `round` ?

71 **STI2D** Pour qu'un son « chatouille » notre oreille, il faut que le pavillon de celle-ci réussisse à en capter une « quantité » suffisante. Cette quantité, notée I , est appelée l'intensité sonore de ce son. Elle s'exprime en watts par mètre carré ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$). Le niveau sonore N de ce son, exprimé en décibels (dB), est alors donné par la relation :

$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I_0 est la plus petite puissance sonore perceptible par l'oreille humaine.

On donne $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.



- Une conversation entre deux amis a une intensité sonore de $10^{-5} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Quel est son niveau sonore ?
- Quelle intensité ne doit pas être dépassée pour une oreille dont le seuil de douleur se situe à 120 dB ?
- Si on augmente le niveau sonore d'un son de 20 dB, que se passe-t-il pour son intensité sonore ?
- En général, on cherche plutôt à réduire le niveau sonore. Comment réduire l'intensité d'un son pour diminuer son niveau sonore de 10 dB ?
- Jade possède une enceinte dans sa chambre dont la puissance fournit un niveau sonore de 80 dB. Elle souhaite en acheter une seconde de puissance identique et l'installer à côté de celle qu'elle possède déjà. Ses parents protestent : « 160 dB, mais tu risques d'avoir des lésions irréversibles aux oreilles ! » Sachant que les intensités sonores de plusieurs sons émis d'un même point s'additionnent, que peut-on penser de l'affirmation des parents de Jade ?

72 Le nombre $N = 2^{43112609} - 1$ est connu pour être un nombre premier dans le monde mathématique.

- Exprimer $\log(N+1)$ en fonction de $\log(2)$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la partie entière de $\log(N+1)$.
- On note p le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $N+1$; p = partie entière ($\log(N+1)$) + 1 (cf. activité 4 p. 77). Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $N+1$?
- Quel est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de N ?



73 **ALGO** **PYTHON** **STMG** Une micro-entreprise de dépannage informatique a réalisé en 2019 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5 %. Pour tout entier naturel n , on note b_n le bénéfice prévu pour l'année 2019 + n . On a donc $b_0 = 22\,000$.



1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2020 et 2021.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer alors b_n en fonction de n .
4. L'entreprise souhaite savoir en quelle année le bénéfice dépasserait 40 000 € avec une hausse annuelle de 4,5 %. On considère l'algorithme rédigé mais incomplet ci-dessous :

```
n prend la valeur 0
Tant que B ... 40 000
    N prend la valeur N + 1
    B prend la valeur .....
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2019
Afficher A
```

- a. Reproduire et compléter cet algorithme afin qu'il donne l'année où le bénéfice dépassera 40 000 €.
- b. Voici un programme en Edupython dans lequel il manque des éléments et des instructions ; le compléter puis l'implanter pour obtenir l'affichage de l'année à laquelle le bénéfice dépassera 40 000 €.

```
from math import *
n=0
b=...
while b<=40000:
    n=n+1
    b=...
A=n+2019
...
```

5. a. résoudre l'inéquation $1,045^n \geq 2$.
- b. Au bout de combien d'années le bénéfice de l'entreprise aura-t-il doublé ?

74 Le bruit se mesure sur une échelle allant de 0 à 130 décibels. 0 dB représente le seuil d'audibilité et 120 dB le seuil de douleur. La plupart des sons de la vie courante sont compris entre 30 et 90 dB.

Le niveau d'intensité sonore N d'un son, exprimé en décibels (dB), est donné par la relation :

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

où I est l'intensité sonore de la source de bruit (exprimée en Watts par mètre carré).



1. Montrer que si on multiplie par 2 l'intensité sonore I , alors cela revient à augmenter de 3 dB environ le niveau sonore N .
2. Voici quelques exemples de niveaux sonores en dB à proximité de certains bruits ou environnement :

Bruit	Niveau sonore en dB
Feu d'artifice	140
Avion au décollage	130
Marteau-piqueur	120
Concert, discothèque, rave party	110
Moto à proximité	90
Aspirateur, tondeuse	70
Machine à laver	50
Bureau tranquille	40
Chuchotement à voix basse	20
Désert, studio d'enregistrement	10
Seuil d'audibilité	0

Sachant que les intensités sonores s'ajoutent, répondre aux questions suivantes :

- a. En utilisant le résultat de la question 1., calculer le niveau sonore atteint par deux tondeuses côte à côte.
- b. Est-il vrai que le bruit de 10 marteaux-piqueurs alignés fonctionnant simultanément atteint le niveau sonore d'un avion qui décolle ?



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier.

	V	F
75 La fonction logarithme décimal est définie sur $\mathbb{R}$.		
76 $\log(0,2)$ est supérieur à $\log(0,1)$.		
77 $\log(20)$ est égal à $10 \times \log(2)$.		
78 $\log(1\,000)$ est égal à $3 \times \log(10)$.		
79 $\log(2^{2020})$ est égal à $1\,010 \times \log(4)$.		
80 $\log(0,5)$ est négatif.		
81 $\log(\sqrt{3})$ est inférieur à $\log(3)$.		
82 1 est une solution de l'équation $5^{3x-1} = 25$.		
83 L'équation $3^x = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.		
84 On sait que $\log(2) > 0,3$. Alors $\log(0,0002)$ est supérieur à -4 .		
85 On sait que $\log 20 > 1,3$. Alors $\log(200) > 13$.		
86 On sait que $\log 3 \approx 0,5$ à $0,1$ près. Alors $\log(300) \approx 50$.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- 87 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \log(2x)$ et g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \log(x^2)$. Alors :
- a. $f(10) > g(10)$ b. $f(2) = g(2)$ c. $f(10) = g(10)$ d. $f(2) < g(2)$
- 88 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \log(x)$. Alors :
- a. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) > x$ b. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) < x$
c. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) > 0$ d. f est croissante sur $]0; +\infty[$
- 89 Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \log(x^2)$. Alors :
- a. g est croissante sur $]0; +\infty[$ b. g est décroissante sur $]0; +\infty[$
c. Pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$ d. Pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$
- 90 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \log(5x)$ et g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 5\log(x)$. Alors :
- a. $f(2) < g(2)$ b. $f(2) > g(2)$ c. $f(20) = g(20)$ d. $f(20) > g(20)$
- 91 Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = -2\log(x)$. Alors :
- a. h est croissante sur $]0; +\infty[$. b. h est décroissante sur $]0; +\infty[$.
c. On ne peut rien dire. d. h n'est pas monotone sur $]0; +\infty[$.

→ Vérifier les résultats p. 178

92 In English

A decimal logarithm table is given below. Only by using the definition and properties of the decimal logarithm function, copy the table and complete the empty boxes. Calculator is forbidden.

x	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	1
log(x)						

x	2	5	10	20	50	100
log(x)	≈ 0.3					

93 COMPÉTENCE Calculer, Raisonner

L'échelle de Richter, basée sur les mesures faites par les sismographes, exprime la magnitude M d'un séisme.

Cette magnitude se calcule selon la formule $M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$,

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

1. Que vaut la magnitude M lorsque $A = A_0$?

Lorsque $A = 10 \times A_0$? Lorsque $A = 10\,000 \times A_0$?

2. Un séisme est dit « léger », provoquant des secousses d'objets à l'intérieur des maisons et quelques faibles dommages, lorsque sa magnitude est comprise entre 4 et 5.

Montrer qu'alors son amplitude est telle que :

$$10^4 \times A_0 \leq A \leq 10^5 \times A_0.$$

3. La magnitude connue la plus importante est de 9,5. Elle a été enregistrée au Chili en mai 1960.

Exprimer son amplitude A en fonction de A_0 (on donnera une valeur approchée de l'amplitude sous la forme $a \times 10^b \times A_0$, avec $0 < a < 10$ et b entier naturel).

4. Un pays vient de connaître un séisme de magnitude 8 suivi d'une réplique de magnitude 4.

Un journaliste écrit alors que la réplique a été deux fois moins puissante que le premier séisme.

Que pensez-vous de cette affirmation du journaliste ?

Argumentez votre réponse.

94 COMPÉTENCE Calculer

Le niveau de pression acoustique est exprimé en décibels par $p = 20 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ où p_0 est la valeur minimale de la pression

perçue par l'oreille humaine et p est la valeur de la pression pour un son perçu. Pour une personne sans problème auditif, $p_0 = 2 \times 10^{-5}$ bars.

L'oreille humaine peut supporter sans dommage au maximum une pression de 20 bars.

Calculer le niveau de pression S en décibels correspondant au bruit maximum que peut supporter une oreille humaine.

95 TABLEUR COMPÉTENCE Calculer

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée. Cette dernière a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes. L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation finale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3\,200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La vitesse finale de la fusée, vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour permettre la mise en orbite souhaitée.

On souhaite connaître la masse de propergol nécessaire pour permettre cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x + 50)$ tonnes.

Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, est donnée par la formule :

$$f(x) = V_e \times 2,3 \times [\log(x + 50) - \log 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100 ; 900]$.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[100 ; 900]$,

$$f(x) = 3\,200 \times 2,3 \log(0,02x + 1).$$

On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.

2. a. Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée ?

b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la mise en orbite sera-t-elle possible ?

3. Écrire une inéquation permettant de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

4. En utilisant le tableur de la calculatrice, déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

96 COMPÉTENCE Calculer

On rappelle que le pH d'une solution aqueuse est l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions oxonium H_3O^+ de cette solution, c'est-à-dire : $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$.

1. Le pH de l'eau pure est 7. Quelle est la concentration en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ de l'eau pure en ions oxonium ?

2. Calculer le pH d'une solution telle que

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

3. On dispose d'une solution de pH égal à 4.

a. Que devient le pH si on multiplie la concentration en ions oxonium par 100 ? par 1 000 ?

b. Que devient le pH si on divise la concentration en ions oxonium par 100 ? par 1 000 ?

▶ À vos batteries !

CAPACITÉ Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une inéquation.

En novembre 2019, l'association nationale pour le développement de la mobilité électrique (Avere-France) publiait les chiffres suivants sur le marché du véhicule électrique neuf en France.



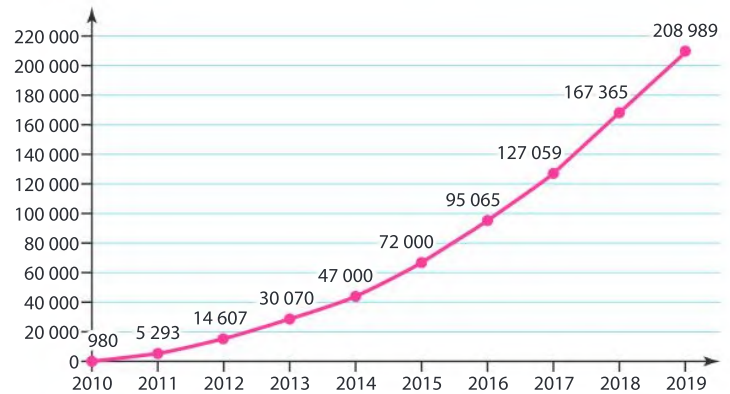
On peut ainsi lire sur le graphique que, fin 2019, il y avait en tout 208 989 véhicules « 100 % électrique » neufs immatriculés en France depuis 2010.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation entre fin 2018 et fin 2019 du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France. Arrondir le résultat à 1 % près.

2. L'association Avere-France s'est fixée un objectif d'un million de véhicules électriques immatriculés en 2022. On émet l'hypothèse qu'à partir de 2019, l'augmentation annuelle de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France sera constante et égale à 40 %.

Dans le cadre de ce modèle, on note v_n une estimation du nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France à la fin de l'année 2019 + n , où n désigne un entier naturel. On a ainsi $v_0 = 208\,989$.

- Déterminer le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France fin 2022.
- Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner l'expression de v_n en fonction de n .
- Déterminer le plus petit entier n tel que v_n est supérieur ou égal à 1 000 000. L'objectif de l'association Avere-France était-il possible ?



En salle informatique



lienmini.fr/10445-64

On souhaite estimer l'année au cours de laquelle le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France dépassera 4 millions (soit environ 10 % du parc automobile français en 2019). Pour cela, on utilise un algorithme.

```
n ← 0
u ← 93 100
Tant que ...
n ←
u ←
Fin Tant que
```

- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus afin qu'il réponde au problème posé ci-dessus.
- Quelle variable faut-il faire afficher pour répondre au problème ?

3. Voici un programme en EduPython :

```
n=0
u=208989
while u<4000000
n=n+1
u=u*(1+t/100)
return (n)
```

- Que signifie l'instruction suivante ? $u = u * (1 + t / 100)$
- Quelle doit être la valeur de la variable t pour répondre au problème posé ?
- En supposant que le modèle proposé initialement était optimiste, implanter le programme ci-dessus et le faire fonctionner avec l'hypothèse d'une augmentation de 25 % seulement à partir de 2019, afin qu'il affiche l'année à laquelle le nombre de véhicules « 100 % électrique » immatriculés en France dépassera 4 000 000.

SUJET RÉSOLU

BAC

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
97 Fraction irréductible égale à $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.	▶ Effectuer des opérations sur des fractions simples.	$\frac{23}{20}$
98 Fraction irréductible égale à $1 - \frac{2}{7}$.	▶ Effectuer des opérations sur des fractions simples.	$\frac{5}{7}$
99 Calculer 20 % de 75.	▶ Appliquer une proportion exprimée en pourcentage.	15
100 Si $U = RI$, alors $R =$	▶ Isoler une variable dans une égalité.	$\frac{U}{I}$
101 Développer $(2x - 3)^2$.	▶ Développer une expression algébrique simple.	$4x^2 - 12x + 9$
102 Factoriser $4x^2 - 1$.	▶ Factoriser une expression algébrique simple.	$(2x - 1)(2x + 1)$
103 On applique une augmentation de 30 % à un article qui coûtait 50 euros. Quel est son nouveau prix ?	▶ Appliquer un taux d'évolution.	65 euros

104  En acoustique, l'intensité I d'un son se mesure en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ (watts par m^2). Le niveau sonore exprimé en dB (décibels) d'un son d'intensité I , est donné par la formule : $N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, intensité la plus faible audible par l'oreille humaine.

À partir de 80 dB, seuil de danger, le port d'une protection auditive est obligatoire dans le cadre du travail. Le seuil de la douleur est atteint à partir de 120 dB.

1. Montrer qu'un son d'intensité $10^{-6} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ est supportable et qu'un son d'intensité $100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ est insupportable.
2. Le concert des Who en 1976 à Londres a atteint un niveau sonore de 120 dB. Donner l'intensité du son.

Méthode à appliquer

Solution rédigée

1. On calcule le rapport $\frac{I}{I_0}$, puis la définition du logarithme décimal pour une puissance de 10. → Voir Exercice résolu 1 p. 79	1. Avec $I = 10^{-6} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, le rapport $\frac{I}{I_0}$ est égal à 10^6. $\log(10^6) = 6$ donc $N = 10 \times 6 = 60$ dB, ce qui est en deçà du seuil de danger de 80 dB. Un son d'intensité $10^{-6} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ est donc supportable. Avec $I = 100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, le rapport $\frac{I}{I_0}$ est égal à 10^{14}. $\log(10^{14}) = 14$ donc $N = 10 \times 14 = 140$ dB, ce qui est bien au-delà du seuil de douleur de 120 dB. Un son d'intensité $100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ est donc insupportable.
2. N est égal à 120, on écrit donc que $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 120$ soit $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 12$. On identifie 12 comme étant le logarithme décimal de 10^{12}. → Voir Exercice résolu 3 p. 81	2. On résout l'équation $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 120$. Cela donne $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 120 \div 10 = 12$. Par définition du logarithme décimal, on a donc $\frac{I}{I_0} = 10^{12}$. D'où $I = 10^{12} \times I_0 = 10^{12} \times 10^{-12} = 1$. L'intensité du son au concert des Who était de $1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

SUJET GUIDÉ

BAC

105 CAPACITÉ

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une inéquation du type $a^x < b$ d'inconnue x réelle.

Un cabinet d'orthophonie fait le bilan de son activité. On s'intéresse donc au nombre de séances d'orthophonie réalisées chaque trimestre au sein du cabinet. À partir du premier trimestre 2019, le nombre de séances d'orthophonie augmente au rythme de 3 % par trimestre.

On modélise, à l'aide d'une suite géométrique (r_n) , le nombre trimestriel de séances réalisées par le cabinet, l'entier n désignant le nombre de trimestres écoulés depuis le début de l'année 2019. On donne $r_1 = 598$.

- Justifier que la raison de la suite géométrique (r_n) est égale à 1,03.
- Calculer dans le cadre de cette modélisation le nombre de séances réalisées au cours du premier trimestre 2020.
- Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation : $598 \times 1,03^{x-1} \geq 800$.

Méthode On isole la partie $1,03^{x-1}$ puis on applique la fonction logarithme décimal aux deux membres de l'inéquation.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 81

- Les orthophonistes estiment qu'ils devront recruter un nouveau collègue lorsque le nombre trimestriel de séances dépassera 800. Selon ce modèle, déterminer le trimestre et l'année à partir duquel il faudra faire ce recrutement.

106 CAPACITÉ

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une inéquation du type $a^x < b$ d'inconnue x réelle.

La fréquence cardiaque est le nombre de battements du cœur par minute. Lorsqu'une personne effectue un exercice, son système cardio-vasculaire s'adapte et la fréquence cardiaque varie.

On enregistre la fréquence cardiaque d'un individu A pendant la phase de récupération après un test d'effort. On admet que cette fréquence peut être modélisée par la fonction g définie sur $[8 ; 13]$ par :

$$g(t) = 660 \times 0,85^t$$

où le temps t est donné en minutes et $g(t)$ en battements par minute.

- Résoudre dans l'intervalle $[8 ; 13]$ l'inéquation : $660 \times 0,85^t \leq 115$.

Méthode On isole la partie $0,85^t$ puis on applique la fonction logarithme décimal aux deux membres de l'inéquation.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 81

- En déduire le temps de récupération exprimé en minutes et secondes à partir duquel la fréquence cardiaque est inférieure ou égale à 115 battements par minute.
- L'étude de l'évolution de la fréquence cardiaque après un test d'effort donne des renseignements sur le profil cardio-vasculaire d'un individu. Ainsi, une diminution de la fréquence cardiaque inférieure à 12 battements lors de la première minute de récupération est considérée comme anormale et peut indiquer un problème d'ordre médical. La fréquence de récupération de l'individu A peut-elle être considérée comme anormale ?

107 CAPACITÉ



- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une inéquation du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.

Le marché de la musique française enregistrée se divise en deux grands domaines : le marché physique (supports matériels comme les vinyles et les CD) et le marché dématérialisé (téléchargements, streaming). On s'intéresse ici au marché physique. En 2018, le montant des ventes correspondant au marché physique s'élevait à 256 millions d'euros. On suppose que chaque année à partir de 2018, le marché physique connaîtra une baisse de 20 %.

On note u_n le montant en millions d'euros, des ventes en France correspondant au marché physique de l'année $2018 + n$. Ainsi, $u_0 = 256$.

- Calculer u_1 .
- Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
- Dans la feuille de calcul d'un tableur, on souhaite déterminer les premiers termes de la suite (u_n) .
 - Quelle formule peut-on écrire en C3 qui, par recopie vers le bas, donnera le contenu des cellules suivantes ?

	A	B	C
1	Année	Rang n	u_n
2	2018	0	256
3	2019	1	
4	2020	2	

- On admet que $u_n = 256 \times 0,8^n$. En quelle année prévoit-on, d'après ce modèle, un montant du marché inférieur à 50 millions d'euros ?

108 TABLEUR **Partie A**

Une dose de médicament est injectée dans le sang par piqûre intraveineuse. On suppose que le médicament se répartit instantanément dans le sang et que sa concentration initiale dans le sang est égale à $85 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$. On admet que le corps élimine chaque heure 25 % du médicament. On considère la suite (C_n) où C_n désigne la concentration en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang n heures après l'injection avec n désignant un entier naturel. On a ainsi $C_0 = 85 \text{ mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir à 0,01 près. Interpréter ces deux résultats.

2. Montrer que la suite (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Pour calculer à chaque heure la concentration de médicament présente dans le sang, on utilise un tableur. La feuille de calcul est reproduite ci-contre.

Quelle formule, à recopier vers le bas, faut-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les premières valeurs de la suite (C_n) ?

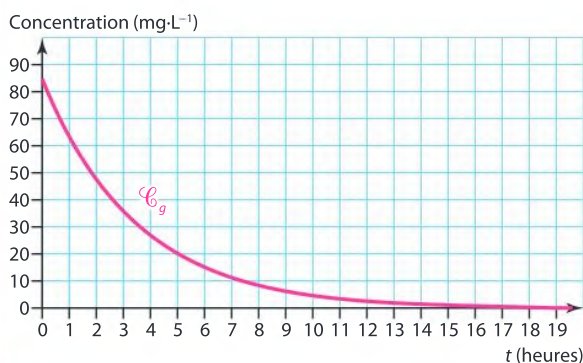
4. Exprimer C_n en fonction de n . En déduire la concentration de médicament dans le sang au bout de 14 heures. Arrondir à 0,01.

	A	B
1	n	C_n
2	0	85,00
3	1	
4	2	
5	3	35,86
6	4	26,89
7	5	20,17
8	6	15,13
9	7	11,35
10	8	8,51
11	9	6,38
12	10	4,79

Partie B

Pour avoir des résultats plus précis, on admet que la concentration en $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang t heures après l'injection peut être modélisée par la fonction G définie sur $[0 ; 19]$ par $G(t) = 85 \times 0,75^t$.

La courbe représentative de la fonction G est tracée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, avec la précision permise par le graphique, déterminer :

a. La concentration de médicament présente dans le sang au bout de 4 heures 30 minutes.

b. Le temps à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 50 % de la concentration initiale.

2. Déterminer par le calcul une valeur approchée à 0,1 heure près du temps t_0 à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 20 % de la concentration initiale, puis exprimer cette valeur approchée en heures et minutes.

109 On s'intéresse à l'évolution au cours du temps du prix d'un article de consommation courante.

On décide de modéliser l'évolution du prix de cet article, à partir du 1^{er} janvier 2020, par la fonction f définie par :

$$f(x) = 72 \times 1,087^x.$$

Ainsi :

• x est le temps écoulé depuis le 1^{er} janvier 2020, l'unité de temps étant l'année.

• $f(x)$ est une estimation du prix de l'article lorsqu'il s'est écoulé un temps x après le 1^{er} janvier 2020.

Par exemple $f(2,25)$ est une estimation, avec ce modèle, du prix de l'article le 1^{er} avril 2022.

1. En utilisant ce modèle, estimer le prix en euros, arrondi à l'unité, de l'article le 1^{er} janvier 2021 puis le 1^{er} juillet 2021.

2. En utilisant ce modèle, au cours de quelle année l'article coûtera-t-il plus de 200 € ? Préciser le mois.

110 Monsieur Économe décide de se constituer une épargne.

Le 1^{er} juillet 2020, il déposera sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % la somme de 800 €.

Il veut calculer les montants des capitaux qu'il obtiendra chaque année s'il n'effectue que ce seul versement initial. On note u_n le capital acquis au 1^{er} juillet de l'année 2020 + n .

Ainsi $u_0 = 800$.

1. Calculer u_1 .

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

3. Résoudre l'inéquation $800 \times 1,025^n \geq 1\,000$.

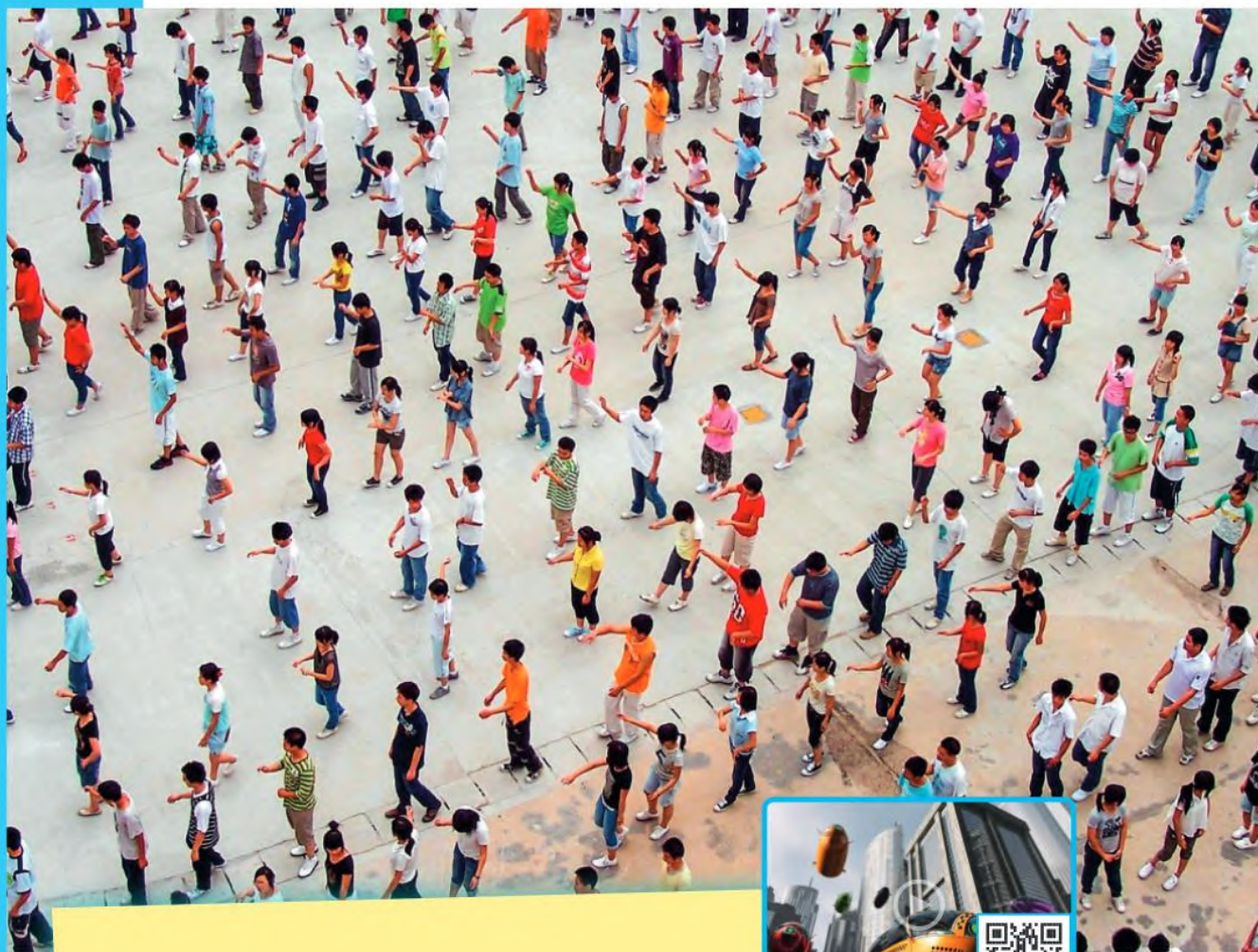
4. En déduire en quelle année le capital acquis dépassera pour la première fois 1 000 €.

5

Statistiques à deux variables quantitatives

CAPACITÉS

- Représenter un nuage de points.
- Déterminer et utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.
- Représenter un nuage de points en effectuant un changement de variable donné afin de conjecturer une relation de linéarité entre de nouvelles variables.



Aujourd'hui, la population de la Chine est la plus élevée au monde, talonnée par l'Inde. Depuis 1960, elle a été multipliée de plus de 118 %. La population chinoise continue d'augmenter... et de vieillir. Si la Chine est aujourd'hui un pays à l'économie puissante, elle va devoir s'organiser pour répondre aux besoins de demain.

Combien d'habitants peut-on prévoir en Chine en 2025 ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 99



Découvrons les dynamiques de la population

1:05

▶ lienmini.fr/10445-27

Pour retrouver les automatismes

Pour revoir les acquis de Première

Questions
Flash

Diaporama

15 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-28

1 Équation réduite de droite

- L'équation réduite d'une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme :

$$y = ax + b$$

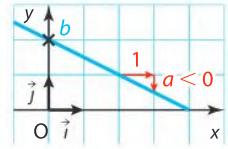
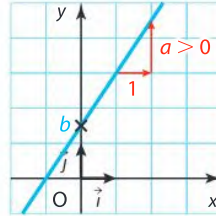
Coefficient directeur de d

Ordonnée à l'origine de d

- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de d alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- $C(x_C; y_C) \in d$ si et seulement si $y_C = ax_C + b$.



2 Moyenne d'une série de valeurs

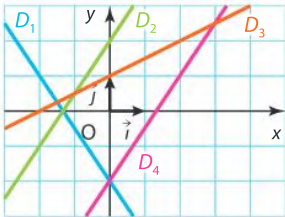
La moyenne de n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ est : $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Vérifier les acquis de Première



Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Aide

	a	b	c	d	Aide	
1. On donne les points A(-1 ; 3) et B(0 ; -2). La droite (AB) a pour équation réduite :	$y = -5x + 2$	$y = -\frac{1}{5}x - 2$	$y = -5x - 2$	$y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$	1	
2. Parmi les droites représentées ci-dessous, celle qui a pour équation réduite $y = 1,5x - 2$ est :		D_1	D_2	D_3	D_4	1
3. Soit D la droite d'équation réduite $y = -2,4x + 5,1$. Le point de D d'abscisse 3 a pour ordonnée :	12,3	-2,1	-0,875	2,7	1	
4. Soit D la droite d'équation réduite $y = 0,2x - 6,2$. Le point de D d'ordonnée 4,3 a pour abscisse :	-5,34	52,5	9,5	10,3	1	
5. Quelle est la moyenne de : 23, 26, 20, 45, 51, 39 ?	$\bar{x} = 31$	$\bar{x} = 32,5$	$\bar{x} = 27$	$\bar{x} = 34$	2	

→ Voir **Corrigé** p. 178

OBJECTIF Représenter une série statistique à deux variables → Cours 1B p. 100

On a relevé la superficie x , exprimée en m^2 , et le prix de vente y , exprimé en milliers d'euros, de 8 appartements situés dans le quartier résidentiel d'une petite ville.

Superficie : x_i (en m^2)	61	72	86	93	105	122	143	184
Prix de vente : y_i (en milliers d'euros)	195	210	238	264	280	300	354	415



- Quels sont les deux caractères étudiés sur la population constituée des 8 appartements ?
- Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 20 m^2 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 milliers d'euros), placer dans ce repère les points $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_8(x_8; y_8)$ associés à chacun des 8 appartements.
 - Quelle remarque peut-on faire concernant la position de ces 8 points ?
- Calculer $\bar{x}$ et $\bar{y}$, moyennes respectives des superficies et des prix de vente des 8 appartements.
 - Placer sur le graphique le point $G(\bar{x}; \bar{y})$. Où est-il situé par rapport aux points du nuage ? Ce point s'appelle le **point moyen du nuage de points** de la série statistique.

OBJECTIF Apprécier la qualité d'un ajustement affine et effectuer un ajustement selon la méthode des moindres carrés → Cours 2 p. 102

Une entreprise de fabrication de fibres optiques, destinées aux opérateurs téléphoniques, a mis sur le marché un nouveau produit qui a beaucoup de succès. L'évolution du nombre de milliers d'acquéreurs depuis 18 mois est résumée dans le tableau ci-dessous :

Trimestre : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de milliers d'acquéreurs : y_i	155	232	327	472	636	720



- Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 trimestre sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 milliers d'acquéreurs sur l'axe des ordonnées), construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ de cette série statistique.

Construire ensuite la droite (M_1M_6) , la droite Δ_1 d'équation

$y = 120x + 10$ et la droite Δ_2 d'équation $y = 110x + 35$.

- Que dire de ces droites par rapport au nuage de points ?
- Déterminer l'équation réduite $y = ax + b$ de la droite (M_1M_6) .

- On appelle somme des carrés des écarts verticaux la somme

$S = (M_1N_1)^2 + (M_2N_2)^2 + (M_3N_3)^2 + \dots + (M_nN_n)^2$ où $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont les points du nuage de points d'une série statistique et $N_1, N_2, \dots, N_n$ les points de D de mêmes abscisses respectives que $M_1, M_2, \dots, M_n$.

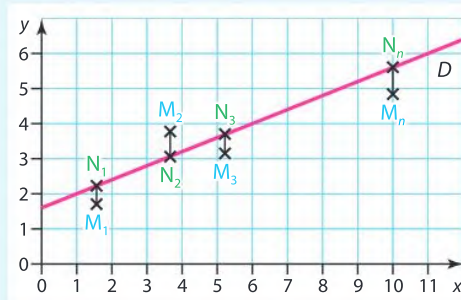
- Ouvrir le fichier Excel : lienmini.fr/10445-29.

Dans les cellules C10 à C15, saisir les valeurs du coefficient directeur a et de l'ordonnée à l'origine b obtenues à la question 1. pour chacune des trois droites.

- Dans les cellules D3 à I3, saisir une formule que l'on copiera vers le bas, permettant de compléter jusqu'à la ligne 8.

- Dans les cellules E10, E12 et E14, saisir la formule permettant d'afficher la somme S .

- Si l'on doit choisir la droite passant le plus près des points du nuage, laquelle choisir ? Justifier.



3 Évolution de la population en Chine

DÉMOGRAPHIE

OBJECTIF Utiliser un ajustement affine pour faire des estimations → Cours 2 p. 102

On donne dans le tableau ci-dessous le nombre d'habitants en Chine de l'année 2010 à l'année 2018.

Année : x_i	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Nombre d'habitants en milliards : y_i	1,338	1,344	1,351	1,357	1,364	1,371	1,379	1,386	1,393



1. Construire le nuage de points de cette série statistique (unités graphiques : 1 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses en prenant pour origine 2008 et 1 cm pour 0,01 milliard d'habitants sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 1,3 milliard).
2. Soit D la droite d'équation $y = 0,007x - 12,6$. Construire la droite D sur le graphique précédent. Cette droite réalise-t-elle un bon ajustement affine du nuage ?
3. a. Déterminer par le calcul le nombre d'habitants prévisible en Chine en 2025.
b. Déterminer par le calcul l'année à partir de laquelle on peut estimer que le nombre d'habitants en Chine va dépasser 1,45 milliard.
4. Retrouver graphiquement les résultats obtenus aux deux questions précédentes.

4 Temps de montage d'un véhicule

INDUSTRIE

OBJECTIF Faire un changement de variable pour se ramener à un ajustement affine → Cours 2 p. 102

On a relevé durant 6 années consécutives le temps de montage moyen d'un véhicule donné. Voici les résultats obtenus :

Année : x_i	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Temps de montage en heures : y_i	24,8	21,3	18,5	16,7	15,5	14,8



1. Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ de cette série dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses en prenant pour origine 2010 et 1 cm pour 1 heure sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 14 heures). Un ajustement affine de ce nuage est-il envisageable ?
2. On décide de remplacer les valeurs de y par leur racine carrée ; on définit ainsi une nouvelle variable : $z = \sqrt{y}$.
a. Recopier et compléter le tableau suivant (résultats arrondis à 10^{-2} près) :

x_i	2013	2014	2015	2016	2017	2018
z_i						

- b. Dans un nouveau repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses en prenant pour origine 2010 et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 3,8), construire le nuage de points $N_i(x_i; z_i)$. Un ajustement affine est-il envisageable avec ce nouveau nuage de points ?
- c. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-2} près).
- d. En déduire une expression de y en fonction de x puis estimer le temps de montage moyen de ce modèle de véhicule en 2025.

1

Séries statistiques à deux variables

A Définition

DÉFINITION Une **série statistique à deux variables** est une série statistique étudiant simultanément deux caractères sur un même échantillon de n individus extraits d'une population.

On peut présenter une série statistique à deux variables à l'aide d'un tableau statistique de la forme :

Valeurs du 1 ^{er} caractère	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs du 2 nd caractère	y_1	y_2	...	y_n

REMARQUE • Dans ce chapitre, la calculatrice sera indispensable. Par exemple, pour saisir les données du tableau statistique.

B Nuage de point d'une série statistique à deux variables et point moyen du nuage de points

DÉFINITION Dans un repère orthogonal du plan, l'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ pour i allant de 1 à n est appelé le **nuage de points** de la série statistique.

EXEMPLE • Le tableau suivant présente l'évolution du nombre de clients et du chiffre d'affaires en milliers d'euros d'une micro-entreprise au cours des 6 mois :

Nbre de clients : x_i	7	9	10	13	15	18
Chiffre d'affaires : y_i	30	37	45	56	69	81

On place les points de coordonnées $(x_i; y_i)$ pour obtenir le nuage de points.

→ Voir **Exercice résolu 1**

DÉFINITION Soit $\bar{x}$ la moyenne des valeurs prises par le 1^{er} caractère et $\bar{y}$ celle des valeurs prises par le 2nd caractère. On appelle **point moyen du nuage de points** de la série statistique, le point G de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$.

EXEMPLE • Dans la situation ci-dessus, $\bar{x} = (7 + 9 + 10 + 13 + 15 + 18) : 6 = 12$ et $\bar{y} = (30 + 37 + 45 + 56 + 69 + 81) : 6 = 53$.

Le point moyen G du nuage de points a pour coordonnées (12 ; 53).

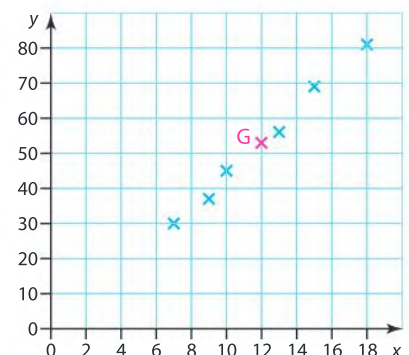
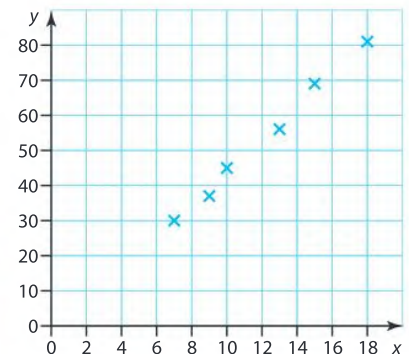
REMARQUE • La calculatrice détermine les coordonnées du point moyen d'un nuage de points, une fois les données du tableau saisies dans la calculatrice :

	Sur TI	Sur Casio
Instructions	puis aller jusqu'à la colonne CALC, sélectionner 2 : Stats 2 Var , descendre jusqu'à « Calculer » puis entrer	F2 : CALC puis F2 : 2VAR

→ Voir **Exercice résolu 2**

Notation

Lorsqu'on donne une **série statistique à deux variables**, on note généralement $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par le 1^{er} caractère et $y_1, y_2, \dots, y_n$ celles prises par le 2nd caractère. Les valeurs prises par cette série sont alors les couples $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$.



Exercice résolu

1

Représenter un nuage de points

Une personne court sur un tapis roulant dont la vitesse peut être modifiée. On a relevé sa fréquence cardiaque en battements par minute selon l'intensité du travail fourni, exprimée en kilojoules. Voici les résultats obtenus :

Intensité du travail fourni : x_i (en kJ)	10	12	15	22	34	45	53	60
Fréquence cardiaque : y_i (en battements·min ⁻¹)	69	80	88	97	114	126	145	158

Construire le nuage de points représentant cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques 1 cm pour 10 kJ sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 battements·min⁻¹ sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 60 battements·min⁻¹.

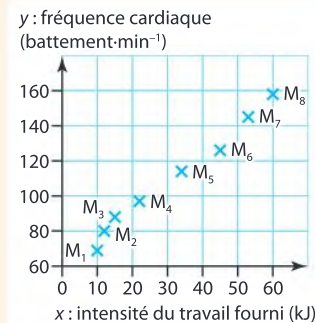
Solution

On place successivement les points de coordonnées (10 ; 69), (12 ; 80), (15 ; 88), (22 ; 97), (34 ; 114), (45 ; 126), (53 ; 145), (60 ; 158).

Méthode

Pour représenter un nuage de points

- 1 On **construit** les deux axes orthogonaux. On les **gradue** en faisant attention aux unités imposées et aux éventuelles indications sur le début des graduations.
- 2 On **légende** les axes (axe des abscisses : 1^{er} caractère étudié ; axe des ordonnées : 2nd caractère étudié).
- 3 On **place** les points $M_i(x_i; y_i)$. Attention : on ne les relie pas entre eux !



→ Voir **Exercices 20 à 27** p. 106

Exercice résolu

2

Déterminer les coordonnées du point moyen d'un nuage de points

Le tableau ci-dessous donne la production en France de véhicules de marque française entre 2013 et 2018 :

Année : x_i	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Nombre de véhicules produits : y_i (en milliers)	1 445	1 503	1 656	1 753	1 908	1 937

Source : https://ccfa.fr/wp-content/uploads/2018/09/analyse_statistiques_2018_fr.pdf.

Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.

Solution

$$\bar{x} = \frac{2013 + 2014 + 2015 + 2016 + 2017 + 2018}{6} = 2\,015,5$$

Donc G(2 015,5 ; 1 700,3).

Méthode

Pour déterminer les coordonnées du point moyen d'un nuage de points

- 1 On **calcule** $\bar{x}$ en additionnant toutes les valeurs prises par le 1^{er} caractère et en divisant le résultat par le nombre de valeurs.
- 2 On **calcule** $\bar{y}$ de la même façon mais en travaillant avec le 2nd caractère.
- 3 On **conclut** en donnant les coordonnées de G (vérifier avec la calculatrice).

$$\bar{y} = \frac{1\,445 + 1\,503 + 1\,656 + 1\,753 + 1\,908 + 1\,937}{6} \approx 1\,700,3$$

→ Voir **Exercices 28 à 34** p. 107

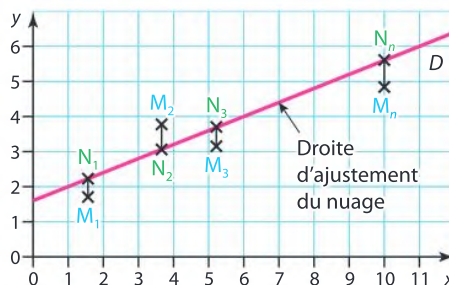
2 Ajustement affine

On cherche s'il existe une relation, certes approximative, entre les deux variables x et y d'une **série statistique**. L'allure du **nuage de points** représentant la série statistique permet d'avoir une idée de la réponse. En effet, la disposition des points peut parfois suggérer la courbe d'une fonction f . Cela signifie alors que le lien approximatif entre x et y est de la forme $y = f(x)$.

On est donc amené à chercher une courbe « passant au plus près » des points du nuage : on parle alors d'**ajustement** du nuage.

Dans le cas particulier où les points du nuage sont proches de l'alignement, la courbe cherchée est une droite et on dit alors que cette droite réalise un **ajustement affine du nuage**.

Si la forme d'un nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ suggère un ajustement affine, on peut trouver un grand nombre de droites ajustant ce nuage.



La **méthode des moindres carrés** consiste à déterminer la droite rendant la somme $(M_1N_1)^2 + (M_2N_2)^2 + (M_3N_3)^2 + \dots + (M_nN_n)^2$ la plus petite possible.

On admettra que cette droite **existe** et qu'elle est **unique**.

DÉFINITION La droite obtenue par la méthode des moindres carrés est appelée la **droite d'ajustement de y en x** par la **méthode des moindres carrés**.

REMARQUE • Pour obtenir les coefficients a et b de l'équation réduite $y = ax + b$ de cette droite, on utilise la calculatrice (ou un tableur).

Une fois les données du tableau saisies sur la calculatrice :

	Sur TI	Sur Casio
Instructions	puis aller jusqu'à la colonne CALC , sélectionner 4 : RégLin(ax+b) , descendre jusqu'à Calculer puis  .	F2 : CALC puis F3 : REG F1 : X puis F1 : Y

→ Voir **Exercice résolu 3**

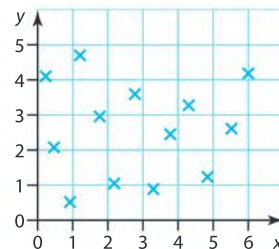
PROPRIÉTÉ (admise) La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés **passé par le point moyen** du nuage de points de la série statistique.

REMARQUE • En déterminant l'équation de la droite d'ajustement $y = ax + b$ (et donc un lien approximatif entre x et y), on va pouvoir faire des estimations de valeurs de y correspondant à des valeurs de x données et vice versa.

Ces estimations peuvent se faire soit graphiquement après avoir tracé la droite, soit par le calcul.

→ Voir **Exercice résolu 4**

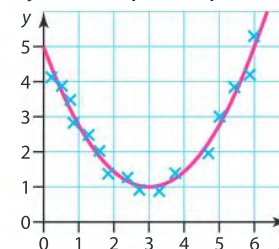
Pas d'ajustement particulier



Ajustement affine



Ajustement par une parabole



Exercice résolu

3

Déterminer un ajustement affine

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire brut de 2015 à 2019.

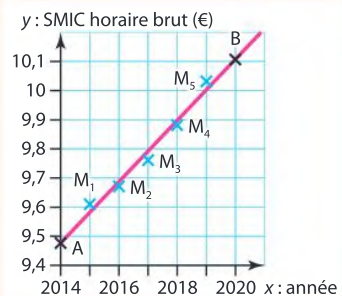
Année : x_i	2015	2016	2017	2018	2019
SMIC horaire : y_i (en €)	9,61	9,67	9,76	9,88	10,03

Source : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/1375188>

1. Représenter le nuage de points de la série statistique dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques 1 cm pour 1 an sur l'axe des abscisses en prenant pour origine 2014 et 10 cm pour 1 € sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 9,4 €.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3} près.
3. Représenter la droite Δ sur le graphique de la question 1.

Solution

1. Voir ci-contre.
2. La calculatrice donne $a \approx 0,105$ et $b \approx -201,995$.
L'équation réduite de la droite Δ est donc :
$$y = 0,105x - 201,995.$$
3. Pour représenter la droite Δ , on détermine les coordonnées de deux points lui appartenant. En prenant par exemple $x = 2\,014$, on obtient : $y = 9,475$ et en prenant $x = 2\,020$, on obtient : $y = 10,105$.
Donc la droite Δ passe par A(2 014 ; 9,475) et par B(2 020 ; 10,105).



→ Voir Exercices 35 à 39 pp. 107-108

Exercice résolu

4

Utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues

On prend l'énoncé de l'Exercice résolu 3 : on souhaite faire des estimations du SMIC horaire brut en supposant que la droite Δ obtenue donne une approximation satisfaisante de l'évolution de y en fonction de x jusqu'en 2030.

1. Déterminer, par le calcul, le SMIC horaire brut estimé pour l'année 2025.
2. Déterminer, par le calcul, à partir de quelle année on peut estimer que le SMIC horaire brut dépassera 10,90 €.

Solution

1. Pour $x = 2025$, on a $y = 0,105 \times 2025 - 201,995 = 10,63$. En 2025, le SMIC horaire brut est donc estimé à 10,63 €.
2. On résout l'inéquation $0,105x - 201,995 > 10,9$. Elle est équivalente à : $x > \frac{10,9 + 201,995}{0,105}$ soit $x > \frac{14\,193}{7}$. Or $\frac{14\,193}{7} \approx 2\,027,6$. C'est donc à partir de l'année 2028 que l'on peut estimer que le SMIC horaire brut dépassera 10,90 €.

Méthode

Pour utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues

1. Si l'énoncé donne une valeur de x , on remplace x par cette valeur dans $y = ax + b$, et on calcule y .
2. Si l'énoncé donne une valeur de y , on remplace y par cette valeur dans $y = ax + b$, et on résout l'équation (ou l'inéquation) pour obtenir x .

→ Voir Exercices 40 à 46 p. 108

1 Séries statistiques à deux variables

Une **série statistique à deux variables**, x et y , se présente sous la forme d'un tableau statistique :

Valeurs du 1 ^{er} caractère : x_i	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs du 2 nd caractère : y_i	y_1	y_2	...	y_n

Le **nuage de points** de la série statistique est l'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ pour i allant de 1 à n .

Le **point moyen du nuage** est le point $G(\bar{x}; \bar{y})$ où :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

2 Ajustement affine

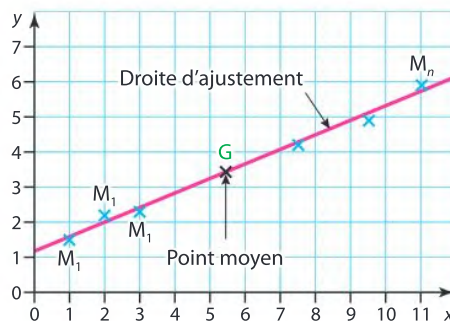
Dans le cas particulier où les points du nuage sont proches de l'alignement, on peut réaliser un **ajustement affine du nuage de points**, c'est-à-dire trouver une droite passant au plus près des points du nuage. Il en existe une multitude.

La **droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés** est la droite passant au plus près des points du nuage.

Elle passe par le **point moyen G** .

Son équation $y = ax + b$ permet d'obtenir une relation approximative entre y et x .

Les **valeurs de a et b** sont obtenues grâce à la **calculatrice** ou le **tableur**.



3 Avec la calculatrice

	Sur TI	Sur Casio
Saisir les données du tableau statistique	puis dans la colonne EDIT , sélectionner 1 : Modifier ... pour rentrer les valeurs du 1 ^{er} caractère dans L_1 et celles du 2 nd caractère dans L_2 .	MENU DATA EXE Rentrer les valeurs du 1 ^{er} caractère dans L_1 et celles du 2 nd caractère dans L_2 .
Lire les coordonnées du point moyen du nuage de points	puis aller jusqu'à la colonne CALC , sélectionner 2 : Stats 2 Var , descendre jusqu'à Calculer puis ENTRÉE .	F2 : CALC puis F2 : ΣVAR .
Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés	puis aller jusqu'à la colonne CALC , sélectionner 4 : RéglLin(ax+b) , descendre jusqu'à Calculer puis ENTRÉE .	F2 : CALC puis F3 : REG F1 : X puis F1 : Y .

1 Questions Flash

Diaporama

15 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-30

Déterminer les coordonnées du point moyen d'un nuage de points

Dans les exercices 2 à 4, calculer les coordonnées du point moyen du nuage de points de la série statistique donnée.

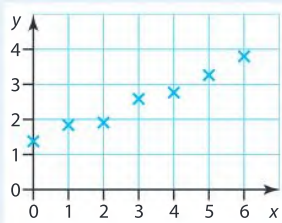
2	x_i	1	2	3	4	5	6
	y_i	3	5	6	10	14	16

3	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
	y_i	2	6	7	9	12	11	13	20

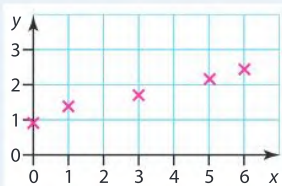
4	x_i	4	6	9	10	11
	y_i	19	17	13	8	3

Déterminer l'équation réduite d'une droite d'ajustement

5 La droite de coefficient directeur 1,8 et passant par A(4,5 ; 3) donne-t-elle un bon ajustement affine de ce nuage ? Si oui, déterminer son équation réduite.



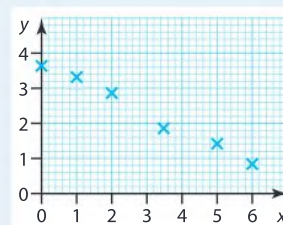
6 La droite de coefficient directeur 0,25 et passant par A(4 ; 2) donne-t-elle un bon ajustement affine du nuage de point représenté ci-contre ? Si oui, déterminer son équation réduite.



7 Reproduire le nuage de points ci-contre. Tracer la droite passant par A(0 ; 5,3) et B(5 ; 2,3). Donne-t-elle un bon ajustement affine de ce nuage ? Si oui, déterminer son équation réduite.



8 Reproduire le nuage de points ci-contre. Placer les points A(1,5 ; 3) et B(4,5 ; 1,5). La droite (AB) donne-t-elle un bon ajustement affine de ce nuage ? Si oui, déterminer son équation réduite.



Effectuer des changements de variables

9 On donne $y = 2,5x - 6,4$ et $x = t^2$. Exprimer y en fonction de t.

10 On donne $z = 154,2t + 26,5$ et $z = \frac{1}{y}$. Exprimer y en fonction de t.

11 On donne $z = 4,2x + 1,3$ et $z = \sqrt{y}$. Exprimer y en fonction de x.

12 On donne $y = 6,8t + 11,1$ et $y = \frac{2}{2-x}$. Exprimer x en fonction de t.

13 On donne $z = 7,2x + 14,9$ et $z = \log y$. Exprimer y en fonction de x.

14 On donne $z = 1,8t + 7,3$ et $z = \log(C + 4)$. Exprimer C en fonction de t.

Déterminer une inconnue à partir d'une égalité

15 On donne $y = 2x - 4,8$ où x et y sont des nombres réels positifs.

- Calculer y lorsque $x = 4$.
- Déterminer le plus petit entier x à partir duquel $y > 10$.

16 On donne $y = \sqrt{2t + 9}$ où t et y sont des nombres réels positifs.

- Calculer y lorsque $t = 2$.
- Calculer t lorsque $y = 7$.

17 On donne $y = 10t^2 + 8$ où t et y sont des nombres réels positifs.

- Calculer y lorsque $t = 3$.
- Déterminer le plus petit entier t à partir duquel $y > 178$.

18 On donne $N = \frac{2}{3x + 4}$ où x et N sont des nombres réels positifs.

- Calculer N lorsque $x = 7$.
- Calculer x lorsque $N = 0,2$.

19 On donne $C = 10^{-3x+5}$ où x et C sont des nombres réels positifs.

- Calculer C lorsque $x = 2$.
- Déterminer le plus petit entier x à partir duquel $C < 0,001$.

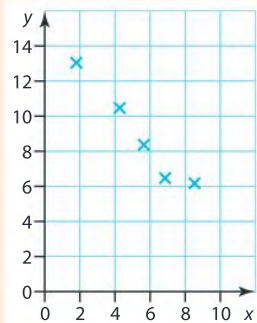
Nuage de points

→ Aide **Cours 18** p. 100

Question de cours

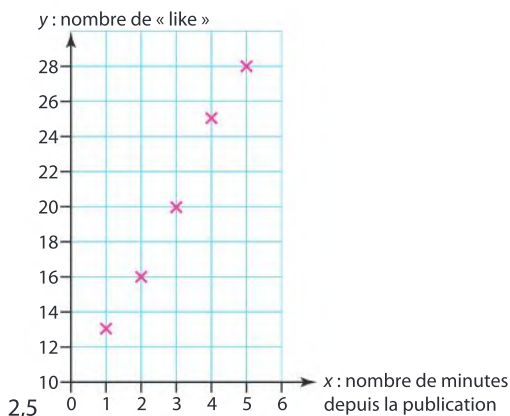
20 On souhaite construire le nuage de points associé au tableau de la série statistique à deux variables ci-dessous :

x_i	y_i
6,2	8,6
6,5	6,9
8,4	5,7
10,5	4,3
13,1	1,8



Quelle erreur a été commise lors de la construction du nuage de points ?

21 À 10 h 18, Mathilde a posté une photo de son équipe de volley sur sa page Facebook. Le graphique ci-dessous donne l'évolution du nombre de « Like » qu'elle a obtenus depuis sa publication.



1. Recopier et compléter le tableau statistique suivant :

Heure	10 h 19	10 h 20			
Nombre de minutes x_i	1	2			
Nombre de « Like » y_i					

2. À 10 h 25, Mathilde a obtenu 38 « Like ». Donner les coordonnées du point que l'on peut rajouter au nuage de points.

Dans les exercices **22** à **26**, on donne le tableau d'une série statistique à deux variables.

Construire son nuage de points dans un repère orthogonal dont les unités graphiques sont données et dire si un ajustement affine est envisageable.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 101

x_i	25	35	45	55	65	75
y_i	1,82	1,93	1,98	2,01	2,09	2,14

Unités graphiques : 2 cm pour 10 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	46	55	67	78	91	125	182	275

Unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 sur l'axe des ordonnées.

x_i	16,5	22	30	42	57	72	77
y_i	54	48	44,5	32	21,5	16,5	12

Unités graphiques : 1 cm pour 5 sur les deux axes.

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	82,16	82,44	82,58	82,46	82,32	82,00

Unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées avec pour origine 81,5.

x_i	42	48	54	60	66
y_i	13,2	15,2	14,4	13,8	14,6

Unités graphiques : 0,5 cm pour 1 sur l'axe des abscisses avec pour origine 40 et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées avec pour origine 12.

27 **ALGO** **PYTHON** Interpréter un programme

Le programme Python ci-dessous permet de représenter le nuage de points associé à une série statistique à deux variables.

```
def nuage(Lx, Ly):
    # Lx est la liste des abscisses des points #
    # Ly est la liste des ordonnées des points #
    plt.plot(Lx, Ly, '+', color='red')
    return plt.show()
```

Utiliser cet algorithme pour représenter le nuage de points associé à la série statistique à deux variables donnée par le tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	13
y_i	28	27,2	30,6	37,6	40,7

Point moyen d'un nuage → Aide Cours 18 p. 100

Question de cours

28 Voici le tableau d'une série statistique à deux variables x et y :

x_i	5,5	7,8	10,1	13,6
y_i	2	6	12	21

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ des valeurs de la variable x .
2. Calculer la moyenne $\bar{y}$ des valeurs de la variable y .
3. En déduire les coordonnées du point moyen G .

Vrai ou faux

29 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

Voici le tableau d'une série statistique à deux variables x et y :

x_i	0	3	6	9	12	15
y_i	4,2	6,5	6,8	8,3	10,4	10,3

1. La moyenne $\bar{x}$ des valeurs de la variable x est 9.
2. La moyenne $\bar{y}$ des valeurs de la variable y est 7,75.

Dans les exercices **30** et **31**, on donne le tableau d'une série statistique à deux variables. Déterminer les coordonnées du point moyen G (si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près).

→ Voir Exercice résolu 2 p. 101

30

x_i	0	6	12	18	24	30	36	42	48
y_i	26	31	33	36	38	41	46	49	56

31

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2 276	2 284	2 203	2 187	2 082

Dans les exercices **32** et **33**, déterminer à l'aide du mode « statistique » de la calculatrice les coordonnées du point moyen G de la série statistique donnée.

32

x_i	36	42	48	54	60
y_i	11,8	13,2	14	14,4	15,5

33

x_i	8	11	15	16	23	47
y_i	4,8	5,2	2,4	0,3	-1,5	-3,7

34 Fabiola a calculé les coordonnées du point moyen de la série statistique donnée par le tableau :

x_i	2	5	6	9	11
y_i	22,5	18,3	16,4	15,1	13,3

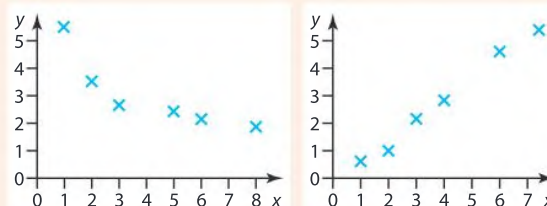
Elle a obtenu $G(6,6 ; 13,1)$. En n'ayant fait aucun calcul, son amie Inès lui dit qu'elle s'est trompée. Qu'en est-il ? Justifier la réponse.

Ajustements affines

→ Aide Cours 2 p. 102

Question de cours

35 On donne ci-dessous deux nuages de points.

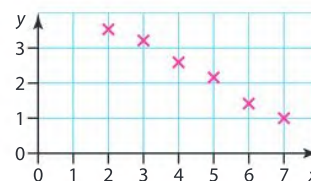


Un ajustement affine semble-t-il envisageable pour chacun de ces nuages ? Justifier la réponse.

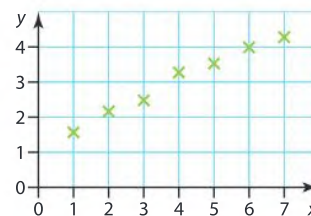
Vrai ou faux

36 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

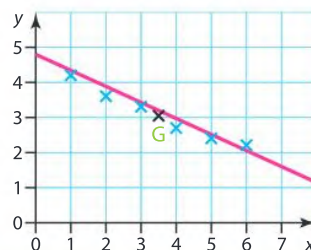
1. Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables. Un ajustement affine de ce nuage de points est envisageable.



2. Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables. La droite d'équation $y = 0,5x + 2$ réalise un bon ajustement affine du nuage.



3. Voici le nuage de points d'une série statistique à deux variables. G est le point moyen du nuage. La droite Δ est la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.



Dans les exercices 37 à 39, déterminer, à l'aide de la calculatrice la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près). Déterminer ensuite les coordonnées de deux points lui appartenant.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 103

37 

x_i	1	2	3	4	5
y_i	123	129	135	140	145

38 

t_i	3	5	7	8	11	13
y_i	9,92	9,86	9,85	9,84	9,79	9,76

39 

t_i	18	20	21	25	28	30	33
N_i	24	44	62	100	132	145	161

40 On estime que la droite d'équation $y = 0,25x - 4,2$ fournit un bon ajustement affine du nuage de points d'une série statistique à deux variables.

- Calculer y lorsque $x = 3$.
- Calculer x lorsque $y = 6,5$.

41  Une étude a permis d'établir que la relation entre le chiffre d'affaires y (en euros) d'un magasin d'articles de sport et le montant de la publicité investi x (en euros) est la suivante :

- $y = 3,7x + 65\,000$.
- Calculer le montant du chiffre d'affaires espéré si ce magasin investit 3 000 € en publicité.
 - Estimer le montant investi en publicité par ce magasin si son chiffre d'affaires est de 84 240 €.

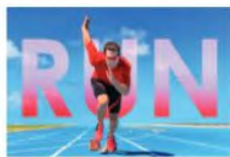
→ Voir Exercice résolu 4 p. 103

42  Depuis 2012, une étude a établi que le montant moyen des achats en ligne en France y (en euros) suivant l'année x est donné par la relation $y = -4,3x + 8\,740$. Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques années :

- Estimer le montant moyen des achats en ligne en 2021.
- Estimer en quelle année le montant moyen des achats en ligne deviendra inférieur à 45 €.

43  Un magazine automobile a réalisé des mesures sur l'autonomie d des voitures électriques en km suivant l'année x depuis 2015.

On admet que la droite d'équation $d = 25x - 50\,339$ fournit un bon ajustement affine de la situation. Si ce modèle d'ajustement reste encore fiable quelques années :



- Estimer l'autonomie des voitures électriques en 2021.
- Estimer en quelle année l'autonomie des voitures électriques dépassera 600 km.

44 On a relevé, de l'année 2010 à l'année 2019, le nombre de licences sportives N délivrées dans une ville suivant l'année x . On estime que la droite d'équation $N = 112x - 216\,540$ fournit un bon ajustement affine de la situation. Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques années :

- Estimer le nombre de licences sportives délivrées dans cette ville en 2025.
- Estimer en quelle année le nombre de licences sportives délivrées dans cette ville dépassera 10 000.

45  Une population de bactéries placées dans un liquide se multiplie. On a étudié pendant 6 heures l'évolution du nombre N de bactéries, en millions, en fonction du temps t , en heures.

On estime que la droite d'équation $N = 9,26t + 1,5$ fournit un bon ajustement affine de la situation.

Si ce modèle d'ajustement reste fiable encore quelques heures :

- Estimer le nombre de bactéries au bout d'un jour.
- Estimer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries dépassera 100 000 000.



QCM

46 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Entre le 1^{er} janvier 2015 et le 1^{er} janvier 2019, on a relevé le prix d'un article de consommation courante.

Année	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Prix y_i (en €)	7,9	8,3	8,7	9,4	9,8

1. Le point moyen du nuage de points de cette série statistique a pour coordonnées :

- a. (2013 ; 3) b. (3 ; 8,7)
c. (3 ; 8,82) d. (2013 ; 8,82)

2. La droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés a pour équation :

- a. $y = -0,49x + 4$ b. $y = 0,49x + 7,35$
c. $y = 0,49x - 977,55$ d. $y = x - 2010$

3. Avec l'ajustement précédent, le prix de cet article en 2024 est estimé à :

- a. 997,15 € b. 10,15 € c. 12,25 € d. 11,90 €

4. Avec l'ajustement précédent, on peut estimer que le prix de cet article dépassera 15 € en :

- a. 2031 b. 2030 c. 2026 d. 2034

Nuage de points et point moyen

47 Représenter sur la calculatrice le nuage de points de la série statistique ci-dessous :

x_i	0	2	4	6	8	10	12
y_i	3	3,6	5,5	5,9	7,7	8,4	9,6

Coup de pouce

- Pour cela, saisir les valeurs du tableau dans la calculatrice :

Sur TI	Sur Casio
① 2nd STAT , sélectionner 4 : GraphNaff puis entrer .	① GRAPH puis SET
② 2nd STAT , appuyer 2 fois sur entrer puis zoom 9 .	② EXIT puis GRAPH

48 On donne ci-dessous le tableau d'une série statistique à deux variables.

x_i	35,2	a	26,7	21	18,4	15,2	11,3	9,8
y_i	11,4	9,5	7,6	5,2	4	3,1	2,8	b

On sait que le point moyen du nuage de point de cette série a pour coordonnées (21,3 ; 5,6).
Calculer la valeur de a et celle de b .

Ajustements affines

49 **ALGO** **PYTHON** Compléter un algorithme

Le programme Python ci-contre permet de calculer la moyenne d'une liste de nombres mais un bout de la dernière ligne a été effacé.

```
def moy(l):
    #l est une liste"
    s=0
    for i in l:
        s=s+i
    return .....
```

- Donner l'instruction manquante.
- Utiliser cet algorithme pour déterminer les coordonnées du point moyen du nuage de points associé à la série statistique donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	10	15	20	25	30
y_i	21,75	24	25	26	28,25

- Alex a déterminé l'équation de la droite des moindres carrés ajustant le nuage de point de cette série statistique mais une tache d'encre a recouvert une partie de l'équation :

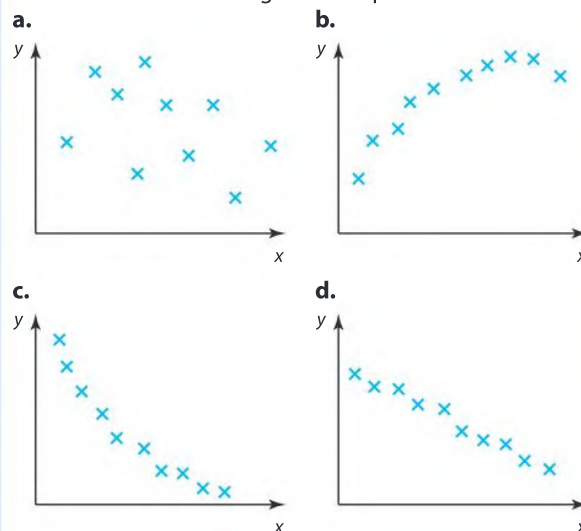
$$y = 0,3x +$$

En utilisant la question 2., retrouver la valeur manquante.

QCM

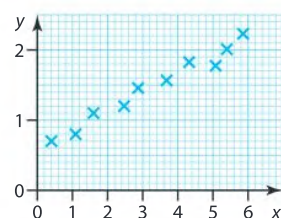
50 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- Pour un seul de ces quatre nuages de points, un ajustement affine est envisageable. Lequel ?



- Le point moyen G du nuage de points représenté ci-contre a pour coordonnées :

- (2,27 ; 1,47)
- (3,27 ; 1,47)
- (3,27 ; 0,58)
- (4,64 ; 1,75)



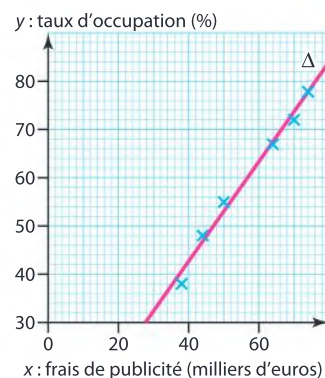
- La droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés du nuage de points représenté ci-dessus a pour équation :

- $y = -2,61x + 0,57$
- $y = 0,27x + 0,6$
- $y = 1,74x + 0,58$
- $y = 0,29x + 0,12$

51 **STMG** Afin d'orienter ses investissements, une petite chaîne d'hôtels réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Elle établit un lien entre le taux d'occupation, exprimé en %, et le montant des frais de publicité (en milliers d'euros).

On donne ci-contre le nuage de points obtenu pour cette étude ainsi qu'une droite Δ fournissant un bon ajustement affine de ce nuage.

- Estimer graphiquement le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 €.



b. Estimer graphiquement le montant des frais de publicité laissant espérer un taux d'occupation de 80 %.

2. On admet que Δ a pour coefficient directeur 1,04 et passe par le point A(11 ; 12).

Déterminer l'équation réduite de la droite Δ puis retrouver les résultats obtenus à la question 1. par le calcul.

52  Un hypermarché propose à ses clients six modèles d'ordinateurs portables.

Il réalise une étude sur le volume des ventes suivant le prix de vente de ce produit. Voici les résultats :



Prix de l'ordinateur x_i (en €)	300	350	400	450	500	600
Nombre d'unités vendues y_i	210	190	160	152	124	102

1. Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 50 € sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine le point de coordonnées (250 ; 100)).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3. Tracer, « au jugé », une droite d'ajustement passant par le point moyen G.

4. La direction souhaite proposer un nouveau modèle à la vente, au prix de 430 €. Déterminer graphiquement une estimation du nombre de ventes de ce nouveau modèle.

53  Le contrôle de gestion d'une entreprise a relevé depuis l'année 2014 le budget publicitaire, en dizaines de milliers d'euros. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Budget : y_i	2,4	2,9	3,1	3,4	3,6	4,1

1. Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 dizaine de milliers d'euros sur l'axe des ordonnées), représenter le nuage de points de cette série statistique.

2. Soit G_1 le point moyen associé aux trois premiers points du nuage et G_2 le point moyen associé aux trois derniers points du nuage.

Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 .

3. Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

4. Estimer graphiquement l'année à partir de laquelle le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 €.

5. Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2) puis retrouver le résultat de la question 4. par le calcul.

54  Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le prix y , en euros, d'un même appareil électronique chaque année de 2013 à 2019. On pose : $z = \frac{1}{y}$.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Prix y_i	1 050	850	740	650	580	510	480
z_i							

1. Reproduire et compléter le tableau (résultats arrondis à 10^{-4} près).

2. Donner l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-5} près).

3. En déduire l'expression de y en fonction de x .

4. On suppose que l'évolution du prix de cet appareil se poursuit suivant ce modèle encore quelques années.

a. Estimer le prix de cet appareil pour l'année 2022.

b. Déterminer à partir de quelle année le prix de cet appareil aura perdu 70 % de sa valeur initiale.

55 Au cours d'une séance d'essai, un pilote automobile doit, à la réception d'un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.



Au moment du signal sonore, on mesure la vitesse de l'automobiliste puis la distance nécessaire pour arrêter son véhicule. Pour six expériences, on a obtenu les résultats suivants :

Vitesse v_i (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)	21	43	62	77	98	115
Distance d'arrêt d_i (en m)	8	20	33	55	102	137

1. Les spécialistes pensent obtenir un meilleur ajustement en remplaçant les valeurs v_i par les valeurs $x_i = (v_i)^2$.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

x_i						
d_i	8	20	33	55	102	137

2. a. Soit A(10 ; -1) et B(1 000 ; 8,9). On admet que la droite (AB) fournit un bon ajustement affine du nuage de points $M_i(x_i ; d_i)$.

Déterminer l'équation réduite de la forme $d = ax + b$ (où a et b sont des nombres réels) de la droite (AB).

b. En déduire une relation entre d et v .

c. Estimer la distance d'arrêt du véhicule pour une vitesse de 150 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

d. Estimer la vitesse du véhicule pour une distance d'arrêt de 180 m.

56 **STI2D**  Une entreprise spécialisée dans les panneaux photovoltaïques pour camping-car a mené une étude visant à déterminer à quel prix maximal ses clients seraient prêts à acheter l'un de ses produits.



Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix maximal x_i (en €)	50	100	150	200	250
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	646	401	224	101	34

1. Représenter sur la calculatrice le nuage de points de cette série statistique (voir le **Coup de pouce** de l'exercice 47). Un ajustement affine de ce nuage est-il envisageable ? Justifier.

2. On pose $z = \sqrt{y}$.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant (arrondir à 10^{-2} près).

x_i	50	100	150	200	250
z_i					

b. Représenter sur la calculatrice le nuage de point de cette nouvelle série statistique. Un ajustement affine de ce nouveau nuage de points est-il envisageable ? Justifier.

c. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-1} près).

d. En déduire une expression de y en fonction de x . Vérifier que pour un prix de 100 euros, le nombre d'acheteurs potentiels est cohérent avec l'effectif du tableau.

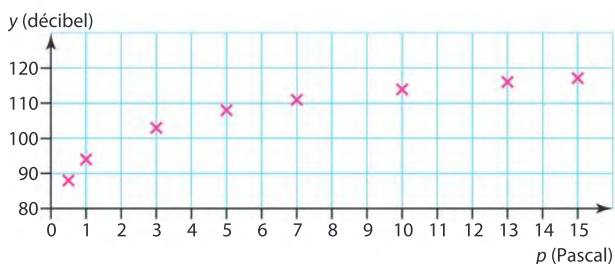
e. Estimer le nombre de clients prêts à acheter ce produit jusqu'à 280 euros.

57  Dans une grande salle de concert, pendant huit soirées différentes, on a relevé la pression acoustique ambiante (en Pascal : Pa) ainsi que le niveau d'intensité sonore (en décibel : dB) du bruit responsable de cette pression. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :



Pression acoustique : p_i	0,5	1	3	5	7	10	13	15
Intensité sonore : y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

Voici le nuage de points de cette série statistique.



Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

1. On pose $x = \log p$. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de x_i à 10^{-2} près.

x_i								
y_i	88	94	103	108	111	114	116	117

2. Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5 dB sur l'axe des ordonnées en prenant 80 pour origine), représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$. Un ajustement affine du nuage de points semble-t-il pertinent ? Justifier.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

4. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près). Tracer cette droite dans le repère.

5. Lors d'un concert de hard rock, l'oreille des spectateurs peut être soumise à la pression de 20 Pa. Estimer par le calcul l'intensité sonore atteinte lors d'un tel concert (résultat arrondi au décibel près).

58 **STI2D**  Le tableau ci-dessous présente la capacité de production d'électricité des éoliennes, en térawatts-heure (TWh) de 2011 à 2018 en France :



Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Production : P_i	12,1	14,9	15,9	17,1	21,2	21,4	24,7	27,8
y_i								

On pose $y = \log P$.

1. Reproduire et compléter la dernière ligne du tableau (résultats arrondis à 10^{-2} près).

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour un rang d'année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 0,1 sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 1).

3. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près). La représenter sur le graphique.

4. En déduire une expression de P en fonction de x .

5. En supposant que cette expression constitue une bonne modélisation :

a. Estimer par lecture graphique la capacité de production en TWh de ce parc éolien en 2021.

b. Estimer par un calcul l'année à partir de laquelle la capacité de production dépassera 52 TWh.



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

La cote Argus y (en milliers d'euros) d'une voiture d'occasion suivant son nombre d'années de mise en circulation x est donnée dans le tableau ci-dessus.

Nombre d'années de mise en circulation : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Cote Argus : y_i (en milliers d'euros)	22,1	14,3	9,2	8,1	7,2	6,6	5,8

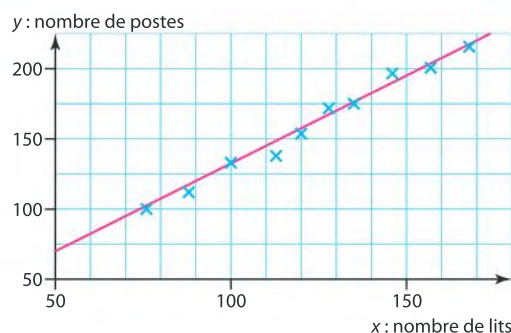
	V	F
59 Les spécialistes pensent obtenir un bon ajustement en posant $z = \frac{1}{y}$.		
60 La droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés a pour équation $z = -2,37x + 19,94$.		
61 Une expression acceptable de y en fonction de x est : $y = \frac{1}{0,02x + 0,03}$.		
62 Une estimation de la cote Argus de ce modèle de véhicule après 9 ans de mise en circulation est environ de 4 762 €.		
63 Le nombre d'années de mise en circulation d'un véhicule de ce modèle ayant une cote Argus de 3 700 € est estimé à 14 ans.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

On a recensé, au sein de 10 cliniques, le nombre de lits x , en fonction du nombre de postes du personnel non médical y de la clinique. Voici le nuage de points de la série statistique.



64 Le nombre de postes du personnel non médical dans la clinique possédant 100 lits est :

- a. 133 b. 76 c. 84

65 Le nombre de lits dans la clinique possédant 175 postes de personnel non médical est :

- a. 120 b. 212 c. 135

66 Le point moyen G du nuage de points a pour coordonnées :

- a. (95,2 ; 123,3) b. (139,8 ; 181,5) c. (123,1 ; 160,8)

67 La droite d'ajustement représentée sur le graphique a pour équation :

- a. $y = -0,48x + 4,21$ b. $y = 1,26x + 5,77$ c. $y = 1,46x + 69,9$

68 Si une clinique possède 82 lits, le nombre de personnes occupant un poste non médical est estimé à :

- a. 109 b. 61 c. 98

69 Si une clinique a embauché 152 personnes occupant un poste non médical, elle devrait posséder :

- a. 208 lits b. 116 lits c. 197 lits

→ Vérifier les résultats p. 178

70 In English



Following the launch of a new product in 2014, a company which sells medical equipment has seen its annual profits rise. The following table shows the evolution :

Year	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Year rank x_i	1	2	3	4	5	6
Profit P_i (millions of euros)	65	74	98	112	124	136

- Find the coordinates of the mid point G.
- Find the reduced form of the regression line relative to the points $M_i(x_i; P_i)$ (coefficients should be rounded to 10^{-1}).
- Use this equation to estimate the profit of this company in 2022.
- Use this equation to estimate when the profits of this company will exceed 200 000 000 €.

71 **COMPÉTENCE** Modéliser

À la suite d'un accident nucléaire, on a relevé, chaque heure t , avec un appareil de mesure de la radioactivité, le nombre n de particules recueillies en 1 seconde.

Voici les résultats obtenus :

t_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	169	101	62	43	26	17	12

- On pose $y = \log(n - 3)$. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-1} près.

t_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i							

- Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-1} près).
- En déduire une expression de n en fonction de t pouvant servir de modèle à la situation.
- Estimer par le calcul le nombre de particules recueillies en 1 seconde au bout de 8 heures.
- Estimer par le calcul au bout de combien d'heures le nombre de particules recueillies en 1 seconde deviendra inférieur à 5.

72 **COMPÉTENCE** Calculer

Au cours de l'hydrolyse alcaline du nitrobenzoate d'éthyle, celui-ci se dégrade en nitrobenzoate et en éthanol. Dans le tableau suivant, on a mesuré en fonction du temps t , exprimé en minutes, la concentration C du nitrobenzoate d'éthyle, exprimée en millimoles par litre.

t_i	0	1	2	3	4	6	8	10
C_i	50	32,5	27,6	21,3	17,2	14,1	10	8,2

- À l'aide de la calculatrice, représenter le nuage de points de cette série statistique. Un ajustement affine semble-t-il pertinent ?
- a. On pose $y = \frac{100}{C}$. Reproduire et compléter le tableau suivant en arrondissant si nécessaire les résultats à 10^{-2} près.

t_i	0	1	2	3	4	6	8	10
y_i								

- Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-2} près).
- En déduire une expression de C en fonction de t .
- En utilisant ce modèle, estimer la concentration du nitrobenzoate d'éthyle au bout de 8 minutes et 30 secondes (résultat arrondi à 10^{-1} près).
- Déterminer par le calcul à quel moment il restera 5 mmol·L⁻¹ de nitrobenzoate d'éthyle. On donnera un résultat arrondi à la minute près.

73 **COMPÉTENCE** Raisonner

Une machine fabricant des rondelles en acier utilisées dans le montage de moteurs de voitures est achetée 3 000 €. Le prix de revente y , exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983
z_i						

A. Un ajustement affine

- Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à l'unité.
- Avec ce modèle d'ajustement, estimer par le calcul, le prix de revente de la machine au bout de 8 ans. Commenter le résultat obtenu.

B. Un ajustement non affine

On pose $z = \log y$.

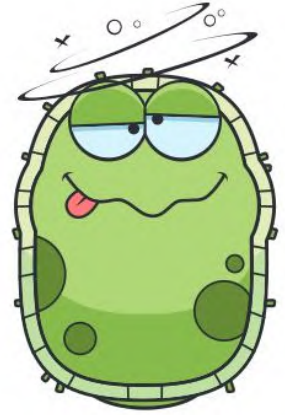
- Reproduire et compléter le tableau ci-dessus (résultats arrondis à 10^{-2} près).
- Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près).
- En déduire une relation entre y et x .
- Avec ce modèle d'ajustement, estimer par le calcul le prix de revente de la machine au bout de 8 ans.

Progression d'une maladie contagieuse

CAPACITÉ Rechercher le meilleur ajustement affine parmi plusieurs grâce à un algorithme.

Afin d'étudier la progression d'une maladie contagieuse, on a mené une enquête auprès d'un échantillon de 5 000 personnes. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'individus ayant été contaminés au mois de janvier, à la date exprimée en jours.

Date exprimée en jours : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de malades : y_i	124	168	175	211	247	310	329	376



PARTIE 1 Observation

1. Dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 100 sur l'axe des ordonnées), construire le nuage des points $M_i(x_i; y_i)$ de la série statistique étudiée.
2. En observant ce nuage de points, dire si un ajustement affine semble envisageable.

PARTIE 2 Différents ajustements affines

1. Une droite obtenue « au jugé »

Placer sur le graphique précédent deux points A et B tel que la droite (AB) fournisse un ajustement affine acceptable du nuage de points puis déterminer son équation réduite.

2. La droite des extrêmes

- a. Construire la droite (M_1M_8) , appelée « la droite des extrêmes » et dire si elle convient pour ajuster le nuage de points de la série statistique étudiée.
- b. Déterminer son équation réduite.

3. La droite de Mayer

- a. On désigne par G_1 le point moyen des quatre premiers points du nuage de points et par G_2 celui des quatre derniers. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 .
- b. Construire la droite (G_1G_2) et dire si elle convient pour ajuster le nuage de points de la série statistique étudiée.
- c. Déterminer son équation réduite.



En salle informatique



lienmini.fr/10445-32

Soit S la somme

$$S = (M_1N_1)^2 + (M_2N_2)^2 + (M_3N_3)^2 + \dots + (M_8N_8)^2$$

où $N_1, N_2, \dots, N_8$ sont les points d'une droite D d'abscisses respectives $x_1, x_2, \dots, x_8$.

1. Soit D une droite d'équation réduite $y = ax + b$. Justifier que pour i allant de 1 à 8 :

$$(M_iN_i)^2 = [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

2. Ouvrir le fichier du lien mini (statistiques2variables_TP.py).

L'algorithme proposé définit la fonction « optimisation » renvoyant le couple $(a; b)$ qui minimise la somme S des $[y_i - (ax_i + b)]^2$.

- a. L'algorithme fait intervenir la fonction « somme » suivante :

```
def somme(a,b,Lx,Ly):# cette fonction renvoie la somme des [yi-(axi+b)]^2
    #a et b sont des nombres réels
    #Lx est la liste des xi
    #Ly est la liste des yi
    S=0
    n=len(Lx) #n est la longueur de la liste Lx ou de Ly
    for i in range(n):
        S+=
    return(S)
```

Donner l'avant-dernière ligne de cet algorithme.

- b. Utiliser la fonction **optimisation** pour déterminer parmi les droites obtenues dans la **Partie 2** ci-dessus celle fournissant le meilleur ajustement affine du nuage de points de la série statistique.

- c. En déduire l'estimation du nombre de malades le 15^e jour du mois.

SUJET RÉSOLU

BAC

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
74 Donner l'équation réduite de la droite de coefficient directeur 3 passant par le point A(0,5 ; -2).	Utiliser les coordonnées de A pour calculer l'ordonnée à l'origine.	$y = 3x - 3,5$
75 Donner l'équation réduite de la droite passant par les points A(-3 ; 8) et B(1 ; 0).	Calculer le coefficient directeur grâce à sa formule puis l'ordonnée à l'origine.	$y = -2x + 2$
76 On donne $y = (-3x + 5)^2$. Calculer y pour $x = 4$.	Remplacer x par la valeur donnée.	$y = 49$
77 On donne $y = -2x + 4,2$. Calculer x pour $y = 10,4$.	Résoudre l'équation obtenue après avoir remplacé y par la valeur donnée.	$x = -3,1$

78 Le tableau ci-contre donne le nombre de producteurs d'agriculture biologique en France de 2014 à 2018.

Année	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre de producteurs y_i (en milliers)	26,4	28,8	32,2	36,7	41,5

- Représenter le nuage de points de cette série statistique dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour 1 rang d'année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 milliers sur l'axe des ordonnées en prenant pour origine 24).
- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points. Le placer sur le graphique.
- Déterminer une équation de la droite d'ajustement Δ de y en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-1} près). La tracer sur le graphique.
- Selon ce modèle, estimer par le calcul le nombre de producteurs d'agriculture biologique en France en 2021.

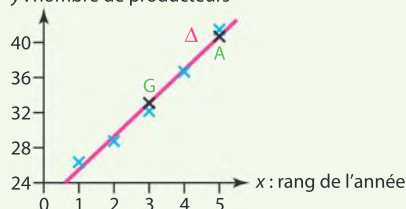
Méthode à appliquer

Solution rédigée

1. On place les points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère en respectant les unités imposées.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 101

1. y : nombre de producteurs



2. On calcule $\bar{x}$, moyenne des valeurs prises par le 1^{er} caractère et $\bar{y}$, moyenne des valeurs prises par le 2nd caractère. On conclut en donnant les coordonnées de $G(\bar{x} ; \bar{y})$.

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 101

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{26,4+28,8+32,2+36,7+41,5}{5} = 33,12$$

Donc $G(3 ; 33,12)$.

3. On utilise le mode **statistiques** de la calculatrice.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 103

3. Avec la calculatrice, on obtient pour équation de Δ : $y = 3,8x + 21,7$.
Si $x = 5$, $y = 3,8 \times 5 + 21,7 = 40,7$.
Donc Δ est la droite passant par G et par A(5 ; 40,7).

4. On remplace x par le rang de l'année de l'année 2021 dans l'équation de Δ et on calcule y.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 103

4. L'année 2021 est l'année de rang $x = 8$.
On a alors : $y = 3,8 \times 8 + 21,7 = 52,1$.
En 2021, le nombre de producteurs d'agriculture biologique en France est estimé à 52 100.

79 CAPACITÉS

- Représenter un nuage de points.
- Déterminer et utiliser un ajustement affine pour interpoler ou extrapoler des valeurs inconnues.

Une entreprise fabriquant des montures de lunettes veut créer un nouveau modèle. Pour choisir les matériaux à utiliser, elle mène une enquête auprès de porteurs de lunettes, en proposant huit prix différents. Les résultats sont reportés dans le tableau suivant :

Prix de vente proposé : x_i (en euros)	240	320	400	480	560	640	720	800
Nombre de personnes disposées à acheter à ce prix : y_i	402	390	340	230	210	130	70	60

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 100 € sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 sur l'axe des ordonnées).
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
3. On donne le point A de coordonnées (260 ; 409). Placer les points A et G sur le graphique, puis tracer la droite (AG).
4. On admet que la droite (AG) constitue un ajustement convenable du nuage de points précédent. Vérifier que la droite (AG) a pour équation : $y = -\frac{9}{13}x + 589$.

Méthode On peut vérifier que les coordonnées de A et de G vérifient l'équation $y = -\frac{9}{13}x + 589$.

Pour la suite, on utilisera : $y = -0,7x + 589$, le coefficient directeur de la droite (AG) étant arrondi au dixième.

5. En utilisant l'ajustement précédent, calculer une estimation du nombre de montures vendues en proposant un prix de vente de 500 euros.

80 CAPACITÉ



- Représenter un nuage de points en effectuant un changement de variable donné afin de conjecturer une relation de linéarité entre deux nouvelles variables.

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes ; situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900.

Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.

On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure	1920	1940	1960	1980	2000
Temps écoulé depuis 1900 : t_i	20	40	60	80	100
Recul en km : r_i	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de :

$$25,6 - 0,6 = 25 \text{ km.}$$

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

1. On pose $y = 2,3 \log r$.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

t_i	20	40	60	80	100
y_i					

2. Représenter le nuage de points $M_i(t_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.

Unités graphiques : 1 cm pour 10 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.

Placer le point G sur le graphique précédent.

4. a. Donner l'équation de la droite D d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés puis tracer la droite D .

- b. Déterminer l'expression de r en fonction de t .

Méthode Utiliser l'équation de la droite D et le changement de variable $y = 2,3 \log r$.

5. En utilisant le modèle obtenu précédemment :

- a. Estimer graphiquement le recul puis la longueur du glacier en 2020.
- b. Estimer par le calcul l'année de disparition du glacier.

81  Un opérateur désireux de gagner des parts de marché propose à 1 500 personnes de tester un nouveau type de téléphone portable. Pour cela, il dispose d'au moins 8 jours pour convaincre ces personnes de changer de téléphone. Le tableau ci-contre indique les résultats observés.

Rang du jour t_i	Nombre de personnes convaincues N_i
1	40
2	420
3	640
4	790
5	890
6	970
7	1 030
8	1 080

1. On pose $y = \frac{1\,500}{1\,500 - N}$.

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs à 10^{-2} près.

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,03							

2. On appelle G_1 le point moyen des 4 premiers points du nuage et G_2 celui des 4 derniers.

a. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 .

b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) (coefficients arrondis à 10^{-2} près).

3. En admettant que cette droite donne une approximation satisfaisante de y en fonction de t , montrer que $N(t) = 1500 \left(1 - \frac{1}{0,36t + 0,67} \right)$.

4. En utilisant cet ajustement :

a. Estimer le nombre de personnes convaincues par ce nouveau téléphone au bout de 10 jours.

b. Estimer à partir de combien de jours l'opérateur peut espérer convaincre au moins 90 % de ce groupe.

82  En 2012, un centre d'appels comptait soixante-six employés. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du rang de l'année.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année.

On pose alors : $z = \sqrt{y} - 3$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant (on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis au centième).

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12						

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (on donnera les coefficients sous forme décimale, arrondis au centième).

3. Déterminer l'expression de y en fonction de x .

4. En utilisant cet ajustement, déterminer à partir de quelle année on peut prévoir que l'effectif de ce centre d'appels dépassera 900 employés.

83 Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation des ménages sur les dernières années. La consommation est exprimée en milliers d'euros.

Année	2012	2014	2015	2016	2018
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation y_i (en milliers d'euros)	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (unités graphiques : 1 cm pour 1 en abscisses et 1 cm pour 10 000 € en ordonnées).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.

3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12,5x + b$ qui passe par le point G .

a. Déterminer la valeur de b .

b. Tracer la droite D dans le repère précédent.

4. Déterminer, graphiquement, la consommation estimée des ménages de cette ville en 2019.

5. En réalité, un relevé récent a permis de constater qu'en 2019 la consommation réelle des ménages de cette ville était de $y_8 = 140$. Un nouvel ajustement semble alors plus adapté.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant sachant que $z = \log y$ (résultats arrondis à 10^{-2} près).

x_i	1	3	4	5	7	8
z_i						

b. Déterminer l'équation réduite de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2} près).

c. En déduire que : $y = 20,4 \times 10^{0,1x}$.

d. Estimer alors, à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2021.

6

Probabilités conditionnelles

CAPACITÉS

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.



Une classe de Terminale compte 30 % d'élèves qui téléchargent des vidéos, dont 40 % qui les lisent sur leur smartphone. Le reste regarde des vidéos en streaming, dont 20 % depuis leur smartphone.

Un élève lit une vidéo sur son smartphone. Quelle est la probabilité qu'il l'ait téléchargée ?



→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 120

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions
Flash

Diaporama

15 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-34

1 Proportion et tableaux croisés

Un **tableau croisé** permet l'étude de deux caractères d'une population.

Les cases du tableau peuvent se remplir avec les :

- **effectifs** ;
- **fréquences marginales** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total ;
- **fréquences conditionnelles** :
 - par **lignes** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne.
 - par **colonnes** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la colonne.

	A	B	TOTAL
C			
D			
TOTAL			

2 Probabilités conditionnelles

Si A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$, la **probabilité de B sachant que A est réalisé**, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Le tableau ci-contre présente l'équipement audio des élèves de deux classes de Terminale. On choisit un élève au hasard.

	Écouteurs	Casque	TOTAL
Garçons	15	21	36
Filles	20	8	28
TOTAL	35	29	64

	a	b	c	d	Aide
1. L'élève choisi est une fille. La probabilité qu'elle ait un casque est :	$\frac{29}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{8}{28}$	1
2. Sachant que c'est un garçon, la probabilité qu'il ait des écouteurs est :	$\frac{35}{64}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\approx 0,23$	1
3. Sachant que l'élève a un casque, la probabilité que ce soit un garçon est :	$\frac{21}{36}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{29}{21}$	$\frac{21}{29}$	1
4. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La carte tirée n'est ni un chiffre ni un as. La probabilité que cette carte soit noire est :	0,187 5	0,375	0,5	on ne peut pas savoir	2
5. Dans la même situation que précédemment, la probabilité que cette carte soit un roi ou une dame est :	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{32}$	2

→ Voir **Corrigé** p. 178

1

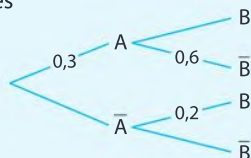
Un drôle d'arbre

OBJECTIF Construire et exploiter un arbre de probabilités → Cours 1A, 1B, 1C p. 122 et p. 124

On schématise une situation aléatoire par un **arbre de probabilités**. Une **branche** est un segment menant à un événement. Chaque branche porte la probabilité de l'événement à laquelle elle mène, conditionnée par l'(es) événement(s) d'où elle provient. Un **nœud** est le croisement de plusieurs branches. La **somme** des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

1. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les probabilités des événements :

- $\bar{A}$
- B sachant A
- $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$



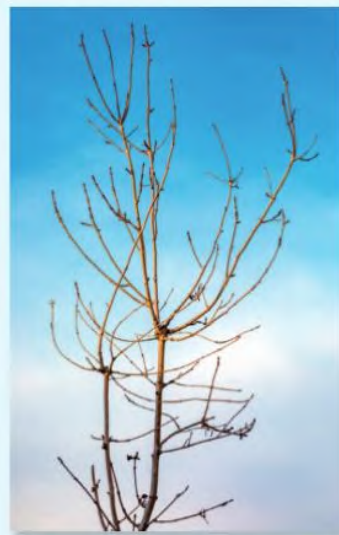
2. Un **événement bilan**, situé à l'une des extrémités de l'arbre, est l'intersection de tous les événements qui y mènent. Sa probabilité est le produit des probabilités des branches du **chemin** qui y mène.

Calculer $P(A \cap B)$, et le comparer à $P(A) \times P_A(B)$.

3. En déduire $P(A \cap \bar{B})$.

4. On admet que $P(B) = 0,26$. Calculer $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$. Qu'en déduit-on ?

La formule obtenue est appelée **formule des probabilités totales**.



2

Streaming et téléchargement

VIE QUOTIDIENNE

OBJECTIF Faire le lien entre l'arbre et les formules de probabilités → Cours 1B, 1C p. 122 et p. 124

Dans une classe de Terminale, 30 % des élèves téléchargent les vidéos, les autres les regardent en streaming.

Parmi ceux qui utilisent le téléchargement, 40 % le font sur leur smartphone, contre 20 % pour ceux qui utilisent le streaming (les autres utilisent une tablette ou un ordinateur).

On note les événements :

- M : « l'élève lit les vidéos sur son smartphone ».
- T : « l'élève utilise le téléchargement ».
- S : « l'élève utilise le streaming ».

1. Déterminer $P(T)$, $P(S)$, $P_T(M)$ et $P_S(M)$.

2. a. Traduire par une phrase les événements $T \cap M$ et $S \cap M$.

b. À l'aide de la formule d'une probabilité conditionnelle, calculer $P(T \cap M)$ et $P(S \cap M)$.

3. L'ensemble des élèves qui lisent une vidéo sur leur smartphone regroupe ceux qui utilisent le streaming et lisent une vidéo sur leur smartphone, et ceux qui utilisent le téléchargement et lisent une vidéo sur leur smartphone. De cette information et de la question 2., en déduire $P(M)$.

4. Un élève a lu une vidéo sur son smartphone. Quelle est la probabilité qu'il l'ait téléchargée ?



3

Un test si fiable ?

STL

BIOLOGIE

OBJECTIF Appliquer la formule des probabilités totales sans arbre → Cours 1B, 1C p. 122 et p. 124

À la suite d'une étude épidémiologique réalisée dans une population, il a été révélé qu'un individu sur 1 000 est atteint par une maladie virale. Afin de sensibiliser la population à la prévention de cette maladie, un laboratoire propose un test de dépistage ayant les caractéristiques suivantes :

- si un individu est atteint par la maladie, le test est positif à 99,7 % ;
- si un individu n'est pas atteint par la maladie, le test est négatif à 0,95 %.

Si ces chiffres semblent très bons, ce test doit être validé par le ministère de la santé local avant d'autoriser ou non sa commercialisation.

Le test sera considéré comme « fiable » si la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie sachant que le test est positif est supérieure à 95 %. On considère les événements suivants :

- M : « L'individu est atteint par la maladie » ;
- T : « Le test est positif ».

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie.

2. En déduire la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie sachant que le test est positif.

3. Peut-on affirmer que ce test est fiable ?



4

L'indépendance

OBJECTIF Découvrir l'indépendance de deux événements → Cours 2A, 2B p. 124

On considère un jeu classique de 32 cartes dans lequel toutes les cartes sont supposées avoir la même probabilité d'apparition.

On tire une carte au hasard dans ce jeu.

On note R l'événement : « la carte tirée est un roi » et N l'événement : « la carte tirée est un nombre ». On prendra pour convention que les As sont considérés comme des nombres (et non des figures).

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** si, par exemple (quitte à inverser A et B), la probabilité de A sachant que B est réalisé est égale à la probabilité de A. Autrement dit, la réalisation de l'événement B ne modifie pas la probabilité de l'événement A.

1. Les événements R et N sont-ils indépendants ?

2. On tire une carte du jeu. Cette carte tirée n'est pas un cœur. On note C cet événement.

a. Que peut-on dire des événements C et N ? Et des événements C et $\bar{N}$?

b. Que peut-on dire des événements C et R ? Et des événements C et $\bar{R}$?

Il semblerait donc que l'on ait la propriété suivante : si A et B sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont également indépendants.



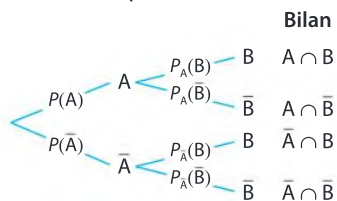
1

Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

Ω désigne l'univers, A et B deux événements de Ω , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leurs événements contraires.

A Définitions

• Un **arbre de probabilités** est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Dans un tel arbre :

- une **branche** est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène. Ci-dessus, sur la branche de A à B , on place $P_A(B)$, la probabilité conditionnelle de B sachant A ;
- un **nœud** est un croisement entre plusieurs branches ;
- un **chemin** est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre ;
- l'**événement bilan**, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

B Règles de construction d'un arbre

Un arbre de probabilités satisfait les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

→ Voir **Exercice résolu 1**

EXEMPLE • $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

REMARQUE • On dit alors que les événements incompatibles A et $\bar{A}$ forment une **partition de l'univers**. D'une manière générale, une **partition d'un ensemble** est un « découpage » d'un ensemble en plusieurs sous-parties disjointes (ou « incompatibles ») telles que, si on les réunit, on reconstitue l'ensemble tout entier. En particulier, si A_1 et A_2 forment une partition d'un ensemble A , alors $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$.

PROPRIÉTÉ La probabilité d'un chemin est le **produit des probabilités** des branches qui le composent.

→ Voir **Exercices résolus 1 et 2**

REMARQUE • La probabilité d'un événement bilan est donc le produit des probabilités des branches du chemin qui mènent à cet événement.

EXEMPLE • $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Vocabulaire

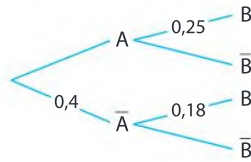
Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exercice résolu

1

Utiliser un arbre pour calculer des probabilités

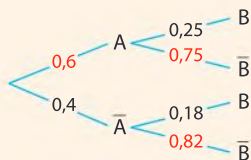
On donne l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. Reproduire et compléter cet arbre.
2. Lire $P_A(B)$.
3. Déterminer $P(A \cap B)$.
4. On donne $P(B) = 0,222$. En déduire $P_B(A)$ arrondie au millième.

Solution

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1, donc :



2. $P_A(B) = 0,18$.
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$.
4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,222} = 0,45$$

→ Voir Exercices 16 à 18 p. 128

Exercice résolu

2

Construire et exploiter un arbre de probabilités

Un panier contient 45 % de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons, 70 % proviennent de France. Parmi les kiwis, 80 % ne proviennent pas de France. On note les événements :

C : « le fruit est un citron ».

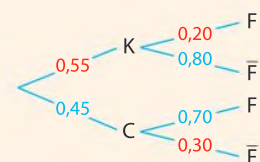
K : « le fruit est un kiwi ».

F : « le fruit provient de France ».

1. Décrire la situation par un arbre de probabilités.
2. Traduire l'événement « F sachant K » et donner sa probabilité.
3. En déduire $P(K \cap F)$.

Solution

1. Les données de l'énoncé et les règles de calculs nous donnent l'arbre ci-contre.
2. L'événement est « le fruit provient de France sachant que c'est un kiwi ». D'après l'arbre, on a $P_K(F) = 1 - 0,8 = 0,2$.
3. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur toutes ses branches, donc $P(K \cap F) = P(K) \times P_K(F) = 0,55 \times 0,2 = 0,11$.



→ Voir Exercice 21 p. 128

C Formule des probabilités totales

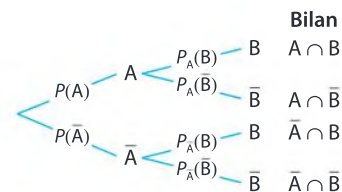
PROPRIÉTÉ La probabilité d'un événement est la **somme des probabilités** des chemins menant à cet événement dans un arbre pondéré.

DÉMONSTRATION • Les événements incompatibles $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B, donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

EXEMPLE • Pour l'arbre pondéré ci-contre, la probabilité de l'événement B est, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B).$$

→ Voir **Exercice résolu 2**



2 Indépendance de deux événements

A Définition

DÉFINITION Pour un événement A de probabilité non nulle, on dit que :

- B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$.
- A et B sont indépendants si B est indépendant de A et A est indépendant de B.

PROPRIÉTÉ Si A et B sont de probabilités non nulles, A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

DÉMONSTRATION • Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. Si A et B sont indépendants, on a par définition $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$. Réciproquement, supposons (par exemple) que $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire que B est indépendant de A.

Puisque $P(A) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$.

Or, $P(B) \neq 0$ donc, en échangeant les rôles de A et B, on obtient aussi $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(B) \times P(A)$. Ainsi, $P_B(A) = P(A)$ d'où A est indépendant de B. Par définition, on en déduit que A et B sont indépendants.

B Une autre formule pour l'indépendance

PROPRIÉTÉ A et B sont deux événements **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

EXEMPLE • On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements A : « obtenir un chiffre pair », B : « obtenir un chiffre strictement supérieur à 4 » et C : « obtenir un nombre premier ».

Ainsi, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{5; 6\}$ et $C = \{2; 3; 5\}$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B) : A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap C) : A \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants.}$$

→ Voir **Exercices résolus 3 et 4**

Exercice résolu

3

Calculer la probabilité d'un événement relativement à une partition de l'univers

83 % des élèves d'une classe ont choisi espagnol LV2, les autres ont choisi allemand LV2.
 64 % des élèves ayant choisi allemand LV2 sont des garçons contre 50 % ayant choisi espagnol LV2.
 On choisit un élève au hasard.
 Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Solution

On note les événements :

G : « l'élève est un garçon ».

A : « l'élève fait allemand LV2 ».

E : « l'élève fait espagnol LV2 ».

L'énoncé donne :

$$P(E) = 0,83, P_A(G) = 0,64 \text{ et } P_E(G) = 0,5.$$

Les garçons ayant choisi allemand LV2 et ceux ayant choisi espagnol LV2 forment une partition de l'ensemble des garçons.

Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A) \times P_A(G) + P(E) \times P_E(G) \\ &= 0,17 \times 0,64 + 0,83 \times 0,5 \\ &= 0,5238. \end{aligned}$$

Méthode

Pour calculer la probabilité d'un événement relativement à une partition de l'univers

- 1 On repère les probabilités conditionnelles relatives à l'événement.
- 2 On utilise la formule des probabilités totales.

→ Voir Exercice 22 p. 128

Exercice résolu

4

Démontrer l'indépendance de deux événements

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.

On note D l'événement « obtenir un multiple de deux »,
 T l'événement « obtenir un multiple de trois », N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1. Les événements N et T sont-ils indépendants ?
2. Que dire des événements D et N ?

Solution

1. Parmi les numéros de ces boules :

- quatre sont multiples de 3, $T = \{3 ; 6 ; 9 ; 12\}$,
- quatre sont supérieurs ou égaux à 9, $N = \{9 ; 10 ; 11 ; 12\}$,
- deux sont à la fois multiples de 3 et supérieurs ou égaux à 9, $N \cap T = \{9 ; 12\}$.

Ainsi, $P(N) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(T) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(N \cap T) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = P(N) \times P(T)$, donc N et T ne sont pas indépendants.

2. Parmi les nombres supérieurs ou égaux à 9, deux sont des multiples de 2, donc $P_N(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(D)$.
 Ainsi, les événements D et N sont indépendants.

Méthode

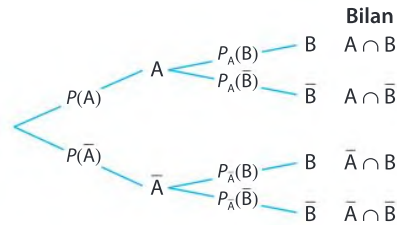
Pour démontrer l'indépendance de deux événements

- 1 Pour deux événements A et B de probabilités non nulles, on vérifie soit :
 - $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.
 - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- 2 Dans le cas contraire, les événements A et B ne sont pas indépendants.

→ Voir Exercices 27 à 31 p. 129-130

1 Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

- **Arbre de probabilités** : schéma permettant de résumer une situation aléatoire.



- **Branch** : segment reliant deux événements, auquel on associe une probabilité.
- **Nœud** : croisement entre plusieurs branches.
- **Chemin** : succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.
- **Événement bilan** : événement à l'extrémité d'un chemin, qui est l'intersection de tous les événements constituant le chemin.
- La **somme des probabilités** des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Sur la branche de A à B, on place $P_A(B)$, la **probabilité conditionnelle** de B sachant A.
- La **probabilité d'un chemin** est le **produit** des probabilités des branches qui le composent.
- La **probabilité d'un événement** est la **somme** des probabilités des chemins menant à cet événement (**formule des probabilités totales**).

En particulier :

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

2 Indépendance de deux événements

- Lorsque $P(A) \neq 0$, B est **indépendant** de A si $P_A(B) = P(B)$.
- Lorsque $P(B) \neq 0$, A est **indépendant** de B si $P_B(A) = P(A)$.
- A et B sont **indépendants** si B est indépendant de A et A est indépendant de B.
- Lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, A et B sont **indépendants** si et seulement si l'une des égalités ci-dessous est satisfaite :

$$P_A(B) = P(B)$$

$$P_B(A) = P(A)$$

- Sans supposer $P(A) \neq 0$ ou $P(B) \neq 0$, l'**indépendance** de A et B peut se prouver par la formule :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

1 Questions Flash

Diaporama

15 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-35

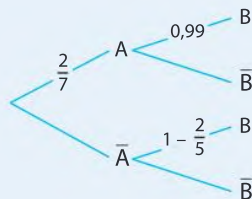
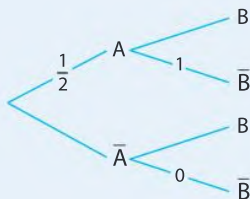
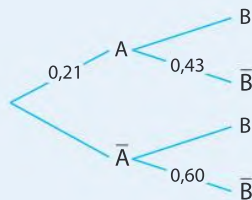
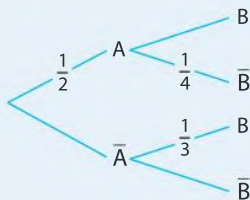
Calculer une probabilité conditionnelle

2 A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = 0,2$ et $P(B) = 0,8$. Calculer $P_B(A)$.

3 A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = 0,3$. Quelle valeur doit prendre $P(B)$ afin que $P_B(A) = 0,5$?

Compléter un arbre de probabilités

4 Reproduire et compléter les arbres de probabilités suivants :



Lire des probabilités à partir d'un arbre

5 1. À partir de l'arbre ci-dessous, lire les probabilités :



a. $P(A)$

b. $P_A(\bar{B})$

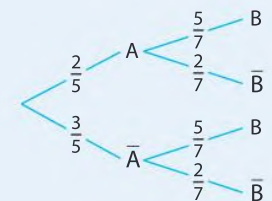
c. $P_A(B)$

2. Peut-on lire $P_B(A)$ sur l'arbre ?

Calculer des probabilités à partir d'un arbre

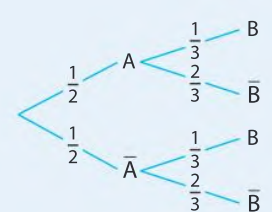
6 1. À partir de l'arbre ci-contre, calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

2. En déduire $P(B)$.



7 1. À partir de l'arbre ci-contre, calculer $P(A) \times P_A(B)$ et $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

2. En déduire $P(B)$.



Construire un arbre de probabilités

8 A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0,4$, $P_A(\bar{B}) = 0,2$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,7$.

1. Construire un arbre de probabilités à partir des données précédentes.

2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

3. En déduire $P(B)$.

9 Dans une entreprise, 35 % des employés sont des femmes et le reste des hommes. Chez les femmes, 90 % sont ingénieures. Chez les hommes, 60 % sont techniciens. Construire un arbre de probabilités à partir des données précédentes.

Appliquer la formule des probabilités totales

10 A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0,5$, $P(\bar{A}) = 0,5$, $P_A(B) = 0,2$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,6$. Calculer $P(B)$.

11 A et B sont deux événements tels que : $P(A \cap B) = 0,35$ et $P(A \cap \bar{B}) = 0,45$. Calculer $P(A)$.

12 Dans un club de football, 80 % des licenciés sont des garçons, le reste des filles. Chez les hommes, 75 % sont majeurs. Chez les filles, 25 % sont majeures. On choisit un licencié au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit majeur ?

Manipuler l'indépendance de deux événements

13 A et B sont deux événements tels que : $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Sont-ils indépendants ?

14 A et B sont deux événements tels que : $P(A) = 0,3$, $P_B(A) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,3$. Sont-ils indépendants ?

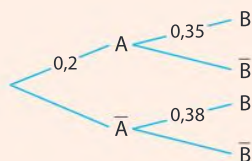
15 Soit A et B deux événements indépendants tels que : $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,5$. Calculer $P(A \cap B)$.

Probabilités conditionnelles et arbres de probabilités

→ Aide Cours 1 p. 122

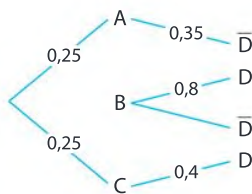
Question de cours

16 On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. Reproduire et compléter cet arbre.
2. Lire $P_{\bar{A}}(B)$.
3. Calculer $P(A \cap B)$.
4. Déterminer $P(\bar{A})$, puis en déduire $P(B)$.

17 On considère l'arbre ci-dessous.

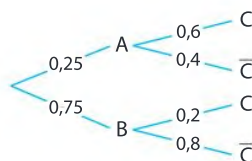


1. Rajouter toutes les branches manquantes de l'arbre ainsi que leur probabilité associée afin d'obtenir un arbre de probabilités.
2. Calculer $P(A \cap D)$.
3. Calculer $P(D)$.
4. Calculer $P_D(A)$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 123

Vrai ou faux

18 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



1. On peut lire que $P_B(\bar{C}) = 0,8$.
2. $P(A \cap C) = 0,15$.
3. $P(C) = 0,3$.
4. $P_C(A) = 0,5$.
5. $P_C(\bar{A}) = 0,5$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 123

QCM

19 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note D l'événement « la carte tirée est une dame » et C l'événement « la carte tirée est un cœur ».

1. L'événement « la carte tirée est la dame de cœur » est :

- a. $D \cap C$ b. $D \cup C$ c. $D \cap \bar{C}$

2. L'événement « la carte tirée est une dame ou un cœur » est :

- a. $D \cap C$ b. $D \cup C$ c. $D \cap \bar{C}$

3. La probabilité de tirer une dame et un cœur est :

- a. $\frac{1}{32}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{4}{32}$

4. La probabilité de tirer une dame sachant que c'est un cœur est :

- a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{12}$

20 Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (on arrondira les résultats au millièmes si nécessaire, et on laissera les résultats sous forme de fractions lorsqu'on en utilise).

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P_B(A)$	$P_A(B)$
0,22	0,56		0,35	
	0,80	0,02		0,60
$\frac{3}{10}$			$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{12}$
	$\frac{2}{5}$		$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$

21 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cap B) = \frac{7}{15}$.

1. Calculer $P_{\bar{A}}(B)$.
2. Décrire la situation pour un arbre de probabilités.
3. On suppose de plus que $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{7}$. Que vaut $P_{\bar{A}}(B)$?
4. En déduire $P(B)$.

22 Un potager est composé de 70 % de légumes et de 30 % de fruits. Parmi les légumes, 90 % poussent à l'air libre, contre 10 % sous serre. Parmi les fruits, la moitié pousse à l'air libre. On note F l'événement « l'article choisi est un fruit », L l'événement « l'article choisi est un légume » et A l'événement « l'article choisi pousse à l'air libre ».

On choisit un article du potager au hasard.

1. Définir par une phrase les événements $F \cap A$ et $L \cap A$, et calculer leur probabilité.
2. Calculer $P(A)$, la probabilité qu'un article pousse à l'air libre.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 125

Indépendance de deux événements

→ Aide Cours 2 p. 124

Question de cours

23 Soit A et B deux événements tels que $P_B(A) = 0,5$. Quelle valeur doit prendre $P(A)$ pour que A et B soient indépendants ?

24 Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ et $P(A) = \frac{2}{3}$.

Quelle valeur doit prendre $P(B)$ pour que A et B soient indépendants ?

QCM

25 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Lors d'un entraînement, un tennisman amateur réalise deux services de suite. La probabilité qu'il réussisse son premier service est de $\frac{3}{5}$ et la probabilité qu'il réussisse le second est de $\frac{4}{5}$. L'issue du premier service n'influence pas celle du second. On note S l'événement « le service est réussi » et $\bar{S}$ son événement contraire.

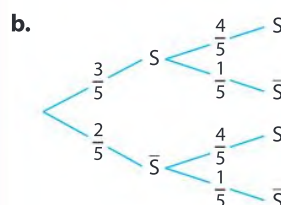
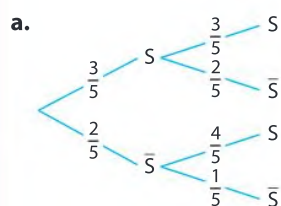
1. La probabilité qu'il réussisse ses deux services est :

- a. $\frac{12}{25}$ b. $\frac{9}{25}$ c. $\frac{3}{25}$

2. La probabilité qu'il échoue au premier service et réussisse le second est :

- a. $\frac{7}{25}$ b. $\frac{12}{25}$ c. $\frac{8}{25}$

3. L'arbre de probabilités correspondant à cette situation est :



4. La probabilité qu'il réussisse au moins un service est :

- a. $\frac{23}{25}$ b. $\frac{11}{25}$ c. $\frac{21}{25}$

Vrai ou faux

26 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Si A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = 0,6$, alors $P(B)$ est nécessairement égale à 0,3.
- Si A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,6$, alors $P_B(A) = 0,12$.
- Si A et B sont deux événements indépendants tels que $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,3$, alors $P(A) = \frac{3}{4}$.
- Si A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,2$, alors les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants.

27 On lance deux fois successives une pièce de monnaie équilibrée. On note A l'événement « les deux faces obtenues sont identiques », B l'événement « on obtient exactement une fois pile » et C l'événement « on obtient au moins une fois pile ».

- Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- Les événements A et C sont-ils indépendants ?

28 Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On note A l'événement « le numéro de la boule est pair » et B l'événement « le numéro de la boule est un multiple de 3 ». On tire une boule au hasard.

- Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- Reprendre la question en considérant une urne contenant 13 boules.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 125

29 **ST2S** Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

- Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?
- Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?



30 Deux joueurs de basket-ball font un concours de lancers francs à trois points, chacun sur l'un des paniers du terrain. Chaque joueur lance une seule fois le ballon sur chaque panier du terrain, indépendamment de l'autre joueur. Le joueur 1 (qui joue en 1^{er}) et le joueur 2 ont pour probabilités respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ de marquer un panier à trois points.

On note les événements suivants :

J_1 : « le joueur 1 réussit son panier à trois points ».

J_2 : « le joueur 2 réussit son panier à trois points ».



1. Construire un arbre de probabilités modélisant la situation des deux joueurs.
2. Quelle est la probabilité que les deux joueurs réussissent un panier à trois points ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun des joueurs ne réussissent un panier à trois points.

31 Une enquête a été menée sur différentes tranches d'âges concernant leurs habitudes écologiques. Parmi les personnes interrogées, 75 % ont moins de 35 ans, 25 % ont 35 ans ou plus, 60 % font le tri sélectif, 45 % sont des personnes de moins de 35 ans qui font le tri sélectif et 80 % sont des personnes de 35 ans ou plus qui font le tri sélectif.



On note T l'événement « la personne fait le tri sélectif », J l'événement « la personne a moins de 35 ans » et M l'événement « la personne a 35 ans ou plus ».

1. Les événements J et T sont-ils indépendants ?
2. Les événements M et T sont-ils indépendants ?

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 125

32 On considère un dé non pipé à six faces numérotées de 1 à 6.

1. Donner un exemple de deux événements indépendants.
2. Donner un exemple de deux événements non indépendants.

33 On lance deux pièces de monnaie successivement. La première pièce est équilibrée. La deuxième ne l'est pas et vérifie les conditions suivantes : si la première pièce donne pile, la deuxième pièce donne pile trois fois sur quatre. Si la première pièce donne face, la deuxième pièce donne face cinq fois sur six.

1. Donner la probabilité d'avoir pile au 1^{er} lancer.
2. Calculer les probabilités d'avoir pile au 2^e lancer.
3. Calculer la probabilité d'avoir deux fois pile, et en déduire que les événements « obtenir pile au 1^{er} lancer » et « obtenir pile au 2^e lancer » ne sont pas indépendants.

34 Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 adhérents d'un club de football, filles ou garçons, en fonction de leur âge (minime, cadet ou junior).

	Minime	Cadet	Junior
Filles	6	12	22
Garçons	18	30	12

On choisit un adhérent du club au hasard.

Partie A

1. Les événements « l'adhérent est une fille » et « l'adhérent est minime » sont-ils indépendants ?
2. Les événements « l'adhérent est un garçon » et « l'adhérent est cadet » sont-ils indépendants ?
3. Les événements « l'adhérent est une fille et cadet » et « l'adhérent est une fille et minime » sont-ils indépendants ?

Partie B

On considère les événements suivants :

- S : « l'adhérent est une fille » ;
- E : « l'adhérent est minime » ;
- D : « l'adhérent est cadet » ;
- I : « l'adhérent est junior ».

1. En complétant le tableau avec des effectifs totaux, construire un arbre de probabilités modélisant la situation.
2. À l'aide de cet arbre, déterminer la probabilité que l'adhérent choisi soit minime, puis vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul de probabilités en utilisant le tableau.

3. En déduire la probabilité qu'un adhérent soit une fille sachant qu'elle est junior, puis vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul de probabilités en utilisant le tableau.



Probabilités conditionnelles et arbres de probabilités

35 Soit A et B deux événements tels que $P(A \cap B) = 0,5$. Peut-on donner n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 1 à $P(B)$ pour définir $P_B(A)$?

36 **STHR** Dans un restaurant, 65 % des clients viennent déjeuner le midi, le reste vient le soir. Parmi les clients du midi, 55 % commandent une formule entrée-plat-dessert, contre 30 % pour les clients du soir. On note les événements F « le client commande une formule entrée-plat-dessert », M « le client vient le midi » et S « le client vient le soir ».

1. Construire un arbre de probabilités avec les données.
2. Traduire par une phrase l'événement $M \cap F$ et calculer sa probabilité.
3. Montrer que la probabilité de F est 0,462 5.
4. Un client a commandé une formule entrée-plat-dessert. Quelle est la probabilité, arrondie au millièm, qu'il soit un client du midi ?

QCM

37 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Un commerçant possédant un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs » trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. Il constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère selon le pays d'origine. Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant autre chose que l'arbre de vie pour la France (on dira « face européenne »). Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont rassemblées dans un sac. On prélève une pièce au hasard dans ce sac. On note S l'événement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face européenne ».

1. La probabilité de S est égale à :

- a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{40}{100}$

2. La probabilité de $S \cap E$ est égale à :

- a. 0,1 b. 0,3 c. 0,16

3. La probabilité que la pièce porte une face européenne est égale à :

- a. 0,76 b. 0,36 c. 0,16

4. Sachant que cette pièce porte une face européenne, la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs » est :

- a. $\frac{5}{18}$ b. 0,625 c. 0,08



Vrai ou faux

38 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

Un magasin vend des ampoules lumineuses provenant de deux usines A et B.

45 % des ampoules proviennent de l'usine A et le reste de l'usine B.

4 % des ampoules provenant de l'usine A sont défectueuses et 5 % des ampoules de l'usine B sont défectueuses.

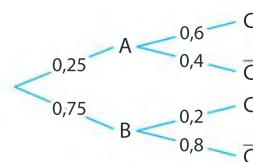
On choisit au hasard une ampoule dans le stock du magasin. On note A l'événement « l'ampoule provient de l'usine A », B l'événement « l'ampoule provient de l'usine B » et D l'événement « l'ampoule est défectueuse ».

1. La situation peut être modélisée par l'arbre de probabilités ci-contre :

2. La probabilité que la pièce provienne de l'usine A et qu'elle soit défectueuse est 0,432.

3. La probabilité que la pièce ne soit pas défectueuse est 0,540 5.

4. La pièce est défectueuse. La probabilité qu'elle provienne de l'usine B est supérieure à 95 %.



39 Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de la ville, au tarif de 1,50 €.



Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$. S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

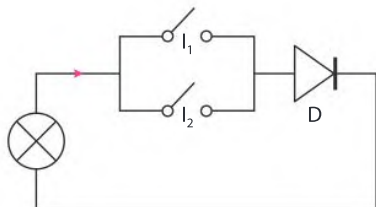
On note R_k l'événement « l'employé arrive en retard au jour k ». On suppose que $P(R_1) = 0$.

1. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{R_2}(R_3)$ et $P_{\bar{R}_2}(\bar{R}_3)$.

2. Déterminer $P(R_2 \cap R_3)$ et $P(\bar{R}_2 \cap \bar{R}_3)$.

3. En déduire $P(R_3)$ puis $P_{R_3}(R_4)$.

- 40** **STI2D** Dans un laboratoire du lycée, un élève réalise un test sur un circuit électrique qui comporte deux interrupteurs I_1 et I_2 montés en parallèle. Ces deux interrupteurs conduisent ensuite à une diode électroluminescente D.



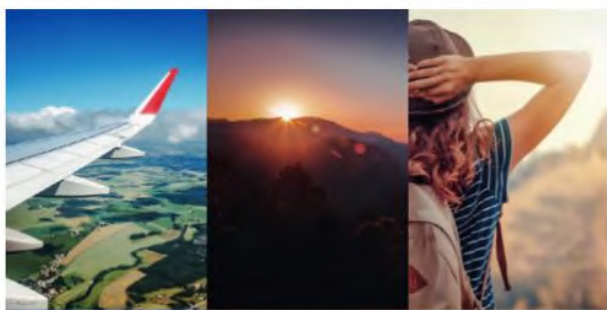
On suppose que l'interrupteur I_1 laisse passer le courant une fois sur trois, que l'interrupteur I_2 laisse passer le courant deux fois plus que I_1 et que les deux interrupteurs I_1 et I_2 ne peuvent être fermés simultanément.

Si I_1 est fermé, la diode D émet de la lumière dans 90 % des cas. Si I_2 est fermé, la diode n'en produit que dans 80 % des cas.

1. Quelle est la probabilité que la diode émette de la lumière ?
2. La diode n'émet pas de lumière. Est-il plus probable que ce soit l'interrupteur I_1 ou l'interrupteur I_2 qui ait laissé passer le courant ?

- 41** **STMG** Une enquête de marché a été réalisée sur les préférences des clients d'une agence de voyages. Sur 300 clients, 219 partent pendant les vacances scolaires, le reste hors période de vacances scolaires.

72 % des clients qui partent pendant les vacances scolaires choisissent une destination en Europe. 31 % des clients qui partent hors période de vacances scolaires choisissent une destination hors d'Europe.



1. Résumer toutes ces informations dans un tableau à double entrée, puis construire un arbre de probabilités à partir de ce tableau.
- On interroge un client au hasard. On note V l'événement « le client part en vacances pendant les vacances scolaires » et E l'événement « le client part en vacances en Europe ».
2. Calculer la probabilité que ce client soit parti en vacances hors d'Europe.
3. Le client interrogé est parti en vacances en Europe. Quelle est la probabilité qu'il soit parti hors vacances scolaires ?

Indépendance de deux événements

QCM

- 42** Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Soit A et B deux événements.

1. Si $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{5}{9}$, alors A et B sont :

- a. indépendants.
- b. non indépendants.
- c. On ne peut pas savoir.

2. Si $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P_A(B) = \frac{1}{4}$, alors A et B sont :

- a. indépendants.
- b. non indépendants.
- c. On ne peut pas savoir.

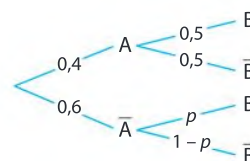
3. Si A et B sont indépendants et tels que $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$, alors :

- a. $P(B) = \frac{20}{36}$
- b. $P(B) = \frac{5}{8}$
- c. $P(B) = 0,4$

4. Si $P(\bar{A}) = 0,25$ et $P(B) = 0,4$, alors A et B sont indépendants si et seulement si :

- a. $P_B(A) = 0,75$
- b. $P(A \cap B) = 0,1$
- c. $P_A(B) = 0,25$

- 43** A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire représentés par l'arbre de probabilités ci-dessous.



Quelle valeur doit-on donner à p pour que A et B soient indépendants ?

- 44** Soit A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,35$ et $P(B) = 0,48$.

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B)$
3. $P(A \cap \bar{B})$
4. $P(A \cup \bar{B})$

Coup de pouce

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- A et B indépendants $\Rightarrow A$ et $\bar{B}$ indépendants.

- 45** On lance deux fois et successivement un dé équilibré.

1. On note A l'événement « le 1^{er} dé donne un chiffre pair » et S l'événement « la somme des chiffres des deux dés vaut 5 ». Les événements A et S sont-ils indépendants ?

2. On note B l'événement « le 1^{er} dé donne le chiffre 6 » et M l'événement « la multiplication des chiffres des deux dés vaut 12 ». Les événements B et M sont-ils indépendants ?

Vrai ou faux

46 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

Un apprenti conducteur réalise différentes manœuvres avant l'examen du permis de conduire. Les manœuvres qu'il pratique sont le créneau, le rangement en bataille et la marche arrière.



On suppose que les manœuvres différentes sont indépendantes les unes des autres.

On note A l'événement « la marche arrière est réussie », B l'événement « le rangement en bataille est réussi », C l'événement « le créneau est réussi » et C_k l'événement : « le créneau est réussi au k^{e} essai ».

1. Sa probabilité de réussir son créneau au 1^{er} essai est $\frac{2}{5}$ et celle de le réussir au 2^e essai est de $\frac{3}{5}$. Alors les événements C_1 et C_2 sont indépendants.

2. Sa probabilité de réussir sa marche arrière est $\frac{1}{3}$ et celle de réussir son rangement en bataille est $\frac{4}{7}$. Alors la probabilité qu'il réussisse les deux à la suite est $\frac{4}{21}$.

3. Sa probabilité de réussir son rangement en bataille est $\frac{4}{7}$ et sa probabilité de rater son créneau est $\frac{5}{6}$. Alors sa probabilité de réussir son rangement en bataille puis de rater son créneau juste après est $\frac{10}{21}$.

4. Sa probabilité de réussir son rangement en bataille sachant qu'il a réussi son créneau est la même que sa probabilité de réussir son deuxième créneau sachant qu'il a réussi le premier créneau.

47 Pour obtenir son diplôme, un stagiaire doit passer trois épreuves successives. La probabilité qu'il réussisse l'épreuve 1 est de 0,97, celle de l'épreuve 2 est de 0,95, et celle de l'épreuve 3 est de 0,9.

On suppose que les réussites aux épreuves sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que le stagiaire réussisse les trois épreuves ?

2. Quelle est la probabilité qu'il rate les trois ?

3. Quelle est la probabilité qu'il n'en réussisse qu'une seule sur les trois ?

48 Un pratiquant de tir à l'arc réalise trois tirs. La probabilité qu'il tire dans la cible au premier tir est $\frac{1}{3}$. La probabilité



de chacun de ses tirs suivants est deux fois plus petite que celle du tir précédent. On suppose que les issues de chaque tir (atteindre ou manquer la cible) sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible à chacun de ses tirs ?

2. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible seulement à ses deux premiers tirs ?

3. Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible uniquement à son dernier tir ?

49 Une urne contient dix boules indiscernables au toucher et numérotées : sept boules rouges numérotées de 1 à 7 et trois boules noires numérotées de 1 à 3.

On tire deux boules au hasard, successivement et sans remise. On note les événements suivants :

I : « tirer deux boules de numéro impair », R : « tirer deux boules rouges » et D : « tirer deux boules de couleurs différentes ».

1. Les événements I et R sont-ils indépendants ?

2. Même question pour les événements I et D.

50 Soit A, B et C trois événements. On dit que les événements A, B et C sont mutuellement indépendants si l'on a toutes les égalités suivantes :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) ; P(A \cap C) = P(A) \times P(C) ;$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \text{ et } P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C).$$

1. Si A, B et C sont mutuellement indépendants, est-il vrai que A, B et C sont deux à deux indépendants, c'est-à-dire que A et B, A et C et B et C sont indépendants ?

2. On s'intéresse maintenant à la question suivante : si A, B et C sont deux à deux indépendants, est-il vrai que A, B et C sont mutuellement indépendants ?

On examine la situation suivante : on lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note A l'événement « obtenir pile au 1^{er} lancer », B l'événement « obtenir face au 2^e lancer » et C l'événement « obtenir la même chose aux 2 lancers ».

a. Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$.

b. Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

c. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

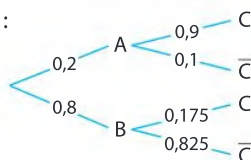
d. Que peut-on en déduire quant à la question que l'on se posait ?



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
51 Si A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,2$, alors $P_A(B) = 0,16$.		
52 Si A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,2$ et $P_A(B) = 0,2$, alors A et B sont indépendants.		
53 On considère l'arbre de probabilités suivant : 1. $P(A \cap \bar{C}) = 0,54$. 2. $P(C) = 0,32$. 3. A et C sont indépendants. 4. $P_C(A) = \frac{9}{16}$.		
54 Si A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = 0,23$ et $P(A \cap \bar{B}) = 0,19$, alors $P(\bar{A}) = 0,58$.		



→ Vérifier les résultats p. 178

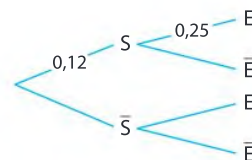
QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Les périodes hivernales sont propices au développement de deux maladies : la gastro-entérite et la grippe saisonnière. Dans un lycée, 12 % des élèves ont contracté la grippe saisonnière. Parmi ces élèves, 25 % ont aussi contracté une gastro-entérite. Parmi les élèves n'ayant pas contracté la grippe saisonnière, 17 % ont néanmoins contracté une gastro-entérite.

On choisit un élève du lycée au hasard. On note S l'événement « l'élève a contracté la grippe saisonnière » et E l'événement « l'élève a contracté la gastro-entérite ».

On donne l'arbre de probabilité ci-contre :



55 L'événement $S \cap E$ correspond à :

- a. « L'élève a contracté une gastro-entérite, sachant qu'il avait eu une grippe saisonnière. »
- b. « L'élève a contracté une grippe saisonnière et une gastro-entérite. »
- c. « L'élève a contracté une gastro-entérite ou une grippe saisonnière. »

56 La probabilité de l'événement $S \cap E$ est :

- a. 25 %
- b. 3 %
- c. 37 %

57 La probabilité que l'élève ait eu une gastro-entérite durant l'hiver est :

- a. 42 %
- b. 3 %
- c. 17,96 %

58 Sachant que l'élève a eu une gastro-entérite au cours de l'hiver, la probabilité qu'il ait eu la grippe saisonnière est :

- a. environ 16,7 %.
- b. environ 66,8 %.
- c. 3 %.

59 Les événements S et E sont :

- a. indépendants.
- b. incompatibles.
- c. Aucun des deux.

→ Vérifier les résultats p. 178

60 In English



A car is composed of two headlights, one on the left (L) and one on the right (R), working independently of each other. Each one has a probability of 0,05 to burn out after one year. What is the probability that both headlights burn out the first year?

61 COMPÉTENCE Raisonner

Un sac contient deux jetons bleus et trois jetons rouges. On tire au hasard deux jetons successivement et avec remise. On note B_1 l'événement « le premier jeton tiré est bleu », B_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est bleu », R_1 l'événement « le premier jeton tiré est rouge » et R_2 l'événement « le deuxième jeton tiré est rouge ».

1. Construire un arbre de probabilités modélisant la situation.
2. Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient bleus.
3. Déterminer la probabilité que les deux jetons tirés soient de même couleur.
4. Calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.
5. Reprendre toutes les questions précédentes en considérant que les tirages s'effectuent sans remise.

62 COMPÉTENCE Modéliser, Chercher

Dans une région, 1 % de la population est contaminée par un virus. On propose un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :

- 99,5 % des personnes porteuses du virus ont un test positif ;
- 98,5 % des personnes non porteuses du virus ont un test négatif.



On choisit une personne de cette population au hasard et on lui fait passer le test. On note V l'événement « la personne choisie est porteuse du virus » et T l'événement « la personne choisie a un test positif ».

Tous les résultats suivants seront arrondis à 10^{-4} près.

1. À l'aide des données de l'énoncé, modéliser la situation par un arbre de probabilités.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est de 0,024 8.
3. Que peut-on dire de l'affirmation suivante : « on estime qu'une personne ayant un test positif a environ 40 % de chances d'être porteuse du virus » ? Interpréter ce résultat.
4. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas porteuse du virus sachant que son test est négatif. Interpréter ce résultat.

63 COMPÉTENCE Chercher

Dans une entreprise, 35 % des employés sont des femmes, le reste sont des hommes.

Chez les femmes, 90 % sont ingénieures. Chez les hommes, 60 % sont techniciens.

Quel est le pourcentage d'ingénieurs dans l'entreprise ?

64 COMPÉTENCE Calculer

Le service marketing d'un concessionnaire automobile a relevé les informations suivantes : 65 % des clients sont des hommes, 38 % des clients hommes achètent une voiture et 46 % des clients femmes achètent une voiture.

On note H l'événement « le client est un homme », F l'événement « le client est une femme » et V l'événement « le client achète une voiture ».

1. On interroge au hasard un client de ce concessionnaire.
 - a. Modéliser la situation par un arbre de probabilités.
 - b. Calculer la probabilité que le client soit un homme qui achète une voiture.
 - c. Calculer la probabilité qu'un client achète une voiture.
 - d. Parmi les clients ayant acheté une voiture, a-t-on plus de la moitié qui sont des hommes ?
2. On interroge cette fois-ci deux clients successivement. On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un client achète une voiture chez ce concessionnaire est 0,408.

On note V_n l'événement « le nième client a acheté une voiture ».

On donnera les résultats qui suivent sous forme de fraction.

 - a. Construire un arbre de probabilités modélisant cette nouvelle situation.
 - b. Calculer la probabilité que les deux clients aient acheté une voiture.
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins un des clients ait acheté une voiture.

65 COMPÉTENCE Raisonner, Modéliser

On lance simultanément un dé jaune et un dé bleu, tous les deux à six faces.

Le dé jaune possède des faces numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 5 ; 6.

Le dé bleu possède des faces numérotées de 1 à 6.

On note :

D l'événement « la face obtenue par le dé jaune est le nombre 2 »,

E l'événement « la face obtenue par le dé jaune est un nombre pair »,

$S = k$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est égale à k »,

$S \geq k$ l'événement « la somme des faces obtenues par les deux dés est supérieure ou égale à k ».

1. Les événements D et $S = 7$ sont-ils indépendants ?
2. Les événements E et $S \geq 8$ sont-ils indépendants ?

Tirs au but !

CAPACITÉ Comprendre, modifier et compléter un algorithme. Utiliser un tableau.

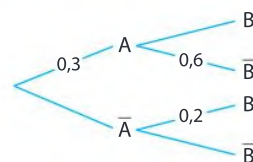
Une étude montre qu'un joueur ou une joueuse professionnel(le) de football réussit un pénalty dans 70 % des cas. Parmi les pénaltys réussis, 80 % sont ceux tirés à ras du sol. Parmi les pénaltys manqués, 65 % sont ceux tirés à mi-hauteur ou en l'air. On souhaite représenter la situation de deux façons différentes.



PARTIE 1 Lire un algorithme

Soit A et B deux événements. On considère trois nombres réels a, b et c tous compris entre 0 et 1. On cherche à faire le lien entre l'arbre de probabilités ci-contre et l'algorithme rédigé ci-dessous :

Entrée : Saisir a, b, c
 Traitement : p prend la valeur $a \times b + (1 - a) \times c$
 Sortie : afficher p



1. Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Interpréter mathématiquement la valeur de p affichée en sortie de l'algorithme.
3. Quelle modification effectuer à la ligne 2 pour que cet algorithme affiche $P(\bar{B})$?
4. Quelle ligne devrait-on ajouter à la partie traitement, à l'aide d'une nouvelle variable q à afficher également en sortie, pour permettre d'afficher en sortie la probabilité $P_A(B)$?

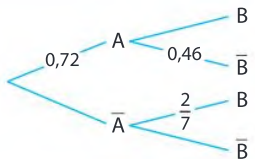
PARTIE 2 Lire une feuille de tableau

1. À l'aide de la première information de l'énoncé en italiques ci-dessus, quelle cellule a-t-on remplie en premier ?
2. À l'aide de la deuxième information de l'énoncé, quelle formule doit-on saisir dans la cellule B2 en fonction de la cellule précédemment remplie pour obtenir le pourcentage ?
3. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D2 et qui, par recopie vers le bas en cellule D3, permet d'obtenir le pourcentage de pénaltys tirés à ras du sol et le pourcentage de pénaltys tirés à mi-hauteur ? À quelle formule du cours fait-on référence ?
4. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B6 pour retrouver le résultat de l'énoncé ? À quelle formule du cours fait-on référence ?

	A	B	C	D
1		Réussi (R)	Manqué (M)	Total
2	Ras du sol (S)	0,56	0,105	0,665
3	Mi-hauteur (H)	0,14	0,195	0,335
4	Total	0,7	0,3	1
5				
6		$P_R(S) = 0,8$		
7		$P(H) = 0,335$		

  En salle informatique  lienmini.fr/10445-37

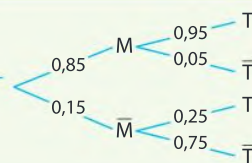
1. Écrire un programme Python ou un algorithme sur votre calculatrice correspondant à celui de la **Partie 1** ci-dessus. On rajoutera également la ligne de code correspondant à la question 4. de cette partie.
2. En affectant à a, b, c les valeurs correspondant à l'énoncé, vérifier les probabilités suivantes : $P(H) = 0,335$ et $P_R(S) = 0,8$.
3. En rajoutant une ligne de code après celle rajoutée à la question 1., vérifier que l'on a bien $P_R(S) + P_R(H) = 1$.

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
66 $P(B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,4$, donc $P_B(A) = ?$	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	$P_B(A) = \frac{4}{7}$
67 Reproduire et compléter l'arbre ci-contre :	La somme des branches issues d'un même nœud est égale à 1.	
68 Si $P(A) = \frac{2}{5}$, $P_A(B) = \frac{3}{8}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{4}{7}$, calculer $P(B)$.	Appliquer la formule des probabilités totales.	$P(B) = \frac{69}{140}$
69 A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,56$ et $P(A \cap B) = \frac{49}{250}$. Sont-ils indépendants ?	Vérifier que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.	Oui car $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
70 Si A et B sont deux événements indépendants tels que $P_B(A) = 0,75$, que vaut $P(A)$?	L'indépendance entraîne $P_B(A) = P(A)$.	$P(A) = 0,75$

71 On étudie la fiabilité d'un test de dépistage dans une population où la proportion de personnes malades est de 85 %. Parmi les personnes malades, 95 % ont un test positif. Parmi les personnes saines, 75 % ont un test négatif. On choisit au hasard une personne de cette population. On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

- À l'aide des données de l'énoncé, déterminer les probabilités $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_M(\bar{T})$.
- Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- Calculer la probabilité $P(M \cap T)$. En donner la valeur exacte.
- Montrer que $P(T) = 0,845$.
- Le test de dépistage est considéré comme fiable si la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif est supérieure ou égale à 0,95. Le test est-il fiable ?

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. Retraire les données en probabilités.	1. $P(M) = 0,85$, $P_M(T) = 0,95$ et $P_M(\bar{T}) = 0,75$.
2. Une probabilité conditionnelle donnée permet de remplir le premier niveau de l'arbre.	2. Voir ci-contre.
3. Utiliser les règles de calculs d'un arbre. → Voir Exercice résolu 2 p. 123	3. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,8075$.
4. Utiliser la formule des probabilités totales. → Voir Exercice résolu 3 p. 125	4. $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,845$.
5. Utiliser la formule des probabilités conditionnelles. → Voir Exercice résolu 1 p. 123	5. $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,8075}{0,845} \approx 0,9556$. Le test est fiable car $0,9556 > 0,95$.



72 CAPACITÉS

- Exploiter un arbre de probabilités.
- Utiliser la formule des probabilités totales.

Un restaurant réalise une étude statistique sur la consommation de ses clients. Ceux-ci peuvent choisir un menu ou commander leur repas à la carte.

D'après cette étude, on constate que 60 % des clients choisissent un menu, tandis que les autres préfèrent choisir à la carte.

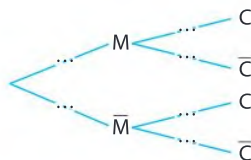
À l'issue du repas, le serveur propose systématiquement aux clients de prendre un café.

L'étude montre que 90 % des clients qui ont choisi un menu et 70 % de ceux qui ont commandé à la carte prennent un café.

On choisit un client au hasard parmi ceux qui ont fréquenté le restaurant dans l'année.

On note M l'événement « le client choisit un menu » et C l'événement « le client prend un café ».

1. À l'aide des informations de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Définir par une phrase l'événement $M \cap \bar{C}$ puis déterminer sa probabilité.
3. Déterminer la probabilité que le client choisisse un menu et prenne un café.
4. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,82.

Méthode Utiliser la formule des probabilités totales.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 125

5. Sachant que le client prendra un café, quelle est la probabilité qu'il choisisse le menu ? On arrondira le résultat au centième le résultat.

Méthode Utiliser la formule des probabilités conditionnelles.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 123

73 CAPACITÉS

- Exploiter un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Utiliser la formule des probabilités totales.
- Démontrer l'indépendance de deux événements.

Une entreprise familiale fabrique de la confiture de fraises biologiques. Elle achète ses fruits auprès de deux fournisseurs locaux A et B.

25 % des fruits proviennent du fournisseur A et les autres du fournisseur B. 95 % des fruits provenant du fournisseur A sont retenus pour la fabrication de la confiture. 80 % des fruits provenant du fournisseur B sont retenus pour la fabrication de la confiture.

On choisit un pot de confiture au hasard dans la production. On note A, B, C les événements :

A : « les fruits utilisés proviennent du fournisseur A ».

B : « les fruits utilisés proviennent du fournisseur B ».

C : « les fruits sont retenus pour la fabrication de la confiture ».

Les résultats seront arrondis au centième.

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.
2. a. Définir par une phrase l'événement $A \cap C$, puis calculer sa probabilité $P(A \cap C)$.
- b. Les événements A et C sont-ils incompatibles ? Interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

Méthode Deux événements sont incompatibles si la probabilité de leur intersection est nulle.

3. a. Montrer que la probabilité $P(C)$, arrondie au centième, est égale à 0,84.
- b. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Méthode Si A et B sont deux événements tels que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et B sont indépendants.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 125

4. Calculer $P_C(A)$. Interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

Méthode Appliquer la formule des probabilités conditionnelles quand une probabilité conditionnelle ne peut se lire sur un arbre.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 123

74 L'indice de masse corporelle (IMC) est égal au rapport entre la masse (en kg) et le carré de la taille (en m). Les individus dont l'IMC est supérieur à 30 sont déclarés obèses. On a réalisé en 2006 une étude sur une population d'individus âgés de 21 à 59 ans.

On choisit une personne au hasard parmi les personnes interrogées. On note E l'événement « la personne choisie possède un emploi » et O l'événement « la personne choisie est déclarée obèse ». Selon les données, on sait que :

- L'effectif total des personnes interrogées est de 2 685, dont 1 920 ont un emploi.
- 10,6 % des femmes interrogées sont déclarées obèses.
- Parmi les femmes non déclarées obèses, 72,7 % ont un emploi.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant. On arrondira à l'entier le plus proche.

	Obèse	Non obèse	Total
Ayant un emploi			
N'ayant pas un emploi			
Total	285		2 685

2. Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millième.

- Calculer la probabilité des événements E, O et $E \cap O$.
- Justifier que les événements E et O ne sont pas indépendants.

75 L'entreprise Gadgets En Stock vend des *hand spinners*. Elle les achète auprès de trois fournisseurs étrangers Advanceplay, Betterspin et Coolgame. Advanceplay et Betterspin fournissent chacun 30 % des *hand spinners* de Gadgets En Stock. Coolgame fournit les 40 % restant. Les données de ces trois entreprises indiquent que :

- 1 % des *hand spinners* provenant du fournisseur Advanceplay sont défectueux.
- 4 % des *hand spinners* provenant du fournisseur Betterspin sont défectueux.
- 2 % des *hand spinners* provenant du fournisseur Coolgame sont défectueux.

On choisit de façon équiprobable un *hand spinner* dans le stock de l'entreprise Gadgets En Stock et on définit les événements suivants :

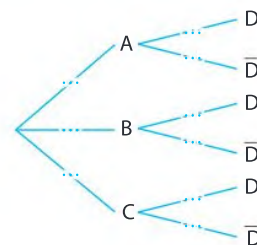
- A : « le *hand spinner* provient du fournisseur Advanceplay ».
- B : « le *hand spinner* provient du fournisseur Betterspin ».
- C : « le *hand spinner* provient du fournisseur Coolgame ».
- D : « le *hand spinner* est défectueux ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

2. Calculer la probabilité que le *hand spinner* choisi provienne du fournisseur Betterspin et soit défectueux.

3. Déterminer la probabilité que le *hand spinner* choisi soit défectueux.

4. On achète un *hand spinner* chez Gadgets En Stock. On constate que celui-ci est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur Coolgame ?



76 Un nutritionniste consulte les fiches de ses patients de l'année 2018 qui suivent tous un régime avec ou sans gluten. Le nutritionniste isole les fiches de ses patients seniors (plus de 60 ans). Parmi eux, certains, souffrant de troubles cardio-vasculaires, doivent suivre un régime sans sel. Il remarque que :

- parmi ses 200 patients seniors, 96 sont des hommes et 104 sont des femmes ;
 - parmi les hommes seniors, 60 suivent un régime sans sel ;
 - parmi les femmes seniors, 26 suivent un régime sans sel.
- Le nutritionniste choisit une fiche au hasard parmi celles des patients seniors.

Chaque fiche a la même probabilité d'être choisie. On considère les événements suivants :

H : « la fiche est celle d'un homme ».

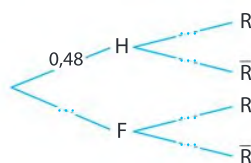
F : « la fiche est celle d'une femme ».

R : « la fiche est celle d'un patient senior suivant un régime sans sel ».

Dans les questions suivantes, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. a. Vérifier que $P(H) = 0,48$.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. a. Décrire par une phrase l'événement $H \cap R$, puis calculer $P(H \cap R)$.

b. Montrer que la probabilité de l'événement R est égale à 0,43.

c. Les événements R et H sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

7

Variables aléatoires discrètes

CAPACITÉS

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples et l'interpréter.
- Calculer des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal pour $n \leq 10$.
- Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale et en identifier le couple de paramètres.
- Lorsque la variable aléatoire X suit une loi binomiale :
 - interpréter l'événement $\{X = k\}$ sur un arbre de probabilités ;
 - calculer les probabilités des événements $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \{X = n-1\}, \{X = n\}$ et de ceux qui s'en déduisent par réunion ;
 - calculer la probabilité de l'événement $\{X = k\}$ à l'aide des coefficients binomiaux.



Les variables aléatoires discrètes interviennent dans de nombreux phénomènes de la vie courante comportant une part de hasard : le gain d'un jeu, le résultat d'un sondage, la qualité d'un produit issu d'une ligne de production comme ici lors du contrôle d'un robot.

Si on contrôle 20 robots pris au hasard sur une ligne de production, sachant que le taux moyen de conformité est de 80 %, quelle sera la probabilité que k robots soient conformes ?



Découvrons
la robotique

3:07

► lienmini.fr/10445-45

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 143

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions
Flash

Diaporama

15 diapositives
pour retrouver
ses automatismes



lienmini.fr/10445-46

1 Espérance d'une variable aléatoire

Ce tableau résume la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. On a : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Valeurs prises par $X (x_i)$	x_1	x_2	$\dots$	x_k
Probabilités $P(X = x_i)$	p_1	p_2		p_k

L'espérance de X est : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_i p_i + \dots + x_k p_k$. Elle représente la moyenne des résultats si on réalisait un grand nombre de fois cette expérience.

2 Épreuves aléatoires de Bernoulli de paramètre p

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire comportant deux issues : **succès** (avec la probabilité p) et **échec** (avec la probabilité $1 - p$).

Dans le cas d'une **répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**, on peut modéliser l'expérience par un arbre de probabilités.

La probabilité d'une issue représentée par un chemin dans l'arbre de probabilités est alors égale au **produit des probabilités** inscrites sur les branches de ce chemin.

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 6

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Un lycée comporte 900 élèves, dont 270 sont en Terminale. On choisit trois élèves au hasard. Étant donné le grand nombre d'élèves, on assimile cet échantillon à un tirage avec remise.

	a	b	c	d	Aide
1. La probabilité que les trois élèves choisis soient en Terminale est :	0,027	0,3	0,343	0,9	1
2. La probabilité qu'au plus deux des trois élèves soient en Terminale est d'environ :	0,26	0,4	0,6	0,97	1
3. La probabilité que k de ces trois élèves soient en Terminale est d'environ 0,441. Alors la valeur de k est :	0	1	2	4	1
4. La probabilité qu'un de ces trois élèves ne soit pas en Terminale est d'environ :	0,19	0,41	0,7	0,9	1
5. Sachant qu'un des élèves est en Terminale, la probabilité qu'au moins un des deux autres soit aussi en Terminale est d'environ :	0,49	0,51	0,6	0,91	1
6. On répète cette expérience un grand nombre de fois. En moyenne, le nombre d'élèves de Terminale parmi les trois élèves est :	0,9	1,2	1,5	1,8	2

→ Voir **Corrigé** p. 178

1

Esérance d'une variable aléatoire et interprétation

OBJECTIF Réactiver la notion d'espérance d'une variable aléatoire et l'interpréter → Cours 1 p. 144

200 billets de loterie valant 2 euros chacun sont vendus. Seulement deux billets permettent de gagner un lot : l'un permet de gagner 100 euros, l'autre permet de gagner 50 euros, les autres ne rapportent rien du tout.

On a acheté deux billets. On considère les événements suivants :

- A : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 100 euros » ;
- B : « l'un de nos billets est celui permettant de gagner 50 euros ».

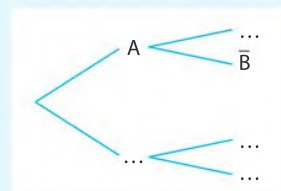
1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre.

2. On note X le gain (ou la perte selon les cas) associé(e) aux billets de loterie achetés. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

Indication : il est important de prendre en compte l'argent dépensé pour acheter les billets.

3. Recopier et compléter le tableau suivant.

Valeurs de X	$X = -4$	$X = 46$	$X = 96$	$X = 146$
Issues correspondantes				
Probabilités correspondantes				



4. Calculer l'espérance de X .

5. Interpréter le résultat.

2

Tableur et espérance → Mémento TABLEUR p. 176

OBJECTIF Exploiter avec le tableur la notion d'espérance d'une variable aléatoire → Cours 1 p. 144



Alice propose un jeu à Elias dont le principe est simple. Elias doit lancer un dé et, selon le résultat, il gagne ou perd de l'argent :

- si le résultat est 1, 2 ou 3 alors Alice lui donne 2 euros ;
- si le résultat est 4 ou 5 alors aucune somme d'argent n'est gagnée ou perdue ;
- si le résultat est 6 alors Elias donne 10 euros à Alice.

Elias est tenté de jouer : les gains semblent plus faibles que les pertes, mais ils ont l'air beaucoup plus fréquents. Avant de se décider, il souhaite simuler 1 000 parties sur un tableur et calculer la moyenne des gains.

1. Dans la cellule A1 d'un tableur, taper la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)`. Que renvoie-t-elle ?

2. Utiliser cette formule pour simuler 1 000 lancers de dé dans la colonne A du tableur.

3. Pour compter les effectifs du chiffre 1 dans la colonne A, taper `=NB.SI(A1:A1000;1)` dans la cellule B1.

Adapter la formule pour calculer les effectifs du chiffre 2, puis du 3, ..., jusqu'à 6.

4. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Lancé de dé	Effectifs	Fréquences	Gain associé
1			
2			
3			
4			
5			
6			

5. En déduire la moyenne des gains. Elias a-t-il raison d'accepter de jouer ?

3

Coefficient binomial et triangle de Pascal

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

OBJECTIF Découvrir les coefficients binomiaux → Cours 2 p. 144

Partie A

1. a. Sur l'arbre de probabilités ci-contre, combien de branches partent de chaque nœud ?
b. Combien de branches y a-t-il entre le nœud de départ et l'extrémité d'une des dernières branches ?

Pour tout nombre entier k compris entre 0 et 3, on note $\binom{3}{k}$ le nombre de chemins comportant k fois l'issue V. Autrement dit, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès en n épreuves de Bernoulli. $\binom{n}{k}$ est appelé un **coefficient binomial** et se lit « k parmi n ».

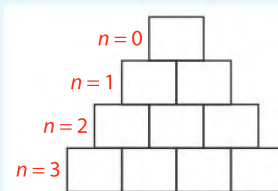
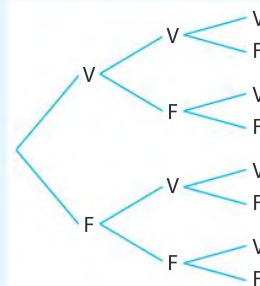
2. Donner les valeurs de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, et $\binom{3}{3}$.

Partie B

3. La figure ci-contre est un **triangle de Pascal** : les éléments de la ligne n sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$, dans cet ordre.

Reproduire et compléter les cases de la ligne $n = 3$ à l'aide de la question 2. de la **Partie A**.

4. On admet que $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ pour tout nombre entier k entre 1 et $n-1$.
Dédurre de ce qui précède les valeurs de $\binom{4}{1}$ et $\binom{4}{2}$.



Le triangle de Pascal a été rendu célèbre par Blaise Pascal (1623-1662) dans son ouvrage *Traité du triangle arithmétique* en 1654.

4

Loi binomiale → Mémento TABLEUR p. 176

STI2D ROBOTIQUE

OBJECTIF Représenter avec le tableur la distribution d'une loi binomiale → Cours 3 p. 146

Une entreprise fabrique des robots destinés à l'industrie. En moyenne, 80 % des pièces sortant de la ligne de production sont conformes au cahier des charges.

On choisit une pièce au hasard à la sortie de la ligne de production et on note C l'événement : « la pièce est conforme ».

Un client commande 15 pièces à l'entreprise. Pour préparer cette commande, on prélève 20 pièces à la sortie de la ligne de production. L'entreprise produisant un très grand nombre de pièces, on considère cet échantillon de 20 pièces comme un tirage aléatoire avec remise.

1. Justifier que cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli comportant 20 épreuves.

2. Soit k un nombre entier compris entre 0 et 20. Puisque le coefficient binomial $\binom{20}{k}$ est le nombre de chemins comportant k fois l'issue C dans l'arbre de probabilités associé à l'expérience, justifier que la probabilité que k pièces parmi les 20 soient conformes est : $\binom{20}{k} \times 0,8^k \times 0,2^{20-k}$.

3. À l'aide de la formule $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, générer le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 20$ dans un tableur.

4. Reproduire et compléter le tableau suivant jusqu'à $k = 20$ (arrondir les valeurs à 10^{-2}).
5. Présenter ces résultats dans un diagramme en bâtons.



k	Probabilité de k pièces conformes
0	
1	
2	
3	
...	
20	

1

Espérance d'une variable aléatoire discrète (rappel)

DÉFINITION Soit X une variable aléatoire et $x_1, x_2, \dots, x_k$ valeurs prises par X .

Alors l'**espérance de X** est le nombre noté $E(X)$ et défini par :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_k \times P(X = x_k) = \sum_{i=1}^k x_i \times P(X = x_i).$$

REMARQUE • On peut interpréter l'espérance comme la valeur moyenne que l'on pourrait obtenir en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

→ Voir **Exercice résolu 1**

2

Coefficients binomiaux

A Coefficients binomiaux

DÉFINITION Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on appelle **coefficient binomial** le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ sur l'arbre représentant le schéma de Bernoulli. Ce coefficient binomial est noté $\binom{n}{k}$, ce qui se lit « k parmi n ».

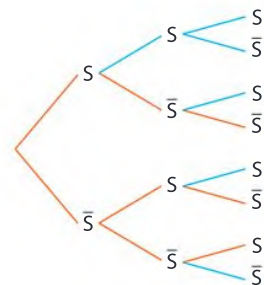
EXEMPLE • L'arbre ci-contre modélise un schéma de Bernoulli pour $n = 3$. On constate qu'il existe trois chemins comprenant exactement *une fois* l'issue S , ainsi $\binom{3}{1} = 3$. De même $\binom{3}{0} = 1$; $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

PROPRIÉTÉ Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

PROPRIÉTÉ Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Alors pour tout entier k tel que

$$1 \leq k \leq n-1, \text{ on a : } \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$



B Le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux. Il s'agit d'un tableau triangulaire tel que les éléments de la ligne n sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ dans cet ordre. On lit ainsi :

$\binom{5}{2} = 10$ ou $\binom{6}{4} = 20$. Un coefficient binomial est égal à la somme des deux coefficients placés au-dessus de lui.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

→ Voir **Exercice résolu 2**

Exercice résolu

1

Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire

Une entreprise fabrique et vend des ordinateurs portables. On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque ordinateur son coût total (coût de fabrication et coût de réparation éventuel après non-conformité au sortir de la chaîne de production).

Le tableau suivant donne la loi de probabilité de X :

x_i	130	175	190	235
$P(X = x_i)$	0,893	0,067	0,037	0,003

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .
2. Interpréter l'espérance de la variable aléatoire X .

Solution

1. $E(X) = 130 \times 0,893 + 175 \times 0,067 + 190 \times 0,037 + 235 \times 0,003 = 135,55$.
2. L'espérance de X est 135,55 euros, ce qui signifie que si un grand nombre d'ordinateurs sont produits alors, en moyenne, le coût total d'un ordinateur sera de 135,55 euros.

Méthode

Pour calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire

- 1 On **calcule** le nombre :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_k \times P(X = x_k).$$
- 2 On **interprète** l'espérance comme la valeur moyenne que l'on pourrait obtenir en répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

→ Voir Exercices 21 à 25 p. 150

Exercice résolu

2

Calculer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal



1. Calculer $\binom{7}{3}$ avec un triangle de Pascal.
2. À l'aide d'un tableur, calculer le coefficient binomial $\binom{9}{5}$.

Méthode

Pour calculer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

- 1 On **dessine** un triangle de Pascal vide avec $n + 1$ lignes.
- 2 On **complète** les premières et dernières cases de chaque ligne avec des 1.
- 3 On **complète** les autres cases à l'aide d'une propriété du cours : chaque coefficient est la somme des deux coefficients au-dessus de lui.

Solution

1. Voir ci-contre. Ainsi $\binom{7}{3} = 35$.
2. Après avoir placé les 1 aux extrémités des 10 lignes ($n = 9$ et on compte la ligne de rang 0), on écrit la formule `=A2+B2` dans la cellule B3 puis on l'étend au reste du tableau. Ainsi $\binom{9}{5} = 126$.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

						1					
					1		1				
			1	2	1						
		1	3	3	1						
	1	4	6	4	1						
	1	5	10	10	5	1					
	1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1				

→ Voir Exercices 26, 27, 30, 32 p. 150

3

Loi binomiale

DÉFINITION Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** . On la note : $\mathcal{B}(n; p)$.

PROPRIÉTÉ Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que X soit égale à k est : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$.

DÉMONSTRATION • Dans l'arbre associé à cette expérience aléatoire, un des chemins comportant exactement k succès comporte alors également $n - k$ échecs. La probabilité de l'issue associée à ce chemin est donc $p^k \times (1-p)^{n-k}$. Par définition, il existe $\binom{n}{k}$ chemins identiques.

Ainsi $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$.

EXEMPLE • En France, 45 % de la population est du groupe sanguin A. On choisit 5 personnes au hasard dans une grande ville française et on note X le nombre de personnes étant du groupe sanguin A dans cet échantillon.

Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le groupe sanguin d'une des personnes est indépendant de celui des autres. Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,45$.

La probabilité que 3 de ces personnes soient du groupe A est donc, à 10^{-2} près :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,45^3 \times (1 - 0,45)^{5-3} = 10 \times 0,45^3 \times 0,55^2 \approx 0,28.$$

PROPRIÉTÉ Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors son espérance est : $E(X) = n \times p$.

EXEMPLE • Environ 28 % des 14-20 ans portent des lunettes de vue (ou des lentilles). On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes de cette tranche d'âge à un tirage aléatoire avec remise.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre d'entre elles portant des lunettes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,28$.

La probabilité que, dans un groupe de 10 personnes de cette tranche d'âge, quatre d'entre elles portent des lunettes est (à 10^{-2} près) :

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0,28^4 \times (1 - 0,28)^{10-4} = 210 \times 0,28^4 \times 0,72^6 \approx 0,18.$$

Par ailleurs, l'espérance de X est $E(X) = 10 \times 0,28 = 2,8$. Ainsi, si on formait aléatoirement un grand nombre de groupes de 10 personnes de la tranche d'âge 14-20 ans, il y aurait en moyenne environ 2,8 personnes portant des lunettes par groupe.

→ Voir **Exercices résolus 3 et 4**

Exercice résolu

3

Calculer des probabilités à l'aide des coefficients binomiaux

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.

Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs seront arrondies à 10^{-2} près) :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$					

Solution

Le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 4$ est donné ci-contre. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 0) &= \binom{4}{0} 0,6^0 \times 0,4^4 \approx 0,03 & \bullet P(X = 1) &= \binom{4}{1} 0,6^1 \times 0,4^3 \approx 0,14 \\ \bullet P(X = 2) &= \binom{4}{2} 0,6^2 \times 0,4^2 \approx 0,35 & \bullet P(X = 3) &= \binom{4}{3} 0,6^3 \times 0,4^1 \approx 0,35 \\ \bullet P(X = 4) &= \binom{4}{4} 0,6^4 \times 0,4^0 \approx 0,13 \end{aligned}$$

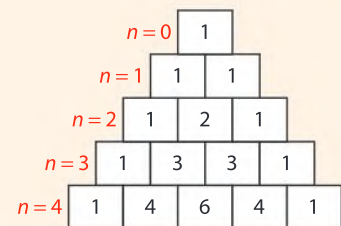
Ainsi :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,03	0,14	0,35	0,35	0,13

Méthode

Pour calculer des probabilités à l'aide des coefficients binomiaux

- On calcule les coefficients binomiaux $\binom{4}{k}$ avec un triangle de Pascal.
- On calcule les probabilités en utilisant la formule $P(X = k) = \binom{4}{k} p^k \times (1-p)^{4-k}$.



→ Voir Exercices 33 à 38 p. 151

Exercice résolu

4

Reconnaître si une situation relève de la loi binomiale

La situation suivante suit-elle une loi binomiale ?

« On lance 10 fois un dé cubique équilibré. On gagne si on obtient au moins sept fois un nombre supérieur ou égal à 5. Quelle est la probabilité de gagner (à 10^{-2} près) ? »

Méthode

Pour reconnaître si une situation relève de la loi binomiale

- On identifie une épreuve de Bernoulli et son paramètre p .
- On vérifie que l'épreuve est répétée de manière identique et indépendante.
- On définit une variable aléatoire qui compte le nombre de succès. (Si une de ces trois conditions n'est pas remplie, la situation ne suit pas une loi binomiale.)

Solution

Pour chaque lancer de dé, deux issues sont possibles : succès (« obtenir au moins 5 », avec une probabilité $p = \frac{1}{3}$) et échec (« obtenir au plus 4 », avec une probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$). Un lancer de dé est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$. Cette épreuve est répétée 10 fois de manière identique et indépendante car le résultat d'un lancer ne dépend pas des autres. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès durant ces 10 lancers suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

→ Voir Exercices 39 à 42 p. 151

1 Espérance d'une variable aléatoire

- L'**espérance** d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs qu'elle prend si on réalise un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. Elle se calcule avec la formule :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_k \times P(X = x_k) = \sum_{i=1}^k x_i \times P(X = x_i)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs prises par X .

2 Coefficients binomiaux

- Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins associés à l'événement $\{X = k\}$ dans l'arbre décrivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , et où X est la variable aléatoire associée au nombre de succès.

- $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».

- En particulier, pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

- Ces formules permettent de définir le **triangle de Pascal** : il s'agit d'un tableau en forme de triangle tel que les éléments de la ligne n sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ dans cet ordre.

La première et la dernière case de chaque ligne sont complétées avec des 1, d'après la propriété $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Les autres cases sont complétées grâce à la formule $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Jusqu'à $n = 4$ on obtient ainsi :

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \binom{n-1}{k-1} & \binom{n-1}{k} \\ \hline + & \\ \hline \binom{n}{k} \\ \hline \end{array}$$

3 Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de n épreuves, pour lequel la probabilité de succès dans chaque épreuve de Bernoulli est p .

- La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** et notée $\mathcal{B}(n; p)$.

- Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$$

- L'espérance de X est :

$$E(X) = n \times p.$$

Espérance d'une variable
aléatoire

→ Aide Cours 1 p. 144

Question de cours

- 21** Une variable aléatoire admet la loi de probabilité suivante, où $a \in \mathbb{R}$:

x_i	0	2	3	5	6,5
$P(X = x_i)$	a	$3a$	0,3	$2a$	a

- Calculer la valeur de a .
- En déduire l'espérance de X .

- 22** Dans une production de pièces industrielles, on considère la variable aléatoire X qui associe à chaque pièce son coût de fabrication. Soit la loi de probabilité de X :

x_i	73	112	155	185
$P(X = x_i)$	0,19	0,32	0,15	0,34

- Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .
- Interpréter l'espérance de la variable aléatoire X .

→ Voir Exercice résolu 1 p. 145

- 23** Dans un devoir, un enseignant propose trois questions indépendantes de type « Vrai ou Faux » :

- chaque réponse fautive ou absence de réponse fait perdre un point à l'élève ;
 - chaque bonne réponse fait gagner deux points à l'élève.
- Mehdi a bien préparé ce devoir et, pendant ses révisions, il répondait correctement à 90 % des questions de ce type. On estimera donc que la probabilité qu'il réponde correctement à une question est de 0,90.

Yvan, quant à lui, n'a pas révisé du tout et a décidé de répondre au hasard à toutes les questions.

On note M et Y les variables aléatoires associées aux nombres de points obtenus par Mehdi et Yvan.

- Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- Quelles sont les valeurs possibles prises par M et Y ?
- Déterminer les lois de probabilités de M et de Y .
- Déterminer les espérances de M et de Y et interpréter les résultats.

Vrai ou faux

- 24** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Une variable aléatoire peut avoir une espérance nulle.
- Si les valeurs prises par une variable aléatoire sont négatives, alors son espérance est également négative.
- L'espérance d'une variable aléatoire X ne peut pas être égale à une des valeurs x_i prises par X .

- 25** Un dé à six faces est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir un nombre est proportionnelle à ce nombre.

1. On lance ce dé et on note X la variable aléatoire associée au résultat.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance de X .

2. On lance ce dé deux fois d'affilée et on note Y la variable aléatoire associée au plus petit des deux résultats.

- Déterminer la loi de probabilité de Y .
- Déterminer l'espérance de Y .

Coefficients binomiaux → Aide Cours 2 p. 144

Question de cours

- 26** 1. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$.

2. Lire les valeurs de $\binom{3}{2}$, $\binom{2}{0}$, $\binom{4}{2}$ et $\binom{1}{1}$ dans ce triangle.

3. En déduire la valeur de $\binom{6}{2}$.

- 27** À l'aide du tableur, calculer $\binom{12}{3}$ avec un triangle de Pascal.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 145

- 28** Donner, en justifiant, les valeurs de :

a. $\binom{3}{2}$, $\binom{24}{1}$ et $\binom{14}{13}$. b. $\binom{17}{0}$, $\binom{32}{31}$ et $\binom{4}{3}$.

- 29** On donne les valeurs $\binom{11}{5} = 462$ et $\binom{11}{4} = 330$.

En déduire la valeur de $\binom{12}{5}$.

- 30** La ligne $n = 8$ du triangle de Pascal est :

1	8	28	56	70	56	28	8	1
---	---	----	----	----	----	----	---	---

En déduire la ligne $n = 9$ du triangle de Pascal.

- 31** Dans un arbre de probabilités modélisant un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 6$, combien de branches comportent exactement 5 succès ? Exactement 3 succès ?

- 32** Reproduire le triangle de Pascal suivant puis compléter les cases vides.

$n=0$	1					
$n=1$		1				
$n=2$		1				
$n=3$		1	3		1	
$n=4$		1			4	1

Loi binomiale

→ Aide Cours 3 p. 146

Question de cours

33 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$.

1. Dresser l'arbre de probabilités associé à cette expérience aléatoire.
2. Dresser et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 4$.
3. En déduire les expressions de $P(X = k)$ pour k de 0 à 4.
4. Calculer $P(X \geq 2)$. Arrondir le résultat à 10^{-2} .

34 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,3)$.

1. Calculer les coefficients binomiaux $\binom{5}{k}$ pour k allant de 0 à 5 avec un triangle de Pascal.
2. Donner les valeurs de $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 5.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 147

35 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(9; 0,3)$.

1. Sachant que $\binom{9}{2} = 36$, calculer $P(X = 2)$ à 10^{-3} près.
2. Sachant que $\binom{9}{4} = 126$, calculer $P(X = 4)$ à 10^{-3} près.

36 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(28; 0,01)$.

Calculer $P(X = 1)$ à 10^{-2} près.

37 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(14; 0,9)$.

Calculer $P(X \geq 13)$ à 10^{-2} près.

38 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(12; 0,4)$.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1. Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
2. En déduire $P(X \geq 3)$.
3. Calculer $P_{X \leq 8}(X \geq 2)$.
4. Calculer $P_{X > 5}(X \leq 10)$.

39 Sofia dispose de 10 paires de chaussettes, dont 8 paires n'ont aucun trou. Elle décide qu'elle fera une lessive dans une semaine. En attendant, chaque matin de la semaine, elle prend une nouvelle paire de chaussettes au hasard dans son placard pour les porter ce jour-là.

On note X le nombre de paires de chaussettes sans trou qu'elle portera cette semaine.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 147



40 Il arrive qu'un œuf de poule contienne deux jaunes. D'après un producteur d'œufs, 5 % des œufs que ses poules pondent contiennent deux jaunes. On achète une boîte de six œufs à ce producteur et on note X le nombre d'œufs contenant deux jaunes dans cette boîte.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.



→ Voir Exercice résolu 4 p. 147

41 Le ginkgo biloba est un arbre fréquemment planté en milieu urbain car il est très résistant aux pollutions et facile à entretenir. Cependant, certains des arbres de cette espèce produisent des fruits très malodorants. La municipalité d'une ville qui souhaite planter 30 ginkgos dans une rue, prend commande auprès d'un pépiniériste. D'après celui-ci, seulement 10 % des ginkgos qu'il fournit produisent des fruits malodorants.



1. Quelle hypothèse faut-il formuler pour que la situation suive une loi binomiale (dont on précisera les paramètres) ?
2. a. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-2} près, qu'aucun des 30 arbres plantés ne produisent de fruits malodorants ?
b. Si cette expérience est répétée un grand nombre de fois, en moyenne combien d'arbres parmi les 30 ginkgos plantés produiront des fruits malodorants ?

42 Un alligator sur un million est albinos. Pour qu'un alligator soit albinos, il faut que ses deux parents soient porteurs des gènes responsables de l'albinisme.

Une femelle alligator ayant pondu 43 œufs, on note X le nombre d'alligators albinos issus de cette ponte.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, préciser ses paramètres.



43 On considère une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « pile » est 0,7. On lance cette pièce 6 fois d'affilée et on note X le nombre total de « pile » obtenus. Dans cet exercice les résultats seront arrondis à 10^{-3} .



1. Quelle loi suit X ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 « pile » ? Au moins 4 « pile » ?
3. Sachant qu'on a obtenu au moins deux « pile », quelle est la probabilité qu'on en obtienne au plus 4 ?

44 En moyenne, 10 % des élèves ont une calculatrice dont les piles (ou la batterie) sont vides. On considère une classe de 35 élèves, dont tous les élèves ont une calculatrice. On note X la variable aléatoire associée au nombre de calculatrices aux piles déchargées dans cette classe. Le nombre de calculatrices en circulation étant élevé, on considère cet échantillon de 35 calculatrices comme un tirage avec remise.



1. Quelle loi suit X ?
2. Calculer $P(X=0)$ (arrondir à 10^{-3}) et interpréter le résultat.
3. Quelle est la probabilité que 5 élèves ou moins aient une calculatrice dont les piles sont déchargées (arrondir à 10^{-3}) ?
4. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

45 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{2}\right)$. Donner les expressions de :

- a. $P(X=1)$
- b. $P(X=3)$
- c. $P(X < 3)$
- d. $E(X)$

Vrai ou faux

46 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

1. Si $n = 15$ et $E(X) = 5$ alors $p = 0,3$.
2. On peut avoir $E(X) = 0$.
3. L'espérance de X est un nombre entier.

47 Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours, pour laisser aux candidats le temps de se préparer. Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury.

Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à un tirage avec remise.

Un candidat a préparé 70 sujets. Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1. Quelle loi suit X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun des 3 sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}) ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un des trois sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}) ?
4. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

48 Un test pour le permis côtier est un QCM comportant 30 questions indépendantes, pour chacune desquelles 3 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Pour réussir le test, il faut répondre correctement à au moins 25 questions.



1. Un candidat décide de répondre au hasard. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues.

- a. Quelle loi suit X ?
 - b. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, qu'il réponde correctement à au moins la moitié des questions ?
 - c. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, qu'il réussisse le test ?
 - d. Si le candidat répondait à un grand nombre de QCM de la même façon, combien de bonnes réponses obtiendrait-il en moyenne à chaque QCM ?
2. On considère maintenant que le candidat est bien préparé et répond correctement à 80 % des questions.
- a. Recommencer la question 1. avec cette nouvelle donnée.
 - b. Le candidat a-t-il raison de s'être préparé ?

Espérance d'une variable aléatoire

49 On lance deux dés. On note X l'écart entre la plus grande et la plus petite des deux valeurs obtenues.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Déterminer l'espérance de X .

50 Clément et Flora vont régulièrement à la pêche. En se basant sur leurs précédentes parties de pêche, on a établi les fréquences des quantités de poissons attrapés par partie de pêche pour chacun d'eux :

Nbre de poissons	0	1	2	3	4
Clément (fréq.)	0,32	0,14	0,13	0,1	0,09
Flora (fréq.)	0,21	0,22	0,19	0,15	0,12

Suite du tableau :

Nbre de poissons	5	6	7	8	9	10
Clément (fréq.)	0,06	0,05	0,04	0,06	0,01	0
Flora (fréq.)	0,02	0,04	0,01	0,01	0,02	0,01

Ils retournent à la pêche ce week-end. On note C et F le nombre de poissons qui seront attrapés par Clément et par Flora. On assimile les statistiques ci-dessus aux lois de probabilités de C et F .



1. a. Quelle est la probabilité que Clément n'attrape aucun poisson ?
- b. Quelle est la probabilité que Flora attrape 4 poissons ?
2. a. Quelle est la probabilité que Flora attrape plus de 5 poissons ?
- b. Quelle est la probabilité que Clément attrape moins de 4 poissons ?
3. Flora déclare : « Je suis une meilleure pêcheuse que Clément, car $P(C = 0) > P(F = 0)$ et $P(C \geq 9) < P(F \geq 9)$ ».
 - a. A-t-elle raison ?
 - b. Quel critère devrait-elle également prendre en compte ?

51  On considère le jeu suivant : chaque partie coûte 2 euros et on lance alors un dé.

- Si le résultat est 1 ou 2, alors le joueur perd 3 euros.
- Si le résultat est 3, 4 ou 5, alors le joueur gagne 1 euro.
- Si le résultat est 6, alors le joueur gagne 15 euros.

Un joueur décide de jouer deux parties. Soit X la variable aléatoire qui associe à ces deux parties le gain total du joueur.

Partie A : Simulation

1. À l'aide d'un tableur, simuler deux lancers de dé dans les cellules A1 et B1.
2. Étendre ces cellules pour simuler 100 fois cette expérience.
3. a. Recopier et compléter le tableau suivant (sans oublier de prendre en compte la mise de départ pour calculer le gain total) :

	Résultats	Gain associé
Nbre de 1		
Nbre de 2		
Nbre de 3		
Nbre de 4		
Nbre de 5		
Nbre de 6		

- b. Quelle est la moyenne des gains ?
4. Quelle notion mathématique est approchée par ce résultat ?

Partie B : Théorie

5. À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer toutes les valeurs possibles prises par X .
6. Déterminer la loi de probabilité de X .
7. Calculer l'espérance de X .
8. Ce résultat confirme-t-il celui de la **Partie A** ?

Coefficients binomiaux, loi binomiale

52 Dans la pièce de théâtre *Rosencrantz and Guildenstern sont morts* de Tom Stoppard (1966), le personnage de Rosencrantz lance une pièce 92 fois d'affilée et obtient toujours face. Quelle est la probabilité que cela se produise ?

53   Écrire un programme

Le but de cet exercice est d'écrire une fonction en Python qui calcule et affiche n'importe quelle ligne du triangle de Pascal. Pour cela, la fonction devra calculer successivement chaque ligne du triangle sous forme d'une liste de valeurs.

1. Supposons qu'une liste $L1$ contienne les valeurs d'une ligne du triangle de Pascal. On note $L2$ la liste qui contiendra les valeurs de la liste suivante.

- a. Quelles sont les premières et dernières valeurs de $L2$?
- b. Expliquer comment seront calculées les autres valeurs de $L2$ à partir des valeurs de $L1$.
- c. Écrire une fonction « suivante » qui prenne en argument une ligne du triangle de Pascal (sous forme d'une liste) et renvoie la ligne suivante.
2. a. Donner la première ligne du triangle de Pascal.
- b. À l'aide de la question 1., écrire une fonction « triangle » qui prenne en argument un nombre entier n et renvoie la ligne correspondante du triangle de Pascal.
3. Vérifier le bon fonctionnement de cette fonction en lui faisant écrire toutes les lignes du triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$.

54 Ariane 5 est un lanceur de l'Agence spatiale européenne conçu pour placer des satellites en orbite. Exactement 100 vols ont été réalisés entre 1996 et 2019, dont seulement cinq échecs ou échecs partiels. Quatre vols sont prévus en 2020 et 2021. On note X le nombre de vols réussis parmi ces quatre projets de lancements.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité que seulement trois des quatre vols prévus soient réussis (à 10^{-3} près) ?
3. Quelle est la probabilité que les quatre vols soient réussis (à 10^{-3} près) ?
4. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.

55 **STMG** D'après les statistiques d'une compagnie aérienne, en moyenne seulement 88 % des clients ayant acheté un billet embarquent dans l'avion. Afin d'augmenter les profits, la compagnie décide de vendre 211 billets pour un vol Paris-New York en Airbus A320, alors que ce modèle d'avion ne peut accueillir que 186 passagers. On considère que tous les billets sont vendus et on note X la variable aléatoire associée au nombre de passagers qui embarquent sur ce vol.



1. Quelle loi de probabilité suit X ?
2. Quelle est la probabilité que la totalité des sièges soient occupés lors de ce vol (arrondir le résultat à 10^{-2}) ?

3. a. Déterminer $E(X)$.
- b. La compagnie a-t-elle raison de vendre plus de billets qu'il n'y a de places à bord de l'avion ?
4. Chaque billet vendu rapporte 150 euros à la compagnie aérienne. Cependant, si plus de 186 clients souhaitent embarquer dans l'avion, alors la compagnie a obligation de fournir gratuitement un billet sur un autre vol aux passagers ne pouvant pas embarquer, ce qui lui coûte en moyenne 500 euros pour chacun de ces passagers.
- a. Quel sera le bénéfice pour la compagnie si $X = 200$ passagers embarquent ?
- b. Quel sera le bénéfice si tous les clients ayant acheté un billet souhaitent embarquer ?
- c. La compagnie a-t-elle raison de vendre autant de billets ?

56 Rozenn va au lycée en vélo. Sur sa route, il y a 6 feux de circulation. Ces feux sont totalement indépendants les uns des autres, sans aucune synchronisation. Chaque feu reste rouge pendant 30 secondes, puis vert pendant une minute. Soit X la variable aléatoire qui associe au prochain trajet de Rozenn le nombre de feux rouges qu'elle rencontrera.



- Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .
1. Quelle loi de probabilité suit X ?
 2. Quelle est la probabilité que tous les feux soient rouges ?
 3. Si tous les feux sont au vert, alors la totalité du trajet lui prend 22 minutes. Un feu rouge lui fait perdre 17 secondes en moyenne. Quelle est la probabilité qu'elle arrive à l'heure en classe si elle ne part que 23 minutes avant la fermeture du portail du lycée ?
 4. Si Rozenn effectue un grand nombre de trajets, combien de feux rouges rencontrera-t-elle en moyenne durant chaque trajet ?

57 **ST2S** En France, au 1^{er} janvier 2018, 0,025 % de la population était centenaire, dont 83 % de femmes. Les résultats seront arrondis à 10^{-5} .

1. a. Quelle était la probabilité que dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard il y ait eu au moins une personne centenaire ?
- b. Et dans un groupe de 500 femmes ?
2. Au Japon, la proportion de centenaires était de 0,037 en 2011. Quelle était la probabilité qu'il n'y ait pas eu de centenaire dans un groupe de 500 personnes choisies au hasard à cette époque ?

58 Pour s'assurer que les usagers achètent un billet, une compagnie de transports contrôle chaque jour 10 % des lignes, choisies aléatoirement.

Un usager utilise ces transports en commun 30 fois par mois. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque mois le nombre de fois que cette personne est contrôlée.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1. Quelle loi de probabilité suit X ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne soit contrôlée 5 fois ce mois-ci ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas contrôlée ce mois-ci ?
4. Sachant que cette personne sera contrôlée au moins deux fois ce mois-ci, quelle est la probabilité qu'elle soit contrôlée moins de 5 fois ?
5. Un billet coûte 1 euro, et en cas de contrôle, l'amende pour défaut de présentation de billet est de 35 euros. En moyenne, ne pas prendre de billet est-il rentable ?

59 Le biathlon est un sport où les athlètes alternent plusieurs fois entre un circuit en ski de fond et des séances de tir à la carabine. À chaque séance de tir, ils doivent tirer sur 5 cibles. Martin Fourcade est le biathlète le plus titré de l'histoire : il a remporté cinq médailles d'or aux Jeux olympiques et a treize titres de champion du monde à son actif. Au début de la saison 2017-2018, 90 % de ses tirs atteignaient la cible. Arrivé aux Jeux olympiques en février 2018, à PyeongChang, quelle était la probabilité pour lui d'atteindre les cinq cibles lors d'une séance de tir ?

60 De 1987 à 1993, le *Tapis vert* était un jeu de la Française des Jeux (à l'époque appelée France Loto). Le principe était le suivant : pour jouer, il fallait miser entre 2 et 100 francs, puis, pour chaque couleur (cœur, carreau, trèfle, pique), choisir une carte entre le 7 et l'as.

Un tirage était ensuite effectué sous contrôle d'huissier et diffusé à la télévision.

Si le joueur avait choisi deux des cartes tirées, il gagnait deux fois sa mise, s'il avait choisi trois des cartes tirées, il gagnait trente fois sa mise, et s'il avait choisi les quatre cartes tirées alors il gagnait mille fois sa mise.

Un joueur a choisi ses quatre cartes. On note X le nombre de ses cartes qui seront tirées.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'il gagne de l'argent ?
3. Déterminer l'espérance de X et interpréter ce résultat.
4. Ce joueur a misé 10 francs pour un tirage. On note Y ses gains.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
 - b. Donner la loi de probabilité de Y .

c. Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.

5. Le 29 mars 1988 eut lieu un tirage particulier : les quatre as ont été tirés. Beaucoup de gens ayant parié sur cette combinaison, les gains distribués ont été très supérieurs aux mises !

Quelle était la probabilité qu'un tel tirage se produise ?

61 Les scolytes sont de petits coléoptères xylophages : ils se nourrissent de bois. À cause du réchauffement climatique, leur population est en forte augmentation et cause beaucoup de dégâts, notamment dans les forêts de pins.



Afin de suivre leur évolution dans une forêt, un garde forestier réalise des prélèvements sur 20 arbres et note X le nombre d'arbres atteints par les scolytes parmi cet échantillon.

Lors d'études précédentes, il a été établi que 12 % des arbres de cette forêt sont atteints par les scolytes.

1. Quelle hypothèse est-il nécessaire de formuler pour que X suive une loi binomiale ? Cette hypothèse est-elle réaliste ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq de ces arbres soient atteints par les scolytes ? Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Quelle est la probabilité qu'aucun de ces arbres ne soit atteint par les scolytes ? Arrondir le résultat à 10^{-3} .
4. Si le garde forestier réalisait un grand nombre de tests similaires, combien d'arbres atteints par les scolytes devrait-il trouver en moyenne ?

62 **STHR** Depuis le 1^{er} novembre 2019, les cantines scolaires ont obligation de proposer un menu végétarien au moins une fois par semaine pour des raisons environnementales et de santé. Deux des cinq menus hebdomadaires de la cantine d'un lycée sont des menus végétariens, mais pas toujours les mêmes jours de la semaine. Hugo ne mange à la cantine que les lundi et les jeudi.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} .

1. Montrer que la probabilité que Hugo mange un menu végétarien au moins une fois en une semaine est $\frac{7}{10}$.
2. Un trimestre comporte 11 semaines de cours. On note X le nombre de semaines pendant lesquelles Hugo mangera au moins une fois un menu végétarien durant ce trimestre.
 - a. Quelle loi suit X ?
 - b. Calculer $P(X = 2)$, $P(X = 5)$ et $P(X \geq 6)$ à 10^{-2} près. Interpréter les résultats.
 - c. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

		V	F
63	Une variable aléatoire Y dont l'espérance est $E(Y) = 3$ a pour loi de probabilité : Alors $p = 0,1$.		
64	$\binom{17}{16}$ est égal à 16.		
65	$\binom{8}{3}$ est le seul coefficient binomial à être égal à 56.		
66	$\binom{10}{5}$ est le seul coefficient binomial à être égal à 252.		
67	Aucun coefficient binomial n'est égal à 314.		
68	Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(8; 0,3)$. Alors $P(X = 2) \approx 0,30$ à 10^{-2} près.		
69	Une variable aléatoire Y suit la loi $\mathcal{B}(5; 0,75)$. Alors $P(Y \geq 4) \approx 0,37$ à 10^{-2} près.		
70	Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{B}(13; 0,6)$. Alors $P(Z > 8) \approx 0,35$ à 10^{-2} près.		
71	L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale peut être égale à 22,5.		

→ Vérifier les résultats p. 178

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

72 X a pour loi de probabilité :

1. Alors $P(X \leq 2)$ est égale à :

- a. 0 b. 0,2
c. 0,4 d. 0,7

2. Alors l'espérance $E(X)$ est égale à :

- a. 0 b. 0,2

73 Le coefficient binomial $\binom{28}{29}$:

- a. est égal à 1. b. est égal à 27. c. est égal à 28. d. n'existe pas.

74 Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(15; 0,5)$.

1. $P(X = 6)$ est égale à ($\approx 10^{-2}$ près) :

- a. 0,15 b. 0,35

2. $P(X \geq 8)$ est égale à ($\approx 10^{-2}$ près) :

- a. 0,15 b. 0,35

3. L'espérance de X est égale à :

- a. 0,075 b. 0,75

x_i	-4	-2	0	2	4
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

c. 0,4

d. 0,7

c. 0,5

d. 0,75

c. 0,5

d. 0,75

c. 7,5

d. 75

→ Vérifier les résultats p. 178

75 In English



The game of "Crown and Anchor" is a dice game, traditionally played by sailors in the Royal Navy. It is played using special dice: the six faces are marked with the symbols: crown, anchor, diamond, spade, club, and heart. The game is played between a player and a banker. The player bets 1£ on one of the symbols and throws three dice.

• If none of the dice shows the symbol the player bet on, then the player loses his bet and the banker keeps the stake.

• If one or more of the dice shows the symbol the player bet on, then, in addition to returning the stake the banker pays the player the amount of his stake for each die showing that symbol.

A player plays one round of this game. Let X denote his total profit.

1. What are the possible values for X ?
2. Modelise the situation using a probability tree diagram.
3. Find the probability distribution of X .
4. The results will be rounded to 10^{-3} .
 - a. What is the value of $P(X = 1)$?
 - b. What is the value of $P(X \geq 1)$?
5. a. What is the expected value of X (round the value to 10^{-3})?
- b. Does this game favor the banker or the player?

76 COMPÉTENCE Modéliser, Calculer

Une loterie comporte 200 billets (à 5 euros pièce) dont 2 sont gagnants : l'un pour un lot de 100 euros et l'autre pour un lot de 60 euros. On a acheté 3 billets. On note X la variable aléatoire associant à ces 3 billets le gain total.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

77 COMPÉTENCE Modéliser

Les groupes sanguins se distinguent par la présence ou non d'antigènes A ou B à la surface des globules rouges. En France, la distribution des groupes sanguins est la suivante :

- 42 % des Français sont du groupe sanguin O ;
- 45 % sont du groupe A ;
- 9 % sont du groupe B ;
- 3 % sont du groupe AB.

Par ailleurs, le système Rhésus permet de classer les groupes sanguins selon la présence ou non d'antigène D à la surface des globules rouges :

- dans le groupe O, 86 % des individus ont un rhésus positif ;
- dans le groupe A, 84 % des individus ont un rhésus positif ;
- dans le groupe B, 89 % des individus ont un rhésus positif ;
- dans le groupe AB, 75 % des individus ont un rhésus positif.

Seuls les individus du groupe O ayant un rhésus négatif sont considérés comme « donneurs universels » : leur sang peut être transfusé à n'importe qui.

1. On choisit une personne au hasard dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit du groupe O et de rhésus négatif ?

2. a. Un blessé grave arrive au service des urgences d'un hôpital. Il a perdu beaucoup de sang et a besoin d'une transfusion. Deux dons de sang sont nécessaires. Ne connaissant pas son groupe sanguin, les médecins doivent lui transfuser du sang du groupe O et de rhésus négatif, mais ils n'en ont plus en réserve. 53 personnes sont présentes dans l'hôpital. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) qu'au moins une de ces personnes puisse donner le sang nécessaire à la transfusion ?

b. Quelle serait cette probabilité chez le peuple Inuit dont 12 % de la population est du groupe O et de rhésus négatif ?

78 COMPÉTENCE Modéliser

Une crue centennale est une crue qui a une chance sur cent de se produire chaque année. La dernière crue centennale de la Seine à Paris a eu lieu en 1910. On note X le nombre de crues centennales qui auront lieu à Paris dans le siècle à venir.

1. a. Quelle loi de probabilité suit X ?
- b. Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'au moins deux crues centennales aient lieu durant le prochain siècle ?
- c. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter le résultat.
2. Florian déclare « Ça fait plus de cent ans que la dernière crue centennale a eu lieu, il est de plus en plus probable que la prochaine arrive ! ». A-t-il raison ?

79 COMPÉTENCE Calculer

Les corvidés, comme les corbeaux et les corneilles, sont des oiseaux capables de réaliser des tâches complexes et de comprendre des raisonnements. Des chercheurs veulent tester la persévérance d'un corbeau. Pour cela, ils présentent au corbeau une boîte transparente contenant une récompense (une friandise) et dont le couvercle présente quatre boutons. Pour ouvrir la boîte, le corbeau doit appuyer sur chacun des quatre boutons dans un ordre précis.

1. Combien de combinaisons sont possibles ?
2. Le corbeau essaye des combinaisons au hasard, sans se souvenir lesquelles il a déjà testées.
 - a. Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) qu'il trouve la bonne combinaison en essayant 5 fois d'affilée ? 10 fois d'affilée ?
 - b. Combien d'essais le corbeau doit-il faire pour que la probabilité qu'il trouve la bonne combinaison soit supérieure à 0,95 ?
3. Les chercheurs recommencent cette expérience avec un grand nombre de corbeaux, en les laissant faire 30 essais chacun. En moyenne, combien de fois chaque corbeau trouve-t-il la bonne combinaison ?

La méthode de Monte-Carlo

CAPACITÉ Approcher l'espérance d'une loi binomiale avec une simulation.

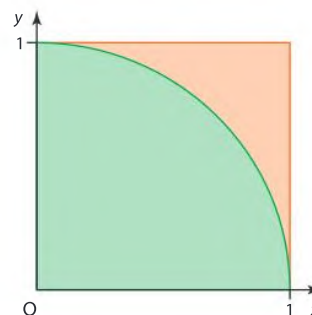
Dans un repère orthonormé, on considère le carré de côté de longueur 1 dont les sommets ont pour coordonnées $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$ et $(1; 0)$.

On considère également le quart de cercle de rayon 1 de centre O $(0; 0)$, et d'extrémités $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

1. a. Déterminer les aires du carré et du quart de cercle.
- b. En déduire la probabilité qu'un point choisi au hasard dans le carré soit également dans le quart de cercle.
2. On choisit 100 points au hasard dans le carré. Soit X la variable aléatoire associant à ce prélèvement le nombre de ces points se trouvant à l'intérieur du quart de cercle.
- a. Quelle loi suit X ?
- b. Quelle est l'espérance de X ?



Le nom de cette méthode, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués au casino de Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par le physicien gréco-américain Nicholas Metropolis.



En salle informatique



lienmini.fr/10445-49

1. Reproduire la figure ci-dessus à l'aide du logiciel GeoGebra.
2. Ouvrir la fenêtre du tableur de GeoGebra.
- a. La commande `=random()` permet de générer aléatoirement un nombre entre 0 et 1. Utiliser cette commande pour générer aléatoirement les coordonnées d'un point du carré dans les cellules A1 et B1.
- b. Dans la cellule C1, la commande `=A1,B1` permet de créer le point C_1 du carré dont les coordonnées sont données dans les cellules A1 et B1.
- c. Dans la cellule D1, calculer la distance OC_1 où O est l'origine du repère.
3. Le point C_1 appartient-il au quart de cercle ? Comment peut-on utiliser le résultat de la cellule D1 pour le confirmer ?
4. Sélectionner et étirer la plage A1:D1 pour simuler le tirage aléatoire de 100 points du carré.
5. a. La commande `=NbSi(x<d, plage)` permet de déterminer combien de nombres d'une plage donnée sont inférieurs à une valeur d . Utiliser cette commande pour déterminer combien des 100 points générés aléatoirement sont dans le quart de cercle.
- b. Ce nombre est une approximation d'un résultat des questions ci-dessus. Lequel ?
- c. En déduire une approximation de π .
6. a. Est-ce une bonne approximation ?

- b. Augmenter le nombre de tirages pour améliorer cette approximation.

Combien de décimales peut-on obtenir ?

7. a. Sélectionner la colonne C et, à l'aide d'un clic droit, décocher « Afficher l'objet ». De même, effacer le carré et l'arc de cercle.

Dans la cellule E₁, taper la commande :

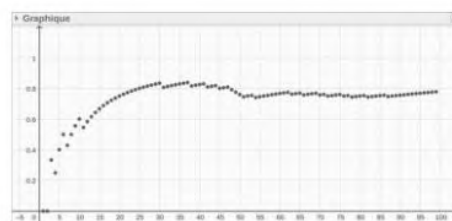
`=NbSi(x<1, D$1:D1)/Ligne(D1)`

puis étendre cette formule aux lignes suivantes.

- b. À quoi sert le symbole « \$ » dans cette formule ?
- c. Que permet de calculer cette formule ?
- d. Comment évoluent les résultats affichés dans la colonne E ? Est-ce normal ?
- e. Dans la cellule F₁, taper la commande :

`=Ligne(E1), E1`

puis étendre cette formule aux lignes suivantes. Élargir la fenêtre d'affichage pour observer les points créés.



- f. Les valeurs semblent se stabiliser autour d'une valeur. Est-ce le cas ? Pour quelle valeur ?

SUJET RÉSOLU

BAC

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
80 Donner la valeur de $\binom{18}{1}$.	$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	$\binom{18}{1} = 18$
81 On sait que $\binom{8}{3} = 56$ et $\binom{8}{4} = 70$. En déduire la valeur de $\binom{9}{4}$.	$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$	$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4} = 126$
82 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(7; 0,3)$. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité $P(X = 3)$.	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$	$P(X = 3) = \binom{7}{3} 0,3^3 \times 0,7^4 \approx 0,23$
83 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,6)$. Calculer $E(X)$.	$E(x) = n \times p$	$E(X) = 12 \times 0,6 = 7,2$
84 En France, 36,7 % des voitures en circulation sont grises. On note X le nombre de voitures grises parmi les 20 prochaines voitures qui passent dans une rue lyonnaise. La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ?	Il faut : – identifier l'épreuve de Bernoulli ; – vérifier que les répétitions sont identiques et indépendantes.	– observer la couleur d'une voiture est une épreuve de Bernoulli : elle est grise (succès) ou non (échec) ; – le nombre de voitures à Lyon étant élevé, la couleur de l'une des 20 voitures ne dépend aucunement de celles des autres, les tirages sont donc identiques et indépendants. X suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,367)$.

85 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,45)$.

- Déterminer $\binom{8}{3}$.
- En déduire, à 10^{-2} près, la valeur de $P(X = 3)$.
- Calculer $E(X)$.

Méthode à appliquer

1. On détermine la valeur de $\binom{8}{3}$ en complétant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 8$: - la première et dernière valeur de chaque ligne est 1 ; - une valeur est la somme des deux valeurs situées au-dessus d'elle. → Voir Exercice résolu 2 p. 145
2. On utilise la formule du cours : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$ → Voir Exercice résolu 3 p. 147
3. On utilise la formule du cours : $E(X) = n \times p$.

Solution rédigée

1. La ligne $n = 8$ du triangle de Pascal est :

1	8	28	56	70	56	28	8	1
---	---	----	----	----	----	----	---	---

Ainsi $\binom{8}{3} = 56$.

2. $P(X = 3) = \binom{8}{3} 0,45^3 \times (1-0,45)^{8-3}$
 $P(X = 3) = 56 \times 0,45^3 \times 0,55^5 \approx 0,26$.

3. $E(X) = 8 \times 0,45 = 3,6$.

86 CAPACITÉS

- Identifier les paramètres d'une loi binomiale.
- Calculer une probabilité du type $P(X=0)$ où X suit une loi binomiale.

Partie A

Deux ateliers A et B fabriquent des stylos pour une entreprise. L'atelier A fabrique 60 % des stylos, et parmi ceux-là, 5 % possèdent un défaut de fabrication. De plus, 1 % de tous les stylos sortant de l'atelier B possèdent un défaut de fabrication. Un stylo est prélevé au hasard dans le stock de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- A : « le stylo a été fabriqué par l'atelier A ».
 - B : « le stylo a été fabriqué par l'atelier B ».
 - D : « le stylo possède un défaut de fabrication ».
1. Donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$ et $P(B \cap D)$.

Méthode $P_A(D)$ est une probabilité conditionnelle.

Elle se calcule avec la formule $P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$.

2. a. Calculer la probabilité qu'un stylo provienne de l'atelier A et possède un défaut de fabrication.
 b. En déduire que la probabilité qu'un stylo possède un défaut de fabrication est de 0,04.
 3. On prélève un stylo au hasard dans l'atelier B. Quelle est la probabilité qu'il possède un défaut ?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que 4 % des stylos possèdent un défaut de fabrication. L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 25 stylos. Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.

On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

Méthode Les paramètres d'une loi binomiale sont n et p où n est le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli et p est la probabilité de succès à chaque épreuve de Bernoulli.

2. Le directeur de l'entreprise affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. A-t-il raison ?

87 CAPACITÉS

- Identifier les paramètres d'une loi binomiale.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Tous les résultats seront arrondis au millième.

Tous les 5 ans, l'Institut national de veille sanitaire réalise une enquête sur les infections nosocomiales (infections contractées au cours d'une hospitalisation). Lors d'une enquête, on a obtenu les résultats suivants :

- 53 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 66 ans ou plus, dont 6,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale ;
- 6 % des personnes hospitalisées étaient âgées de 14 ans ou moins, dont 2,4 % ont été atteints par une infection nosocomiale ;
- Parmi les autres patients, 3,7 % ont été atteints par une infection nosocomiale.

On choisit au hasard une personne ayant participé à cette enquête. On considère les événements suivants :

- E : « la personne est âgée de 0 à 14 ans ».
- F : « la personne est âgée de 15 à 65 ans ».
- G : « la personne est âgée de plus de 65 ans ».
- N : « la personne est atteinte par une infection nosocomiale ».

1. Montrer qu'une valeur approchée au millième de la probabilité de contracter une infection nosocomiale est 0,051 (on pourra s'aider d'un arbre de probabilités).

Méthode La probabilité de l'événement N est la somme des probabilités des branches de l'arbre comportant l'issue N.

2. Quelqu'un affirme qu'un patient victime d'une infection nosocomiale a plus de 3 chances sur 4 d'être âgé de plus de 65 ans. Est-ce vrai ? Justifier.

3. On choisit au hasard 50 patients ayant participé à l'enquête. Ce tirage est assimilé à 50 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de patients infectés parmi les 50 personnes choisies.

- a. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres et son espérance.

Méthode L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n; p)$ est : $E(X) = n \times p$.

- b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 personnes interrogées, trois soient atteintes par une infection nosocomiale ?

88 L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).

On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.

L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.

Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;

- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'événement : « l'angine du malade est bactérienne ».

- T l'événement : « le test effectué sur le malade est positif ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, $P(E)$ désigne la probabilité de E et $P_F(E)$ désigne la probabilité de E sachant que F est réalisé. On note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

2. a. Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

c. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité que son angine soit bactérienne ?

3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

89 Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Une agence de voyages propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas. Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.

Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client.

On considère les événements suivants :

- A : « le client choisit de faire l'aller en bateau ».

- R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si E est un événement, $P(E)$ désigne la probabilité de E et on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.

2. On choisit au hasard un client de l'agence.

a. Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.

b. Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.

3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.

On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.

a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.

c. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.

4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 euros en bateau ; il est de 1 200 euros en train.

On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer l'espérance mathématique de Y.

Interpréter le résultat.

90 Une loterie, à laquelle les 845 élèves du lycée participent, est organisée pour la journée anniversaire de la création du lycée. Quatre lots sont offerts. On admet que le nombre d'élèves du lycée est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise. On sait que 20 % de l'ensemble des élèves sont inscrits à l'association sportive. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant.

1. La probabilité qu'au moins la moitié des gagnants de la loterie soient inscrits à l'association sportive est environ 0,181.

2. La probabilité que l'association sportive ne compte aucun gagnant est 0,5904 (à 10^{-4} près).

3. Si on organisait un grand nombre de loteries similaires, le nombre moyen de gagnants inscrits à l'association sportive serait environ 1,2.

Les outils pour réussir

▶ Calculatrices	
Casio Graph 35+E	p. 164
NumWorks	p. 167
TI-83 Premium CE	p. 170
▶ GeoGebra	p. 173
▶ Python	p. 174
▶ Tableur	p. 176



Les outils numériques occupent une place centrale dans les nouveaux programmes des classes de Terminale des séries technologiques. Les pages suivantes regroupent les utilisations essentielles de ces outils en divers modules.

Chaque élève pourra y trouver les instructions nécessaires aux tâches spécifiques à réaliser à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur équipé des logiciels adaptés.

CALCULATRICES

p. 164

Les modèles présentés ici sont la **CASIO Graph 35+E**, la **NumWorks** et la **TI-83 Premium CE**.
Sont traités pour chaque modèle :

- ▶ Le mode examen 164, 167, 170
- ▶ Afficher la courbe représentative d'une fonction 164, 167, 170
- ▶ Afficher un tableau de valeurs d'une fonction 164, 167, 170
- ▶ Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence 165, 168, 171
- ▶ Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables 165, 168, 171
- ▶ Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables 166, 169, 172
- ▶ Calcul de probabilités suivant une loi binomiale 166, 169, 172

GEOGEBRA

p. 173

Le logiciel de géométrie dynamique **GeoGebra** permet l'utilisation simultanée d'outils géométriques, d'un tableur et d'un module de calcul formel.

- ▶ Étude d'une fonction 173
- ▶ Étude d'une suite 173
- ▶ Calcul formel 173
- ▶ Statistiques à deux variables 173

PYTHON

p. 174

Le langage de programmation que nous mettons en avant dans ce manuel est **Python** (3.4.2 et plus) avec une bibliothèque adaptée au lycée (lycee.py). **Edupython** permet d'écrire des algorithmes en Python et de les faire fonctionner. Il est disponible sur le site : <http://edupython.tuxfamily.org/>

- ▶ Manipuler une variable 174
- ▶ Manipuler des listes 174
- ▶ Instructions conditionnelles 174
- ▶ Boucle « tant que » 175
- ▶ Boucle « pour » 175
- ▶ Fonctions de programmation 175
- ▶ Les modules 175

TABLEUR

p. 176

Plusieurs **tableurs** sont disponibles, par exemple : **Calc** de Libre Office ou **Excel** de Microsoft.

- ▶ Manipulation de données 176
- ▶ Représentation de données 177
- ▶ Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables 177

1 Avec une calculatrice Casio graph 35+E

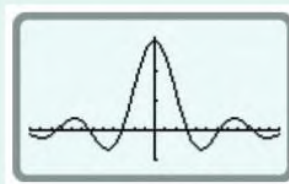
► Le mode examen

► **Pour entrer en mode examen** : la calculatrice étant éteinte, presser simultanément les touches **cos**, **7** et **AC/ON**. Ensuite, valider avec la touche **F1**.

► **Pour sortir du mode examen** : connecter la calculatrice à une autre qui n'est pas en mode examen avec un câble trois broches. Sur les deux calculatrices, dans le menu , presser **F4** (CABL) puis **F2** (câble 3 broches). Sur la calculatrice n'étant pas en mode examen, dans le menu , presser **F3** (EXAM) puis **F1** (Déverrouiller Mode Examen), et à nouveau **F1** (Oui) pour valider.

► Afficher la courbe représentative d'une fonction

Dans le menu , enregistrer l'expression de la fonction, en utilisant la touche **X θ T** pour la variable x . Presser ensuite **F6** (DRAW) pour afficher la courbe dans un repère.



Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut presser les touches **SHIFT** et **F3** (V-Window) et modifier les valeurs **Xmin** (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses), **Xmax** (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses), **Ymin** et **Ymax** (pour l'axe des ordonnées).

► Afficher un tableau de valeurs d'une fonction

Dans le menu , après avoir enregistré l'expression de la fonction, presser la touche **F5** (SET). Modifier les valeurs **Start** et **End** pour indiquer les valeurs minimale et maximale de x dans le tableau, et celle de **Step** pour indiquer le pas. Ensuite, presser la touche **F6** (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.



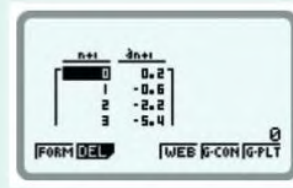
X	Y1
-3	0.1411
-2.5	0.7101
-2	1.3639
-1.5	1.9948

-3

FORM DEL ROW EDIT R-CON G-FLT

► Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence

Dans le menu , après avoir enregistré l'expression de la suite, en utilisant la touche **F2** pour la variable $u(n)$, presser la touche **F5** (SET). Modifier les valeurs **Start** et **End** pour indiquer les valeurs minimale et maximale de x dans le tableau, et celle de a_0 pour indiquer le premier terme de la suite. Ensuite, presser la touche **F6** (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.



► Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables

Dans le menu , entrer les valeurs de x_i dans la colonne **List1** et les valeurs de y_i dans la colonne **List2**. Pour afficher le nuage de points correspondant, presser **F1** (GRPH) puis **F6** (SET).

Vérifier alors que les paramètres suivants sont enregistrés :

Graph type:	Scatter
XList:	List1
YList:	List2
Frequency:	1



Valider et presser **F1** (GPH1). Il peut être nécessaire de changer les paramètres de la fenêtre dans **V-Window** pour obtenir un affichage optimal.



► Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

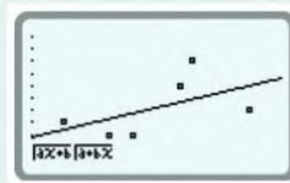
Dans le menu , entrer les valeurs de x_i dans la colonne List1 et les valeurs de y_i dans la colonne List2.

Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine avec la méthode des moindres carrés, presser F2 (CALC), puis F3 (REG), puis F1 (X), puis à nouveau F1 (ax+b).

Le coefficient directeur est donné par a et l'ordonnée à l'origine par b .

Pour tracer cette droite avec le nuage de points, presser F1 trois fois (GRPH puis GPH1 puis CALC) puis F2(X), puis F1 (ax+b) puis F6 (DRAW).

```
RéarLinéaire(ax+b)
a =0.44974093
b =-2.9917098
r =0.53109599
r²=0.28206295
MSe=5.17512953
y=ax+b
COPY
```



► Calcul de probabilités suivant une loi binomiale

Dans le menu , presser OPTN, puis F5 (STAT), puis F3 (DIST), puis F5 (BINM).

Sélectionner F1 (Bpd) pour calculer une probabilité du type $P(X = k)$, ou F2 (Bcd) pour calculer une probabilité du type $P(X \leq k)$.

Rentrer les valeurs de k , n et p (où n et p sont les paramètres de la loi binomiale étudiée) dans cet ordre et séparés par des virgules, puis fermer la parenthèse et valider pour obtenir le résultat.

```
BinomialCD(12,20,0.7)
0.2277282026
□
Bpd Bcd InvB
```

2 Avec une calculatrice NumWorks

► Le mode examen

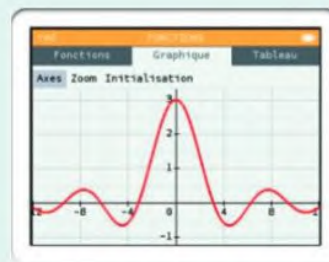
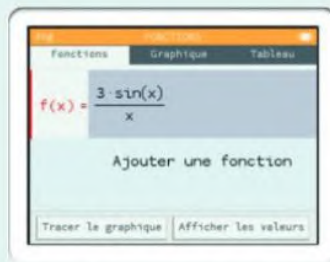


- **Pour entrer en mode examen** : dans le menu **Paramètres**, sélectionner **Mode examen**, puis valider.
- **Pour sortir du mode examen** : brancher la calculatrice à un ordinateur à l'aide d'un câble usb. Un message apparaît alors pour demander si vous souhaitez sortir du mode examen. Choisir **Valider**.

► Afficher la courbe représentative d'une fonction



Dans le menu **Fonctions**, aller dans **Ajouter une fonction** pour enregistrer l'expression de la fonction, en utilisant la touche **x, n, t** pour la variable **x**. Aller ensuite dans **Tracer le graphique** (ou dans l'onglet **Graphique**) pour afficher la courbe dans un repère.



Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut aller dans le menu **Axes** de l'onglet **Graphique** et modifier les valeurs **Xmin** (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses) et **Xmax** (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses).

Les valeurs de l'axe des ordonnées seront modifiées automatiquement.

► Afficher un tableau de valeurs d'une fonction



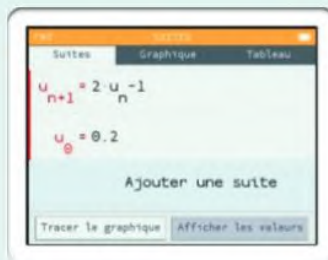
Dans le menu **Fonctions**, après avoir enregistré l'expression d'une fonction, aller dans l'onglet **Tableau**. Pour choisir les valeurs de début et de fin de tableau, ainsi que le pas, aller dans **Régler l'intervalle**.



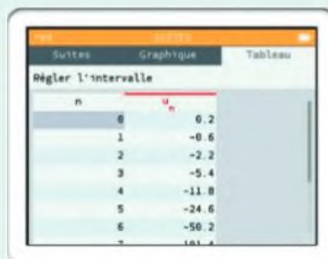
x	f(x)
-3	0.14112
-2.5	0.718166
-2	1.363946
-1.5	1.99499
-1	2.524413
-0.5	2.876553
0	undef
0.5	-2.876553

► Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence

Dans le menu , après avoir enregistré l'expression d'une suite dans l'onglet **Suites**, aller dans l'onglet **Tableau**.



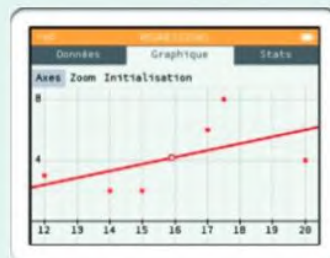
Pour choisir les valeurs de début et de fin de tableau, ainsi que le pas, aller dans **Régler l'intervalle**.



► Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables

Dans le menu , entrer les valeurs de x_i dans la colonne **X1** et les valeurs de y_i dans la colonne **Y1** de l'onglet **Données**. Le graphique est alors visible dans l'onglet **Graphique**.

X1	Y1	X2
12	3	
14	2	
15	2	
17	6	
17.5	8	
20	4	



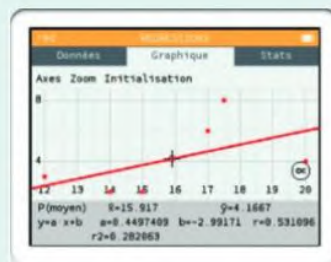
► Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables



Dans le menu **Régressions**, entrer les valeurs de x_i dans la colonne **X1** et les valeurs de y_i dans la colonne **Y1** de l'onglet **Données**.

La droite d'ajustement affine obtenue avec la méthode des moindres carrés est alors visible dans l'onglet **Graphique**.

Son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine sont donnés par a et b en bas de l'écran.

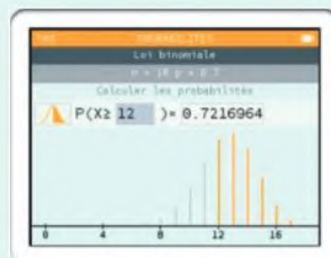


► Calcul de probabilités suivant une loi binomiale



Dans le menu **Probabilités**, choisir la rubrique **Binomiale**. Rentrer les valeurs des paramètres n et p de la loi binomiale étudiée.

Après validation, l'icône  permet de choisir un calcul du type $P(X \leq k)$ ou $P(k \leq X \leq l)$ ou $P(k \leq X)$ ou $P(X = k)$. Indiquer ensuite la valeur de k et valider.



3 Avec une calculatrice TI-83 Premium CE

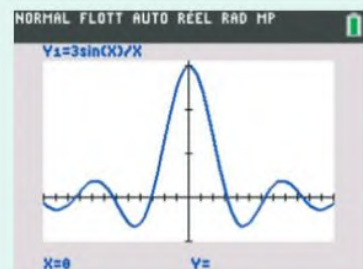
► Le mode examen

► **Pour entrer en mode examen :** la calculatrice étant éteinte, presser simultanément les touches **annu1** (sélectionner Mode examen), **entrer** et **on** pendant quelques secondes. Ensuite, valider avec la touche **zoom** (OK).

► **Pour sortir du mode examen :** connecter la calculatrice à une autre avec un câble usb. Sur la calculatrice à déverrouiller, presser **2nde** puis **X,T,θ,n** (échanger) et dans l'onglet **RECEVOIR** sélectionner **1:Réception**. Sur l'autre calculatrice, presser **2nde** puis **X,T,θ,n** (échanger) et dans l'onglet **ENVOYER**, sélectionner un élément à transmettre (par exemple, une liste vide) et valider.

► Afficher la courbe représentative d'une fonction

Appuyer sur **f(x)** (ou **Y=** selon la version de la calculatrice). Enregistrer l'expression de la fonction à étudier, en utilisant la touche **X,T,θ,n** pour la variable x . Presser ensuite **graphe** pour afficher la courbe dans un repère.



Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut presser la touche **fenêtre** et modifier les valeurs **Xmin** (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses), **Xmax** (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses), **Ymin** et **Ymax** (pour l'axe des ordonnées).

► Afficher un tableau de valeurs d'une fonction

Après avoir enregistré l'expression de la fonction à étudier, presser les touches **2nde** puis **fenêtre** (déf table). Modifier les valeurs **DébutTb1** et **Tb1** pour indiquer la valeur minimale de x dans le tableau, et celle du pas. Ensuite, presser les touches **2nde** puis **graphe** (table) pour afficher le tableau de valeurs.



The screenshot shows the table screen with the following data:

X	Y1			
-3	0.1411			
-2.5	0.7182			
-2	1.3639			
-1.5	1.995			
-1	2.5244			
-0.5	2.8766			
0	ERREUR			
0.5	2.8766			
1	2.5244			
1.5	1.995			
2	1.3639			

X=-3

Appuyer sur la touche **mode** et, sur la troisième ligne, sélectionner **SUITE** (ou **SEQ** selon les modèles). Ensuite, presser la touche **f(x)** (ou **Y=** selon la version de la calculatrice). Modifier les valeurs de **nMin** pour déterminer le rang du premier terme (en général 0), de **u(n)** pour déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$, en utilisant les touches **2nde** et **7** pour taper u et la touche **X,T,θ,n** pour n , et de **u(nMin)** pour indiquer la valeur du premier terme. Ensuite, presser les touches **2nde** et **graphe** (*table*) pour afficher le tableau de valeurs. Presser les touches **2nde** puis **fenêtre** (déf table). Modifier les valeurs **DébutTb1** et **Tb1** pour indiquer la valeur minimale de n dans le tableau, et celle du pas. Ensuite, presser les touches **2nde** et **graphe** (*table*) pour afficher le tableau de valeurs.

Left Screen (Program Listing):

```

NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=1
1: u(n) = 2u(n-1) - 1
2: u(1) = 0.2
3: u(2) =
4: v(n) =
5: v(1) =
6: v(2) =
7: w(n) =

```

Right Screen (Execution Results):

n	u(n)	v(n)	w(n)
1	0.2		
2	-0.6		
3	-2.2		
4	-5.4		
5	-11.8		
6	-24.6		
7	-50.2		
8	-101.4		
9	-203.8		
10	-408.6		
11	-818.2		

Appuyer sur **stats**, et sélectionner **1:Modifier...**. Entrer les valeurs de x_i dans la colonne L1 et les valeurs de y_i dans la colonne L2. Pour afficher le nuage de points correspondant, presser **2nde** et **f(x)** (graph stats).

Vérifier alors que les paramètres de Graph1 ci-contre sont enregistrés :

Appuyer alors sur **grapher**. Il peut être nécessaire de changer les paramètres de la fenêtre dans **fenêtre** pour obtenir un affichage optimal.

```
Type :      Nuage de points
XList:      L1
YList:      L2
```

Figure 1 shows a TI-84 Plus calculator screen. The top part displays a data table with columns labeled L1, L2, L3, L4, L5, and 2. The data points are as follows:

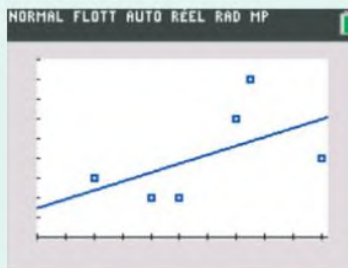
L1	L2	L3	L4	L5	2
12	3				
14	2				
15	2				
17	6				
17.5	8				
20	4				

The bottom part of the screen shows a scatter plot with the same data points plotted as blue squares on a coordinate plane. The x-axis ranges from 0 to 25, and the y-axis ranges from 0 to 10.

► Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

Appuyer sur **stats**, et sélectionner **1:Modifier...**. Entrer les valeurs de x_i dans la colonne L1 et les valeurs de y_i dans la colonne L2. Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine avec la méthode des moindres carrés, presser **stats** et aller dans l'onglet **CALC** puis sélectionner **4:RégLin(ax+b)**. Choisir L1 dans **XListe**, L2 dans **YListe**, et Y1 dans **Enr régéQ** (à l'aide de la touche **var** puis l'onglet **VAR Y** et le menu **1:Fonctions...**). Laisser **ListFréq** vide, et valider.

Le coefficient directeur est donné par a et l'ordonnée à l'origine par b . Pour tracer cette droite avec le nuage de points, appuyer sur **graphe**.



► Calcul de probabilités suivant une loi binomiale

Appuyer sur **2nde** et **var** (distrib). Sélectionner **binomFdp** pour calculer une probabilité du type $P(X = k)$ ou **binomFRép** pour calculer une probabilité du type $P(X \leq k)$. Rentrer les valeurs de n dans **nbreEssais:** et de p dans **p:** (où n et p sont les paramètres de la loi binomiale étudiée) et de k dans **valeur de x:**, puis valider pour obtenir le résultat.

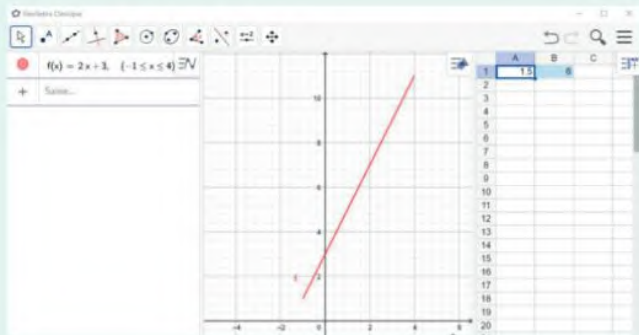
```
NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP
binomFRép
nbreEssais:20
p:0.7
valeur de x:12
Coller
```

```
NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP
binomFRép(20,0.7,12)
0.2277282009
```

► Étude d'une fonction

► **Pour afficher la représentation graphique** d'une fonction f , il suffit de taper $f(x)=$ suivi de l'expression de la fonction, dans la barre de saisie. Pour limiter l'ensemble de définition de f à un intervalle $[a ; b]$, il faut taper dans la barre de saisie : $f(x)=\text{Fonction}[\text{expression},a,b]$ où « expression » est l'expression de la fonction.

► **Pour obtenir un tableau de valeurs**, il faut ouvrir l'onglet du tableur (à l'aide du menu **Affichage**). Rentrer les valeurs de x désirées dans la colonne A à partir de la cellule A1, puis taper $=f(A1)$ dans la cellule B1. Étirer cette cellule au reste de la colonne B.



► Étude d'une suite

► **Cas d'une suite définie explicitement** : dans l'onglet du tableur créer un tableau de valeurs de la suite à étudier de façon similaire à celui d'une fonction, comme expliqué ci-dessus. Pour afficher les points correspondants dans un repère, se placer dans la cellule C1 et y taper $=\text{A1},\text{B1}$. Sélectionner et étirer cette cellule au reste de la colonne C. Sélectionner la totalité de la colonne C, faire un clic droit dessus, et sélectionner **Propriétés...** Dans le menu qui s'ouvre, aller dans l'onglet **Basique** et cocher la case **Afficher l'objet**.

► **Cas d'une suite définie par récurrence** : ouvrir l'onglet du tableur (à l'aide du menu **Affichage**), et entrer la valeur du premier terme de la suite dans la cellule A1. Se placer dans la cellule A2 et y taper l'expression de $u(n+1)$ précédée du signe $=$ et en remplaçant $u(n)$ par A1. Sélectionner et étirer cette cellule au reste de la colonne A. Pour afficher les points correspondants dans un repère, la procédure est identique au cas précédent.

► Calcul formel

L'onglet **Calcul formel** (disponible dans le menu **Affichage**) permet de réaliser des tâches (comme résoudre des équations par exemple) à l'aide des lignes de commande suivantes :

- **NRésoudre**($f(x)=k$) permet de **résoudre** une équation du type $f(x) = k$.
- **Factoriser**($f(x)$) permet de **factoriser** une expression $f(x)$.
- **Dérivée**($f(x)$) permet de déterminer la **dérivée** d'une fonction f .
- **Intégrale**($f(x)$) permet de déterminer une **primitive** d'une fonction f .

► Statistiques à deux variables

Ouvrir l'onglet du tableur, et entrer les valeurs de x_i dans la colonne A, celles de y_i dans la colonne B. Sélectionner les données avec la souris et dans le menu  sélectionner  (Statistiques à deux variables). Valider pour faire apparaître le nuage de points correspondant. Sous le nuage de points, dans le menu **Modèle d'ajustement**, sélectionner **Linéaire** pour faire apparaître la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés. Son équation est donnée sous le nuage de points.

Python est un langage de programmation qui permet d'écrire des algorithmes et de les faire fonctionner, par exemple avec les logiciels Edupython ou Spyder, ou sur les calculatrices Casio Graph 35+EII, NumWorks, et Texas Instrument TI-83 Premium CE Edition Python.

► Manipuler une variable

En Python, les variables peuvent être de plusieurs types. Les plus courants sont les suivants :

- Les nombres **réels**, appelés *flottants* ou *float*.
- Les nombres **entiers**, appelés *integer* ou *int*.
- Les **listes de variables**, appelées *list*, sont délimitées par des crochets et leurs éléments sont ordonnés et séparés par des virgules.
- Les **chaînes de caractères**, appelées *string* ou *str*, qui sont simplement des mots ou des phrases, et sont délimitées par des guillemets ou des apostrophes.

Pour **affecter une valeur à une variable**, ou modifier cette valeur, il suffit de taper le nom de la variable, suivi du symbole = puis de la valeur que l'on veut attribuer à cette variable.

Pour **afficher la valeur d'une variable**, on utilise la commande `print`.

Pour que l'algorithme demande à l'utilisateur **d'entrer manuellement la valeur d'une variable**, on utilise la commande `input()`.

Par défaut, la variable est alors une chaîne de caractères. Pour que la **variable devienne un nombre flottant**, on utilise la commande `float(input())`.

► Manipuler des listes

Pour manipuler des listes, il existe quelques commandes spécifiques :

- La commande `[]` génère une liste vide (c'est-à-dire ne contenant aucun élément).
- La commande `L[k]` renvoie l'élément de rang *k* de la liste *L*. Attention ! En Python, le rang est compté à partir de 0 : ainsi le premier élément d'une liste est l'élément de rang 0, le second est l'élément de rang 1, etc.
- La commande `len(L)` permet d'obtenir le nombre d'éléments d'une liste.
- La commande `sorted(L)` permet d'ordonner les éléments d'une liste dans l'ordre croissant.
- La commande `L+m` permet de fusionner deux listes *L* et *m* (dans cet ordre).
- La commande `del(L[k])` permet de supprimer l'élément de rang *k* de la liste *L*. De même, la commande `del(L[-1])` permet de supprimer le dernier élément d'une liste *L*.

► Instructions conditionnelles

Pour **réaliser une instruction conditionnelle**, aussi appelée **boucle « si ... alors »**, on utilise la commande `if` suivi de la (ou les) condition(s) et de deux points : puis sur les lignes suivantes, on indiquera avec une indentation les instructions à réaliser dans la boucle.

Si **plusieurs conditions** sont nécessaires, elles doivent être séparées par le mot `and`. La boucle s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation. Il est alors possible d'utiliser un « sinon » avec la commande `else` également suivie de deux points et dont les instructions sont également indiquées avec une indentation. Le « sinon » s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation.

► Boucle « tant que »

La réalisation d'une boucle « while », aussi appelée **boucle « tant que »** est similaire : on utilise cette fois la commande `while` suivi de la (ou les) condition(s) et de deux points `:`. Les instructions à réaliser dans la boucle sont indiquées sur les lignes suivantes avec une indentation.

Les différents types de conditions les plus utilisés sont :

- `x==y` est vrai quand `x` est égal à `y`.
- `x!=y` est vrai quand `x` est différent de `y`.
- `x>y` est vrai quand `x` est strictement supérieur à `y`.
- `x>=y` est vrai quand `x` est supérieur ou égal à `y`.

► Boucle « pour »

Pour réaliser une **boucle « for »**, aussi appelée **boucle « pour »**, on utilise la commande `for` suivi de la condition et de deux points `:` puis, sur les lignes suivantes, on indiquera avec une indentation les instructions à réaliser dans la boucle. Il y a deux possibilités pour le nombre de répétitions : on peut simplement utiliser `for i in range(n)` : pour répéter 1 fois les instructions (`i` prenant successivement chaque valeur entière de 0 à $n - 1$), ou alors `for i in range(a,b)` pour répéter les instructions pour chaque valeur entière de `i` entre `a` et `b - 1`. La boucle s'arrêtera dès qu'une ligne est écrite sans indentation.

► Fonctions de programmation

Pour définir une fonction, on utilise la commande `def`, suivie du nom de la fonction et des arguments (s'il y en a) entre parenthèses, puis enfin suivi de deux points `:` les lignes suivantes, avec indentation, indiquent les instructions de la fonction. En particulier, pour retourner un élément, il faut utiliser l'instruction `return` suivi de l'élément à retourner. La définition de la fonction s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation. Pour utiliser une fonction définie, il suffit de taper le nom de la fonction suivi des valeurs des arguments entre parenthèses (s'il y en a).

► Les modules

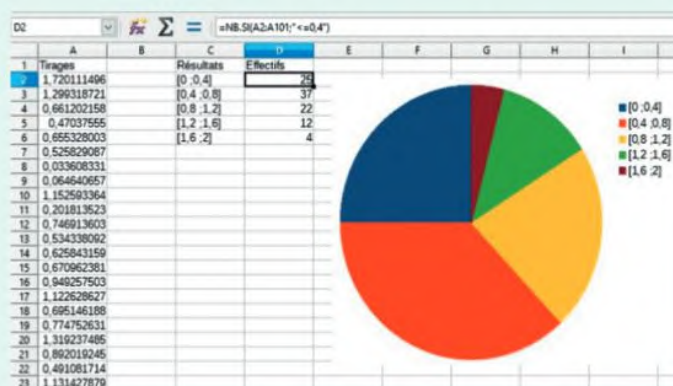
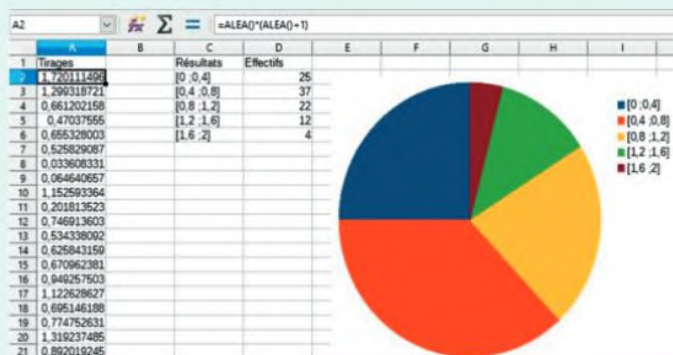
Python permet d'importer des modules contenant des commandes pré-existantes (valeurs de référence, fonctions, etc). Pour importer un module, par exemple le module `math` il faut utiliser la commande `from math import *`. Les deux modules les plus utilisés en classe sont :

- le module `math`, contenant les variables et fonctions mathématiques usuelles (comme par exemple `pi`, ou les fonctions `sin`, `log`, etc).
- le module `random`, contenant les commandes permettant de générer des nombres aléatoires (par exemple, `random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1).

► Manipulation de données

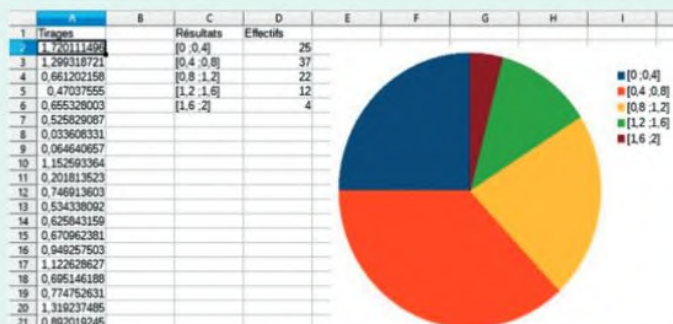
Le tableur permet de manipuler efficacement des données. Outre les opérations classiques, il existe des commandes préexistantes dont voici les plus courantes :

- **=SOMME(A2:A12)** permet de calculer la somme de toutes les valeurs comprises dans la plage s'étendant de la cellule A2 à la cellule A12.
- **=NB.SI(A3:A39;11)** renvoie le nombre de fois que le nombre 11 apparaît dans la plage s'étendant de la cellule A3 à la cellule A39.
- **=RACINE(B3)** renvoie la racine carrée de la valeur située dans la cellule B3.
- **=PUISSANCE(a;b)** renvoie la valeur de a^b .
- **=MOYENNE(C4:C14)** permet de calculer la moyenne des valeurs comprise dans la plage s'étendant de la cellule C4 à la cellule C14.
- **=MEDIANE(B4:B28)** permet de calculer la médiane des valeurs comprise dans la plage s'étendant de la cellule B4 à la cellule B28.
- **=MIN(A2:C19)** et **=MAX(A2:C19)** renvoient la valeur minimale et la valeur maximale présente dans la plage s'étendant de la cellule A2 à la cellule C19.
- **=ALEA()** renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
- **=ALEA.ENTRE.BORNES(3;37)** renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 3 et 37 (inclus).
- **=SI(C2=3;1;0)** renvoie 1 si la valeur dans la cellule C2 est 3, et 0 sinon.



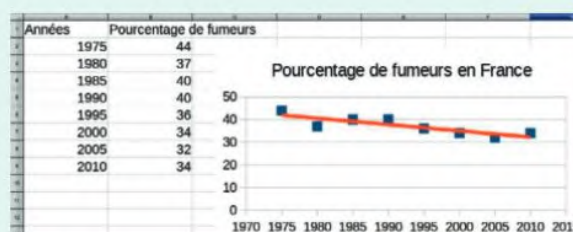
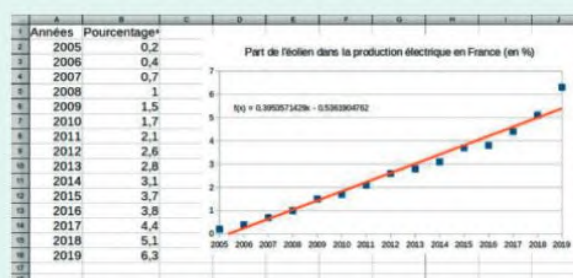
► Représentation de données

Pour représenter des données sous forme de graphique, il suffit de les sélectionner, puis, dans le menu **Insertion**, sélectionner **Graphique**. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, il convient de choisir le type de graphique souhaité (diagramme circulaire, nuage de points, etc.) en veillant éventuellement à indiquer quelle plage de donnée doit être utilisée en abscisse et en ordonnée. Enfin, valider pour afficher le graphique.



► Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

Après avoir créé un nuage de points (comme indiqué ci-dessus), pour afficher une droite d'ajustement affine il faut sélectionner le graphique, et dans le menu **Insertion** sélectionner **Courbe de tendance** et choisir le type **Linéaire**. La droite d'ajustement affine s'affiche alors automatiquement sur la graphique existant.



1 Suites numériques

Vérifier les acquis de Première



1. d 2. a 3. c 4. c 5. c 6. d

Exercices

Pour commencer

- 29** 1. $u_{n+1} = u_n + r = u_n + 10$.
 2. $u_2 = u_1 + 10 = -80 + 10 = -70$.
 $u_3 = u_2 + 10 = -70 + 10 = -60$.
 $u_4 = u_3 + 10 = -60 + 10 = -50$.
 3. $u_n = u_1 + (n-1)r = -80 + 10(n-1) = -80 + 10n - 10 = 10n - 90$.
 4. $u_7 = 10 \times 7 - 90 = -20$.
 $u_{10} = 10 \times 10 - 90 = 10$.
 $u_{14} = 10 \times 14 - 90 = 50$.
 5. On résout $u_n = 80$, soit $10n - 90 = 80$. On obtient $10n = 170$, ce qui donne $n = 17$.

- 33** 1. $u_0 = 7 - 3 \times 0 = 7$.
 $u_1 = 7 - 3 \times 1 = 4$.
 $u_2 = 7 - 3 \times 2 = 1$.
 2. $u_1 - u_0 = 4 - 7 = -3$.
 $u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.
 $u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 7$.
 3. La suite ayant comme premier terme u_0 , le 51^e terme est donc u_{50} .
 $u_{50} = 7 - 3 \times 50 = -143$.
 4. on cherche : $\sum_{k=0}^{50} u_k = \frac{51}{2}(u_0 + u_{50}) = 25 \times (7 - 143) = -3\,400$.

- 35** 1. (u_n) est de raison $r = 150$ et de premier terme $u_0 = 6\,500$.
 Donc $u_n = u_0 + nr = 6\,500 + 150n$.
 2. $2025 = 2018 + 7$. On recherche donc u_7 .
 $u_7 = 6\,500 + 150 \times 7 = 7\,550$.
 En 2025, le loyer à l'année coûtera 7 550 €.
 3. On cherche : $S = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{11}{2}(u_0 + u_{10})$
 avec $u_{10} = 6\,500 + 150 \times 10 = 8\,000$.
 Donc $S = \frac{11}{2}(6\,500 + 8\,000) = 79\,750$.
 4. À la calculatrice, on obtient $n = 24$.
 Vérification : $S' = \sum_{k=0}^{23} u_k = \frac{24}{2}(u_0 + u_{23})$
 avec $u_{23} = 6\,500 + 150 \times 23 = 9\,950$.
 Donc $S' = 12 \times (6\,500 + 9\,950) = 197\,400$.
 Et $S'' = \sum_{k=0}^{24} u_k = \frac{25}{2}(u_0 + u_{24})$
 avec $u_{24} = 6\,500 + 150 \times 24 = 10\,100$.
 Donc $S'' = 12,5 \times (6\,500 + 10\,100) = 207\,500$.

- 38** 1. $u_1 = q \times u_0 = 1,054 \times 300 = 316,2$.
 $u_2 = q \times u_1 = 1,054 \times 316,2 = 333,2748$.
 2. $u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 1,054^n$.
 3. a. Une augmentation de 50 % revient à une multiplication par $1 + \frac{50}{100}$, soit 1,5 et $1,5 \times 300 = 450$.

Tantque $u < 450$
 $n \leftarrow n + 1$
 $u \leftarrow 1,054 \times u$

- b. $u = 456,93$ et $n = 2025$.
 En 2025, la masse totale aura augmenté de 50 %. Elle sera de 456,93 millions de tonnes.

- 45** 1. $u_1 = q \times u_0 = 3 \times 7 = 21$.
 $u_2 = q \times u_1 = 3 \times 21 = 63$.
 $u_3 = q \times u_2 = 3 \times 63 = 189$.
 2. $u_n = u_0 \times q^n = 7 \times 3^n$. Donc $u_9 = 7 \times 3^9 = 137\,781$.
 3. $S = \sum_{k=0}^9 u_k = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 7 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 206\,668$.
 4. $S = \sum_{k=1}^7 u_k = \sum_{k=0}^7 u_k - u_0 = u_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} - u_0$
 $= 7 \times \frac{1-3^8}{1-3} - 7 = 22\,953$.

Pour s'entraîner

- 48** 1. On lit $u = 5$ et $u = u + 4$ dans la boucle « for ». Donc (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 5$.
 2. On obtient la valeur des 10 termes après u_0 de la suite (u_n) .
 3. $u_n = u_0 + nr = 5 + 4n$.
 4. $u_{15} = 5 + 4 \times 15 = 65$.
 5. for n in range(15).

- 52** 1. La consommation est de 140 cigarettes par jour. En diminuant la consommation de 4 cigarettes par semaine, la consommation de la semaine suivante est $140 - 4 = 136$ cigarettes puis $136 - 4 = 132$ cigarettes la semaine d'après. 140, 136 et 132 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison -4 .
 2. $u_0 = 140$ et $r = -4$.
 3. $u_5 = u_0 + 5r = 140 - 4 \times 5 = 120$.
 Au bout de 5 semaines d'efforts, Rémy fume 120 cigarettes.
 4. $u_n = 0$ si et seulement si $140 - 4n = 0$.
 On a alors : $140 = 4n$ ce qui donne $n = 35$.
 Au bout de 35 semaines, Rémy aura arrêté de fumer.
 5. On recherche la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{35}$.
 $\sum_{k=0}^{35} u_k = \frac{36}{2}(u_0 + u_{35}) = \frac{36}{2}(140 + 0) = 2\,520$.
 Entre le moment où Rémy a décidé d'arrêter de fumer et le moment où il a réussi, il aura consommé 2 520 cigarettes.

- 55** 1. La masse d'EMPCS recyclés est passée de 229 à 282 entre 2011 et 2016 soit une évolution de :
 $\frac{282 - 229}{229} \times 100 = \frac{5\,300}{229} \approx 23\%$.
 2. Le coefficient multiplicateur global associé à la hausse de 23 % entre 2011 et 2016 est $C = 1,23$.
 Soit c le coefficient multiplicateur moyen durant ces 5 années alors on a $c^5 = C$.
 Donc $c = C^{\frac{1}{5}} \approx 1,0423$.
 Le taux d'évolution annuel moyen sur cette période est donc une hausse d'environ 4,23 %.
 3. $243 - 229 = 14$ et $250 - 243 = 7$.
 Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$\frac{243}{229} \neq \frac{250}{243}$. Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.

4. La masse d'EMPCS augmente de 4,2 % par an, elle est donc multipliée par le coefficient multiplicateur associé à cette hausse soit 1,042.

On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q=1,042$ et de 1^{er} terme $u_0 = 282$.

5. $u_n = u_0 \times q^n = 282 \times 1,042^n$.

5. $2019 = 2016 + 3$ donc l'année 2019 est de rang $n = 3$.

On a : $u_3 = 282 \times 1,042^3 \approx 319$ et on peut donc en déduire une masse d'EMPCS recyclés d'environ 319 000 de tonnes en 2019.

57 1. Pour augmenter un nombre de 6 %, on le multiplie par $1 + \frac{6}{100} = 1,06$ donc $d_1 = 1,06 \times d_0 = 10,6$.

2. Pour la même raison qu'à la question précédente, on montre que pour tout entier naturel n ,

$d_{n+1} = \left(1 + \frac{6}{100}\right) d_n = 1,06 d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q=1,06$ et de premier terme $d_0 = 10$.

3. Pour tout entier naturel n , $d_n = d_0 \times q^n = 10 \times 1,06^n$.

4. La distance qu'Alice pourra parcourir en septembre 2019 est $d_8 = 10 \times 1,06^8 = 15,9$ km arrondi à 0,1 km.

5. On cherche n tel que $d_n > 25$, soit $10 \times 1,06^n > 25$.

On obtient alors $1,06^n > 2,5$. En utilisant la fonction logarithme népérien, $n \times \ln 1,06 > \ln 2,5$.

On a alors : $n > \frac{\ln 2,5}{\ln 1,06}$, soit $n > 16$

Alice sera capable de courir en une fois 25 km au bout de 16 mois.

59 1. $u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 20\,000 \times 0,85 = 17\,000$.

Le nombre de mégots dans la rue principale en 2020 sera 17 000.

2. a. $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85 \times u_n$, (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 20\,000$.

b. $u_n = 20\,000 \times 0,85^n$ pour tout entier naturel n .

c. On cherche n tel que $2028 = 2019 + n$ soit $n = 9$.

$u_9 = 20\,000 \times 0,85^9$. 4 633 mégots seront jetés en 2028.

3. a. Le maire doit calculer : $S = \sum_{k=0}^9 u_k$.

b. $S = u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 20\,000 \times \frac{1 - 0,85^{10}}{1 - 0,85} \approx 107\,084$.

En 10 ans, 107 084 mégots auront été ramassés.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

61 FAUX

$u_4 = 81$; $u_3 = u_4 - 3 = 81 - 3 = 78$; $u_2 = u_3 - 3 = 78 - 3 = 75$; $u_1 = u_2 - 3 = 75 - 3 = 72$.

Donc $u_0 = u_1 - 3 = 72 - 3 = 69$.

62 VRAI

$u_n = u_0 + nr = 69 + 3n$.

63 FAUX

$u_{10} = 69 + 3 \times 10 = 99$.

64 FAUX

$$\sum_{k=0}^{20} u_k = \frac{21}{2} (u_0 + u_{20}).$$

$$u_{20} = 69 + 3 \times 20 = 129.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{20} u_k = \frac{21}{2} (69 + 129) = 2079.$$

65 VRAI

$$v_1 = 6 ; v_2 = 6 \times 1,2 = 7,2 ; v_3 = 7,2 \times 1,2 = 8,64 ;$$

$$v_4 = 8,64 \times 1,2 = 10,368 ; v_5 = 10,368 \times 1,2 = 12,4416.$$

$$\text{Donc } v_6 = 12,4416 \times 1,2 = 14,92992.$$

$$\text{Au dixième, } v_6 = 14,9.$$

66 FAUX

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 6 \times 1,2^{n-1}.$$

67 FAUX

$$v_8 = 6 \times 1,2^7 = 21,4990848. \text{ Au dixième, } v_8 = 21,5.$$

68 VRAI

$$\sum_{k=1}^{10} v_k = v_1 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 6 \times \frac{1 - 1,2^{10}}{1 - 1,2}.$$

$$\text{Au centième, } \sum_{k=1}^{10} v_k = 155,75.$$

QCM

69 Réponse a.

On cherche u_1 car $2018 = 2017 + 1$.

$$u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = u_0 \times 0,97 = 300 \times 0,97 = 291.$$

70 Réponse c.

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = u_n \times 0,97.$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,97$.

71 Réponse b.

$$u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 0,97^n.$$

72 Réponse b.

$$2\,017 + 10 = 2\,027.$$

73 Réponse b.

$$u_{10} = 300 \times 0,97^{10}. \text{ À l'unité près, } u_{10} = 221.$$

74 Réponse c.

En étirant vers le bas, on saisira =B2*0,97.

2 Fonction inverse

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM

1. c

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

2. b

$147 > 14,8 > 1,49$. La fonction inverse est strictement décroissante

sur $]0 ; +\infty[$ donc $\frac{1}{147} < \frac{1}{14,8} < \frac{1}{1,49}$.

3. b

La fonction f est une fonction affine.

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0,5$. La fonction f s'annule donc en 0,5.

$a = 2$ et 2 est strictement positif donc $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0,5$.

Le tableau de signe de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

4. c

La fonction f est une fonction affine.

$-0,1x + 4 = 0 \Leftrightarrow -0,1x = -4 \Leftrightarrow x = 40$. La fonction f s'annule donc en 40.

$a = -0,1$ et $-0,1$ est strictement négatif

donc $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 40$.

Le tableau de signe de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	40	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

5. b

La fonction f est une fonction polynôme de degré 2.

$f(x) = 0,5(x - (-2))(x - (-6))$ donc ses racines sont -2 et -6 .

La fonction f s'annule donc en -2 et en -6 .

$a = 0,5$ et $0,5$ est strictement positif donc la fonction f est strictement positive sauf sur l'intervalle $]-6; -2[$.

Le tableau de signes de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

6. a

La fonction f est une fonction polynôme de degré 2.

$f(x) = -2(x - 3)(x - (-1))$ donc ses racines sont 3 et -1 . La fonction f s'annule donc en 3 et en -1 .

$a = -2$ et -2 est strictement négatif donc la fonction f est strictement négative sauf sur l'intervalle $]-1; 3[$.

Le tableau de signes de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercices

Pour commencer

18 1. $f(x) = 4 + (-39) \times \frac{1}{x}$.

2. D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -39 \times \frac{1}{x} = -39 \times 0 = 0$

et donc que $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 + (-39) \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 + 0 = 4$.

D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} -39 \times \frac{1}{x} = +\infty$.

et donc que $\lim_{x \rightarrow 0} 4 + (-39) \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

20 1. Graphiquement, on lit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$2. f(x) = -\frac{8}{x} = -8 \times \frac{1}{x}.$$

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -8 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -8 \times 0 = 0$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} -8 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} -8 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -8 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -8 \times 0 = 0$.

30 a. $f(x) = x - 100 + \frac{6400}{x} = x - 100 + 6400 \times \frac{1}{x}$.

$$\text{Donc } f'(x) = 1 + 6400 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{6400}{x^2} = \frac{x^2 - 6400}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 80^2}{x^2} = \frac{(x - 80)(x + 80)}{x^2} = (x - 80) \frac{x + 80}{x^2}.$$

b. $f(x) = 2x - 3 + \frac{50}{x} = 2x - 3 + 50 \times \frac{1}{x}$.

$$\text{Donc } f'(x) = 2 + 50 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2} = \frac{2(x^2 - 25)}{x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 5^2)}{x^2} = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2} = 2(x - 5) \frac{x + 5}{x^2}.$$

35 1. $f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2 = 4 \times \frac{1}{x} + 2x^2$.

$$\text{Donc } f'(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 \times 2x = -\frac{4}{x^2} + 4x = \frac{-4 + 4x^3}{x^2}.$$

$$\text{Or, } \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} = \frac{(4x-4)(x^2+x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 4}{x^2} = \frac{-4 + 4x^3}{x^2}.$$

$$\text{Donc on a bien } f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}.$$

2. Sur $]0; +\infty[$, $4 > 0$, $x^2 + x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

Et, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

3. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

36 1. $f(x) = x^3 + 11x - 7 - \frac{9}{x} = x^3 + 11x - 7 - 9 \times \frac{1}{x}$.

$$\text{Donc } f'(x) = 3x^2 + 11 \times 1 - 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + 11 + \frac{9}{x^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 11x^2 + 9}{x^2}.$$

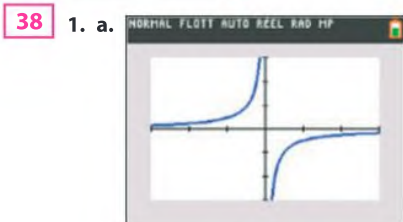
2. Sur $] -\infty; 0[$, $3x^4 > 0$, $11x^2 > 0$ et $9 > 0$

donc $3x^4 + 11x^2 + 9 > 0$.

De plus, sur $] -\infty; 0[$, $x^2 > 0$.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ sur $] -\infty; 0[$ et la fonction f est donc bien strictement croissante sur $] -\infty; 0[$.

Pour s'entraîner



D'après la calculatrice, on conjecture :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b. La droite d'équation $y = 0$ (autrement dit l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ (autrement dit l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

2. $f(x) = -\frac{12}{x} = -12 \times \frac{1}{x}$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -12 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -12 \times 0 = 0$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} -12 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} -12 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -12 \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -12 \times 0 = 0$.

45 1. $f(x) = 2 - 0,1x - \frac{0,025}{x} = 2 - 0,1x - 0,025 \times \frac{1}{x}$
 Donc $f'(x) = 0 - 0,1 \times 1 - 0,025 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -0,1 + \frac{0,025}{x^2}$

$$= \frac{-0,1x^2 + 0,025}{x^2}$$

$$= \frac{-0,1(x^2 - 0,25)}{x^2}$$

$$= \frac{-0,1(x^2 - 0,5^2)}{x^2}$$

$$= \frac{-0,1(x - 0,5)(x + 0,5)}{x^2}$$

2. Sur $[0, 1; 10]$, $x + 0,5 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0,1(x - 0,5)$.

Et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -0,1(x - 0,5) \geq 0 \Leftrightarrow x - 0,5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0,5$.

D'où :

x	0,1	0,5	1
f'(x)	+	0	-
f(x)	1,74	1,9	1,875

47 $f(x) = 5 - \frac{10}{x} = 5 - 10 \times \frac{1}{x}$

Donc $f'(x) = 0 - 10 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{10}{x^2}$.

Or, sur $[1; 10]$, $10 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[1; 10]$.

De plus, $f(1) = 5 - \frac{10}{1} = 5 - 10 = -5$ et $f(10) = 5 - \frac{10}{10} = 5 - 1 = 4$.

Le tableau de variation donné par l'énoncé est donc bien validé.

49 1. $c(v) = 0,06v + \frac{150}{v} = 0,06v + 150 \times \frac{1}{v}$.

Donc $c'(v) = 0,06 \times 1 + 150 \times \left(-\frac{1}{v^2}\right) = 0,06 - \frac{150}{v^2}$

$$= \frac{0,06v^2 - 150}{v^2} = \frac{0,06(v^2 - 2500)}{v^2} = \frac{0,06(v^2 - 50^2)}{v^2}$$

$$= \frac{0,06(v - 50)(v + 50)}{v^2}$$

2. Sur $[10; 130]$, $0,06 > 0$, $v + 50 > 0$ et $v^2 > 0$ donc $c'(v)$ est du signe de $v - 50$. Et, $c'(v) \geq 0 \Leftrightarrow v - 50 \geq 0 \Leftrightarrow v \geq 50$.

D'où :

v	10	50	130
c'(v)	-	0	+
c(v)	15,6	6	$\frac{582}{65}$

3. a. Pour que sa consommation en essence soit minimale, ce véhicule doit rouler à 50 km·h⁻¹.

b. Sa consommation minimale est 6 litres.

51 1. L'extension est un rectangle donc son aire est égale à xy . On sait également que cette aire est égale à 722.

On a donc : $xy = 722$; d'où $y = \frac{722}{x}$.

2. a. $l(x) = x + 2y = x + 2 \times \frac{722}{x} = x + \frac{1444}{x}$.

b. $l(x) = x + \frac{1444}{x} = x + 1444 \times \frac{1}{x}$.
 Donc $l'(x) = 1 + 1444 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1444}{x^2} = \frac{x^2 - 1444}{x^2}$

$$= \frac{x^2 - 38^2}{x^2} = \frac{(x - 38)(x + 38)}{x^2}$$

c. Sur $[20; 60]$, $x + 38 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 38$. Et, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 38 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 38$.

D'où :

x	20	38	60
l'(x)	-	0	+
l(x)	92,2	76	$\frac{1261}{15}$

d. La longueur de la clôture est donc minimale lorsque $x = 38$. On a alors $y = \frac{722}{38} = 19$. Les dimensions de l'extension rendant la longueur de la clôture minimale sont donc 38 mètres et 19 mètres.

La longueur minimale de la clôture est 76 mètres. Le prix, en euros, du grillage de la clôture est donc $76 \times 15 = 1\,140$ et celui du goudron du sol est $722 \times 25 = 18\,050$. Or, $1\,140 + 18\,050 = 19\,190$ donc le prix à payer par le responsable de la jardinerie pour cette extension est 19 190 €.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

53 VRAI

$$f(x) = 24 \times \frac{1}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 24 \times 0 = 0.$$

54 FAUX

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + 8 = 8.$$

55 FAUX

$$f(x) = -6 \times \frac{1}{x} \text{ donc } f'(x) = -6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{6}{x^2}.$$

56 FAUX

$$f(x) = 8x - 5 + 2 \times \frac{1}{x} \\ \text{donc } f'(x) = 8 \times 1 + 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 8 - \frac{2}{x^2} = \frac{8x^2 - 2}{x^2}.$$

57 VRAI

$$f(x) = x^2 + 7x - 4 + 9 \times \frac{1}{x} \\ \text{donc } f'(x) = 2x + 7 \times 1 + 0 + 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + 7 - \frac{9}{x^2} \\ = \frac{2x^3 + 7x^2 - 9}{x^2}. \\ \text{Or, } \frac{(x+3)(2x^2+x-3)}{x^2} = \frac{2x^3+x^2-3x+6x^2+3x-9}{x^2} \\ = \frac{2x^3+7x^2-9}{x^2}.$$

QCM

58 1. Réponse **b**.

$$f(x) = -11 \times \frac{1}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -11 \times 0 = 0.$$

2. Réponse **a**.

$$f(x) = -11 \times \frac{1}{x} \text{ donc } f'(x) = -11 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{11}{x^2}.$$

3. Réponse **a**.

Sur $]0; +\infty[$, $11 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$; la fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

59 1. Réponse **b**.

$$f(x) = 0,01x + 1 + 9 \times \frac{1}{x} \\ \text{donc } f'(x) = 0,01 \times 1 + 0 + 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,01 - \frac{9}{x^2} = \frac{0,01x^2 - 9}{x^2}.$$

Les réponses **a**, et **c**, sont donc impossibles.

$$\text{Vérification : } \frac{0,01(x-30)(x+30)}{x^2} = \frac{0,01(x^2-900)}{x^2} \\ = \frac{0,01x^2-9}{x^2}.$$

2. Réponse **c**.

Sur $\mathbb{R}^*$, le dénominateur x^2 est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 0,01(x-30)(x+30)$.

La fonction g est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 30 et -30.

La fonction g (et donc la fonction f') s'annule donc en -30 et en 30. $a = 0,01$ et 0,01 est strictement positif donc la fonction g (et donc la fonction f') est strictement positive sauf sur l'intervalle $] -30; 30[$.

On a donc :

x	$-\infty$	-30	0	30	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f					

60 1. Réponse **a**.

$$f(x) = 0,5x^2 - 7,5x + 32 \times \frac{1}{x} \\ \text{donc } f'(x) = 0,5 \times 2x - 7,5 \times 1 + 32 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ = x - 7,5 - \frac{32}{x^2} = \frac{x^3 - 7,5x^2 - 32}{x^2}.$$

Les réponses **b**, et **c**, sont donc impossibles.

Vérification :

$$\frac{(x-8)(x^2+0,5x+4)}{x^2} = \frac{x^3+0,5x^2+4x-8x^2-4x-32}{x^2} \\ = \frac{x^3-7,5x^2-32}{x^2}.$$

2. Réponse **c**.

Sur $]1; 10[$, le dénominateur x^2 et le facteur $x^2 + 0,5x + 4$ sont strictement positifs donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = x - 8$.

La fonction g est une fonction affine.

$x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$. La fonction g (et donc la fonction f') s'annule donc en 8.

$a = 1$ et 1 est strictement positif donc $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 8$ (et donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 8$).

On a donc :

x	1	8	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(1)$	$f(8)$	$f(10)$

3. Réponse **b**.

D'après le tableau de variation précédent, la fonction f admet un minimum en 8.

3 Fonctions exponentielles de base a

Vérifier les acquis de Première

QCM

1. c

2. b

3. d

4. c

5. d

Exercices

Pour commencer

28 u_n est une suite géométrique de raison $0,75 < 1$ et de premier terme 1 donc u_n est une suite décroissante.

35 $f(x) = ka^x$ et $f(0) = 1$ donc $k = 1$.

La base $a = 0,1$ donc $f(x) = (0,1)^x$.

38 $f(-1,5) = 2 \times (0,75)^{-1,5} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ et $f(2,5) = \frac{9\sqrt{3}}{16}$.
 $g(-1,5) = -3(1,2)^{1,5} = \frac{-18\sqrt{3}}{25}$ et $g(2,5) = -3(1,2)^{-2,5} = -1,9018$.

53 $f(1) \times f(-2,5) \times f(3) = 2,1 \times 2,1^{-2,5} \times 2,1^3$
 $= 2,1^{1-2,5+3} = 2,1^{1,5}$.

64 a. $a = \frac{1}{0,25} > 1$ et $k > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $a = \frac{1}{0,87} > 1$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

71 1. $f(-1) = 5$ et $f(0) = 1,5$.
 $f(-1) = \frac{k}{a} = 5$ et $f(0) = k = 1,5$ donc $a = \frac{k}{5} = 0,3$.
Donc $k = 1,5$ et $a = 0,3$.
2. On a : $f(x) = 1,5(0,3)^x$.
Soit $f(1) = 0,45$ et $f(3,5) = 0,0221$.

84 $(1+x) = 5,5^{1/5}$ donc $x = 5,5^{0,2} - 1$.

Pour s'entraîner

90 1. f est croissante ($a = 1,05 > 1$) et g est décroissante ($a = \frac{1}{1,05} < 1$) sur $[10; 30]$.

2. Le prix d'équilibre est solution de l'équation $f(x) = g(x)$
soit $1,05^x = 7(1,05)^{-x}$
d'où $((1,05)^2)^x = 7$
soit $(1,025)^x = 7$.

3. À la calculatrice, on obtient $x = 19,94$ € et la quantité d'équilibre est : $f(19,94) = g(19,94) = 2,645$.

92 1. $f(2) = 25\,000 \times (1,1)^2 = 30\,250$ et $f(4,5) = 38\,389$.
2. Sur $[0; 8]$, f est croissante car $25\,000 > 0$ et $1,1 > 1$.
3. Il faut résoudre $f(x) = 50\,000$ soit $(1,1)^x = 2$ et $x = 7,27$ h soit 7 h 16 min.

93 1. $f(0) = -0,01$
 $f(1) = -0,003$
 $f(-2) = -0,11$
2. $f(x) = (0,3)^x(0,3^2 + 3 \times 0,3 - 1) = (0,3)^x(-0,01)$.
3. On peut en déduire que f est négative car $-0,01 < 0$ et que f est croissante car $0,3 < 1$.

101 1. $f(0) = 21\,345(1,2)^0 = 21\,345$; correspond à la cote de la voiture le 1^{er} avril 2015.
 $f(1) = 21\,345(1,2)^{-1} = 17\,787,5$; correspond à la cote de la voiture le 1^{er} avril 2016.
2. Taux de diminution annuel de la valeur de la voiture = $\frac{17\,787,5 - 21\,345}{21\,345} \times 100 = -16,66\%$.
3. a. $21\,345 \times (1,2)^{-4,5} = 9\,396,81$ euros.
Taux de diminution depuis achat = $\frac{9\,396,81}{21\,345} \times 100 = 44\%$.
b. $T = 100((0,44)^{1/54} - 1) = -1,5\%$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 107 VRAI | 112 VRAI |
| 108 VRAI | 113 FAUX |
| 109 VRAI | 114 FAUX |
| 110 VRAI | 115 FAUX |
| 111 VRAI | 116 VRAI |

QCM

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 117 Réponse b. | 121 Réponse c. |
| 118 Réponse a. | 122 Réponse c. |
| 119 Réponse b. | 123 Réponse b. |
| 120 Réponse b. | |

4 Fonction logarithme décimal

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM

1. a 2. b 3. b 4. a 5. c 6. a 7. b

Exercices

Pour commencer

28 a. $\log(0,000\,1) = \log(10^{-4}) = -4$.
b. $\log(0,000\,01) = \log(10^{-5}) = -5$.
c. $\log(0,000\,000\,01) = \log(10^{-8}) = -8$.
d. $\log(10^{-9}) = -9$.

30 Comme $0,001 < 0,01 < 1,001 < 1,1$ et que la fonction logarithme décimale est croissante sur $]0; +\infty[$, alors on a :
 $\log(0,001) < \log(0,01) < \log(1,001) < \log(1,1)$.

39 a. $\log(0,5) = \log(5 \times 10^{-1}) = \log(5) + \log(10^{-1})$
 $= \log(5) + (-1) \approx 0,7 - 1 \approx -0,3$.
b. $\log(0,05) = \log(5 \times 10^{-2}) = \log(5) + \log(10^{-2})$
 $= \log(5) + (-2) \approx 0,7 - 2 \approx -1,3$.
c. $\log(25) = \log(5^2) = 2\log(5) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$.
d. $\log(500) = \log(5 \times 100) = \log(5 \times 10^2) = \log(5) + \log(10^2)$
 $= \log(5) + 2 \approx 0,7 + 2 \approx 2,7$.

41 a. $\log(a^3) = 3 \times \log(a)$.
b. $\log(a^5) - \log(a^2) = 5\log(a) - 2\log(a)$
 $= 3\log(a)$.
c. $\log(a^{-3}) + \log(a^2) = \log\left(\frac{1}{a^3}\right) + \log(a^2) = -\log(a^3) + \log(a^2)$
 $= -\log(a)$.
d. $\log(10a^5) = \log(10) + \log(a^5)$
 $= 1 + 5\log(a)$.

48 a. $3^x = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout x réel, $3^x > 0$. $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

b. $2 \times 3^x = 20 \Leftrightarrow 3^x = 10$

$$\Leftrightarrow \log(3^x) = \log(10)$$

$$\Leftrightarrow \log(3^x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x \log(3) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(3)} \text{ soit } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{\log(3)} \right\}.$$

Pour s'entraîner

60 a. $0,001\,47 = 147 \times 10^{-5} = 3 \times 7^2 \times 10^{-5}$.

On a donc $\log(0,001\,47) = \log(3 \times 7^2 \times 10^{-5})$

$$= \log(3) + \log(7^2) + \log(10^{-5})$$

$$= \log(3) + 2\log(7) - 5.$$

b. $11\,907 = 81 \times 147 = 3^5 \times 7^2$.

On a donc : $\log(11\,907) = \log(3^5 \times 7^2) = \log(3^5) + \log(7^2)$.

D'où $\log(11\,907) = 5\log(3) + 2\log(7)$.

c. $2\,700 \times 490 = 3^3 \times 10^2 \times 7^2 \times 10 = 3^3 \times 7^2 \times 10^3$.

On a donc : $\log(2\,700 \times 490) = \log(3^3 \times 7^2 \times 10^3)$

$$= \log(3^3) + \log(7^2) + \log(10^3)$$

$$= 3\log(3) + 2\log(7) + 3.$$

61 1. $M = 0$ donc $k = 2,5\log(E_0)$.

2. $M = -2,5\log(E) + 2,5\log(E_0) = -2,5(\log(E) - \log(E_0))$

$$= -2,5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

3. a. Si l'étoile est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga, son éclat est donc plus grand que celui de Véga. On a donc : $E > E_0$.

$$\frac{E}{E_0} > 1 \text{ donc } \log\left(\frac{E}{E_0}\right) > 0, \text{ d'où } M < 0.$$

La magnitude apparente est donc négative.

b. La magnitude de Véga est nulle donc la magnitude de cette étoile est inférieure à celle de Véga.

4. Magnitude Vénus : $-4,6$ à $0,1$ près.

Magnitude de Mars : $-2,3$ à $0,1$ près.

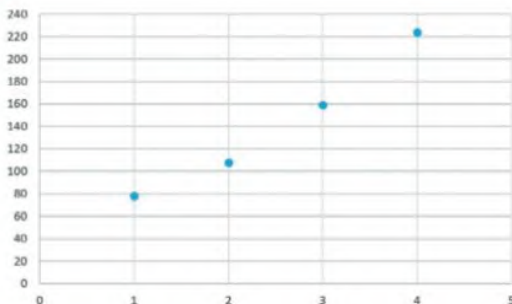
Magnitude de Neptune : $7,9$ à $0,1$ près.

5. Éclat du soleil : environ $10^{10,72} \times E_0 \approx 5,25 \times 10^{10} E_0$.

Éclat de la pleine lune : environ $10^{5,04} \times E_0 \approx 1,1 \times 10^5 E_0$

Éclat d'Uranus : environ $10^{-2,28} \times E_0 \approx 5,25 \times 10^{-3} E_0$

67 1.



2. a.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$ arrondi à l'unité près	77	110	158	226	323

b. D'après le tableau, on peut prévoir 323 couverts la cinquième semaine.

$$3. a. 54 \times (1,43)^x > 810 \Leftrightarrow (1,43)^x > \frac{810}{54}$$

$$\Leftrightarrow x \log(1,43) > \log\left(\frac{810}{54}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\log\left(\frac{810}{54}\right)}{\log(1,43)}$$

soit $x > 7,57$ environ (à $0,01$ près).

b. D'après la question précédente, le gérant commencera à refuser des clients à partir de la 8^e semaine.

4.

```
from math import *
def f(x):
    return 54*1.43**x
x=1
while f(x)<=810:
    x=x+1
print('Le gérant commencera à refuser des clients au bout de',x,'semaines.')
```

70 1. Si le pH augmente, alors la concentration en ions oxonium diminue.

2.

Solution	pH	Solution acide, basique, neutre	$[H_3O^+]$
Soude	14	Basique	10^{-14}
Acide chlorhydrique	0 (très proche de)	Acide	1
Eau de javel	11,5	Basique	$10^{-11,5}$
Eau distillée	7	Neutre	10^{-7}
Café	5	Acide	10^{-5}
Acide gastrique	2	Acide	10^{-2}
Salive humaine	6,5	Acide	$10^{-6,5}$

3. $pH = 2,7$ donc $[H_3O^+] = 10^{-2,7} \approx 2 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

4. $pH = 5$.

5. a. Ce programme permet de calculer le pH d'une solution dont la concentration en ions oxonium est donnée.

b. L'instruction « round » permet de donner l'arrondi d'un résultat, ici à l'unité près.

72 1. $N + 1 = 2^{43\,112\,609}$ donc $\log(N + 1) = 43\,112\,609 \times \log(2)$.

2. La calculatrice donne $43\,112\,609 \times \log(2) \approx 12\,978\,188,5$.

La partie entière de $\log(N + 1)$ est donc égale à $12\,978\,188$.

3. $p = \text{ENT}(\log(N + 1)) + 1 = 12\,978\,189$. L'écriture décimale de $N + 1$ comporte $12\,978\,189$ chiffres.

4. N a le même nombre de chiffres que $N + 1$ donc l'écriture décimale de N comporte aussi $12\,978\,189$ chiffres.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

75 FAUX

Elle est définie sur $]0; +\infty[$.

76 VRAI

La fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$.

77 FAUX

$10\log(2) = \log(2^{10}) = \log(1\,024)$ qui est supérieur à $\log(20)$, car la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$.

78 VRAI

$$\log(1\,000) = \log(10^3).$$

79 VRAI

$$\log(2^{2^{020}}) = \log(2^{2 \times 10^{10}}) = \log((2^2)^{10^{10}}) = 1\,010 \log(4).$$

80 VRAI

$$0,5 < 1 \text{ d'où } \log(0,5) < \log(1) \text{ soit } \log(0,5) < 0.$$

81 VRAI

$\sqrt{3} < 3$ et la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$.

82 VRAI

$$5^{3 \times 1 - 1} = 5^2 = 25.$$

83 VRAI

$$3^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

84 VRAI

$$\begin{aligned} \log(0,0002) &= \log(2 \times 10^{-4}) = \log(2) + \log(10^{-4}) \\ &= \log(2) - 4 > 0,3 - 4 > -3,7. \end{aligned}$$

85 FAUX

$$\log(200) = \log(20 \times 10) = \log(20) + \log(10) = \log(20) + 1.$$

86 FAUX

$$\log(300) = \log(3 \times 100) = \log(3) + \log(100) = \log(3) + 2 \approx 2,5.$$

QCM

87 Réponse b.

90 Réponse a.

88 Réponse d.

91 Réponse b.

89 Réponse a.

5 Statistiques à deux variables quantitatives

Vérifier les acquis de Première

QCM

1. c

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 3}{0 + 1} = -5 \text{ donc l'équation réduite de (AB) s'écrit}$$

$$y = -5x + b. B(0; -2) \in (AB) \text{ssi } -2 = -5 \times 0 + b \text{ssi } b = -2.$$

Donc l'équation réduite de la droite (AB) est $y = -5x - 2$.

2. d

Dans l'équation $y = 1,5x - 2$, l'ordonnée à l'origine est $b = -2$ donc la droite cherchée coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -2 ; ce qui élimine les droites D_2 et D_3 . Il reste donc les droites D_1 et D_4 . De plus, le coefficient directeur est $a = 1,5$ qui est strictement positif; ce qui élimine la droite D_1 .

La droite ayant pour équation réduite $y = 1,5x - 2$ est donc la droite D_4 .

3. b

$$\text{Si } x = 3 \text{ alors } y = -2,4 \times 3 + 5,1 = -2,1.$$

4. b

$$0,2x - 6,2 = 4,3 \Leftrightarrow 0,2x = 10,5 \Leftrightarrow x = 52,5.$$

5. d

$$\bar{x} = \frac{23 + 26 + 20 + 45 + 51 + 39}{6} = 34.$$

Exercices

Pour commencer

21 1.

Heure	10 h 19	10 h 20	10 h 21	10 h 22	10 h 23
Nombre de minutes x_i	1	2	3	4	5
Nombre de « Like » y_i	13	16	20	25	28

2. On peut rajouter le point de coordonnées (7 ; 38).

$$\textbf{30} \quad \bar{x} = \frac{0 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48}{9} = 24$$

et

$$\bar{y} = \frac{26 + 31 + 33 + 36 + 38 + 41 + 46 + 49 + 56}{9} \approx 39,56.$$

Donc G(24 ; 39,56).

36 1. Vrai.

Un ajustement affine est envisageable car les points du nuage sont proches de l'alignement.

2. Faux.

En traçant la droite d'équation $y = 0,5x + 2$, on constate qu'elle ne permet pas de réaliser un bon ajustement affine du nuage de points.

3. Faux.

La droite représentée ne passe pas par le point G.

45 1. 1 jour représente 24 heures.

$$\text{Pour } t = 24, \text{ on a } N = 9,26 \times 24 + 1,5 = 223,74.$$

Au bout de 1 jour, il y aura donc 223 740 000 bactéries.

2. On résout l'inéquation $9,26t + 1,5 > 100$.

$$9,26t + 1,5 > 100 \Leftrightarrow 9,26t > 98,5 \Leftrightarrow t > \frac{98,5}{9,26}$$

$$\text{Or } \frac{98,5}{9,26} \approx 10,6.$$

C'est donc au bout de 11 heures que le nombre de bactéries dépassera 100 000 000.

46 1. Réponse c.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3 \text{ et}$$

$$\bar{y} = \frac{7,9 + 8,3 + 8,7 + 9,4 + 9,8}{5} = 8,82.$$

Donc G(3 ; 8,82).

2. Réponse b. La calculatrice donne pour équation :

$$y = 0,49x + 7,35.$$

3. Réponse c. L'année 2024 correspond à $x = 10$.

$$\text{On a alors : } y = 0,49 \times 10 + 7,35 = 12,25.$$

4. Réponse b. On résout l'inéquation $0,49x + 7,35 > 15$.

$$0,49x + 7,35 > 15 \Leftrightarrow 0,49x > 7,65 \Leftrightarrow x > \frac{7,65}{0,49}.$$

Or, $\frac{7,65}{0,49} \approx 15,6$. C'est donc au bout de 16 ans, c'est-à-dire en 2030, que le prix de cet article dépassera 15 €.

Pour s'entraîner

48
$$\begin{cases} \frac{35,2 + a + 26,7 + 21 + 18,4 + 15,2 + 11,3 + 9,8}{8} = 21,3 \\ \frac{11,4 + 9,5 + 7,6 + 5,2 + 4 + 3,1 + 2,8 + b}{8} = 5,6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{137,6 + a}{8} = 21,3 \\ \frac{43,6 + b}{8} = 5,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 137,6 + a = 21,3 \times 8 \\ 43,6 + b = 5,6 \times 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 137,6 + a = 170,4 \\ 43,6 + b = 44,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 170,4 - 137,6 \\ b = 44,8 - 43,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32,8 \\ b = 1,2 \end{cases}$$

51 1. a. Le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est environ 51 %.

b. Le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 000 €.

2. • L'équation réduite de Δ est de la forme $y = 1,04x + b$.

A(11 ; 12) $\in \Delta$ ssi $12 = 1,04 \times 11 + b$

ssi $11,44 + b = 12$

ssi $b = 12 - 11,44$

ssi $b = 0,56$

L'équation réduite de Δ est donc $y = 1,04x + 0,56$.

• Pour $x = 48$, on a $y = 1,04 \times 48 + 0,56 = 50,48$.

Donc le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est 50,48 %.

• On résout l'équation $1,04x + 0,56 = 80$.

$1,04x + 0,56 = 80 \Leftrightarrow 1,04x = 80 - 0,56 \Leftrightarrow 1,04x = 79,44 \Leftrightarrow x = \frac{79,44}{1,04}$

Or, $\frac{79,44}{1,04} \approx 76,385$. Donc le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 385 €.



2. $\bar{x}_1 = \frac{1+2+3}{3} = 2$ et $\bar{y}_1 = \frac{2,4+2,9+3,1}{3} = 2,8$ donc $G_1(2; 2,8)$.

$\bar{x}_1 = \frac{4+5+6}{3} = 5$ et $\bar{y}_2 = \frac{3,4+3,6+4,1}{3} = 3,7$ donc $G_2(5; 3,7)$.

3. Voir 1.

4. Graphiquement, on estime que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 € à partir de $x = 10$, c'est-à-dire à partir de 2023.

5. • Le coefficient directeur de la droite (G_1G_2) est :

$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{3,7 - 2,8}{5 - 2} = 0,3$.

Donc l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est de la forme

$y = 0,3x + b$.

$G_1(2; 2,8) \in (G_1G_2)$ ssi $2,8 = 0,3 \times 2 + b$

ssi $2,8 = 0,6 + b$

ssi $b = 2,8 - 0,6$

ssi $b = 2,2$

Donc l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est de la forme

$y = 0,3x + 2,2$.

• On résout l'inéquation $0,3x + 2,2 > 5$.

$0,3x + 2,2 > 5 \Leftrightarrow 0,3x > 2,8 \Leftrightarrow x > \frac{2,8}{0,3}$.

Or, $\frac{2,8}{0,3} \approx 9,3$. C'est donc au bout de 10 ans, c'est-à-dire en 2023, que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 €.

54 1.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Prix y_i	1 050	850	740	650	580	510	480
z_i	0,001	0,001 2	0,001 4	0,001 5	0,001 7	0,002	0,002 1

2. D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés est :

$z = 0,000 19x + 0,001$.

3. $z = \frac{1}{y}$ et $z = 0,000 19x + 0,001$ donc $\frac{1}{y} = 0,000 19x + 0,001$.

D'où : $y = \frac{1}{0,000 19x + 0,001}$.

4. a. L'année 2022 correspond à $x = 9$.

On a alors : $y = \frac{1}{0,000 19 \times 9 + 0,001}$. Soit $y \approx 369$.

En 2022, le prix de cet appareil est estimé à 369 €.

b. On résout l'inéquation :

$\frac{1}{0,000 19x + 0,001} < \left(1 - \frac{70}{100}\right) \times 1 050$.

$\frac{1}{0,000 19x + 0,001} < \left(1 - \frac{70}{100}\right) \times 1 050$

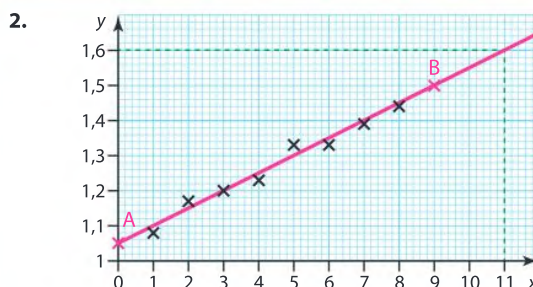
$\Leftrightarrow \frac{1}{0,000 19x + 0,001} < 315 \Leftrightarrow 0,000 19x + 0,001 > \frac{1}{315}$

$\Leftrightarrow 0,000 19x > \frac{1}{315} - 0,001 \Leftrightarrow x > \frac{\frac{1}{315} - 0,001}{0,000 19}$.

Or, $\frac{\frac{1}{315} - 0,001}{0,000 19} \approx 11,4$. C'est donc au bout de 12 ans, c'est-à-dire en 2025, que cet appareil aura perdu 70 % de sa valeur initiale.

58 1.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	12,1	14,9	15,9	17,1	21,2	21,4	24,7	27,8
y_i	1,08	1,17	1,20	1,23	1,33	1,33	1,39	1,44



3. D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 0,05x + 1,05$. Pour la représenter, on détermine les coordonnées de 2 points A et B lui appartenant :

Si $x_A = 0$, alors $y_A = 0,05 \times 0 + 1,05 = 1,05$ donc A(0 ; 1,05).

Si $x_B = 9$, alors $y_B = 0,05 \times 9 + 1,05 = 1$, donc B(9 ; 1,5).

4. $y = \log P$ et $y = 0,05x + 1,05$ donc $\log P = 0,05x + 1,05$.

D'où $P = 10^{0,05x+1,05}$.

5. a. L'année 2021 correspond à $x = 11$.

Sur le graphique, on lit $y = 1,6$. Or, $y = \log P$ donc $\log P = 1,6$. On a alors $P = 10^{1,6}$ TWh, soit environ 39,8 TWh.

b. On résout l'inéquation $10^{0,05x+1,05} > 52$.

$$10^{0,05x+1,05} > 52 \Leftrightarrow \log(10^{0,05x+1,05}) > \log 52$$

$$\Leftrightarrow 0,05x + 1,05 > \log 52$$

$$\Leftrightarrow 0,05x > \log 52 - 1,05$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\log 52 - 1,05}{0,05}$$

Or, $\frac{\log 52 - 1,05}{0,05} \approx 13,3$. C'est donc au bout de 14 ans, c'est-à-dire en 2024 que la capacité de production dépassera 52 TWh.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

59 VRAI

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0,05	0,07	0,11	0,12	0,14	0,15	0,17

En représentant sur la calculatrice le nuage des points de coordonnées $(x_i ; z_i)$, on observe qu'un ajustement affine est justifié car les points sont proches de l'alignement.

60 FAUX

D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de z en x a pour équation $z = 0,02x + 0,03$.

61 VRAI

$z = \frac{1}{y}$ et $z = 0,02x + 0,03$. On en déduit que $\frac{1}{y} = 0,02x + 0,03$ et donc que $y = \frac{1}{0,02x + 0,03}$.

62 VRAI

Lorsque $x = 9$ on a $y = \frac{1}{0,02 \times 9 + 0,03} \approx 4,762$.

63 FAUX

On résout l'équation $\frac{1}{0,02x + 0,03} = 3,7$.

$$\frac{1}{0,02x + 0,03} = 3,7 \Leftrightarrow 0,02x + 0,03 = \frac{1}{3,7}$$

$$\Leftrightarrow 0,02x = \frac{1}{3,7} - 0,03$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{3,7} - 0,03}{0,02}$$

Or, $\frac{\frac{1}{3,7} - 0,03}{0,02} \approx 12$. Le nombre d'années de mise en circulation d'un véhicule ayant une cote argus de 3 700 € est donc estimé à 12 ans.

QCM

64 Réponse a.

Le nombre de postes de personnel non médical dans la clinique possédant 100 lits est 133.

65 Réponse c.

Le nombre de lits dans la clinique possédant 175 postes de personnel non médical est 135.

66 Réponse c.

Le point moyen G a pour coordonnées (123,1 ; 160,8) car c'est celui qui est situé le plus « au milieu » du nuage de points.

67 Réponse a.

La droite représentée sur le graphique a pour équation $y = 1,26x + 5,77$.

En effet, la droite d'équation $y = -10,48x + 4,21$ est à éliminer car son coefficient directeur est négatif alors que la droite cherchée doit avoir un coefficient directeur positif.

La droite d'équation $y = 1,46x + 69,9$ est à éliminer car son ordonnée à l'origine est 69,9 ce qui est impossible vu l'origine donnée sur le graphique.

68 Réponse a.

Pour $x = 82$, on a $y = 1,26 \times 82 + 5,77$. Soit $y \approx 109$.

69 Réponse b.

On résout l'équation $1,26x + 5,77 = 152$.

$$1,26x + 5,77 = 152 \Leftrightarrow 1,26x = 146,23$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{146,23}{1,26}$$

$$\text{Or, } \frac{146,23}{1,26} \approx 116.$$

6 Probabilités conditionnelles

Vérifier les acquis de Première

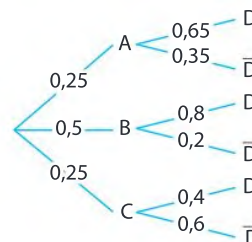
QCM

1. d 2. c 3. d 4. c 5. a

Exercices

Pour commencer

17 1. Voir l'arbre ci-dessous :



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,1625$.

3. D'après la formule des probabilités totales et l'arbre précédent,
 $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$
 $= 0,1625 + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$
 $= 0,1625 + 0,4 + 0,1 = 0,6625$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, et en utilisant les résultats des questions 2. et 3., on a :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{13}{53}$$

22 L'énoncé donne $P(L) = 0,7$; $P(F) = 0,3$; $P_L(A) = 0,9$; $P_F(A) = 0,1$.

1. L'événement $F \cap A$ signifie « l'article est un fruit et pousse à l'air libre », et $L \cap A$ signifie « l'article est un légume et pousse à l'air libre ».

2. Les événements $F \cap A$ et $L \cap A$ forment une partition de l'événement A , donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(F \cap A) + P(L \cap A)$$

$$= P(F) \times P_F(A) + P(L) \times P_L(A)$$

$$= 0,3 \times 0,1 + 0,7 \times 0,9 = 0,66$$

28 1. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ donc les événements A et B sont indépendants.

2. $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{4}{13}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

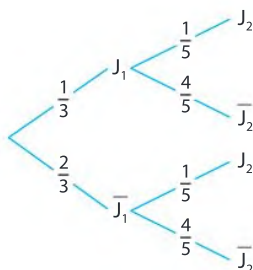
29 1. On note S l'événement « l'élève est sportif » et E l'événement « l'élève est externe ».

$P(S) \times P(E) = \frac{40}{100} \times \frac{52}{100} \neq \frac{11}{50} = P(S \cap E)$, donc les événements S et E ne sont pas indépendants.

2. On note $\bar{S}$ l'événement « l'élève est non sportif » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

$P(\bar{S}) \times P(D) = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{18}{50} = P(\bar{S} \cap D)$, donc les événements $\bar{S}$ et D sont indépendants.

30 1. Voir l'arbre ci-dessous :



2. Puisque chaque joueur lance à son panier indépendamment de l'autre joueur, les événements J_1 et J_2 sont indépendants.

Ainsi, on a : $P(J_1 \cap J_2) = P(J_1) \times P(J_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

3. Solution 1 (avec arbre) : en utilisant l'arbre de probabilités de la question 1., on en déduit que :

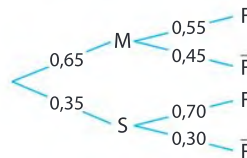
$$P(\bar{J}_1 \cap \bar{J}_2) = P(\bar{J}_1) \times P(\bar{J}_2) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Solution 2 (sans arbre) : l'événement « aucun des joueurs ne réussit son panier à trois points » est $\bar{J}_1 \cap \bar{J}_2$. Or, puisque J_1 et J_2 sont indépendants, $\bar{J}_1$ et $\bar{J}_2$ sont également indépendants. On en déduit que :

$$P(\bar{J}_1 \cap \bar{J}_2) = P(\bar{J}_1) \times P(\bar{J}_2) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

Pour s'entraîner

36 1. Voir l'arbre ci-dessous :



2. $M \cap F$ est l'événement « le client vient manger le midi et commande une formule entrée-plat-dessert ».

Grâce à l'arbre précédent, on trouve $P(M \cap F) = 0,3755$.

3. D'après l'arbre de la question 1. et le résultat de la question 2., la formule des probabilités totales donne :

$$P(F) = P(M \cap F) + P(\bar{M} \cap F) = 0,4625$$

4. En utilisant les questions 2. et 3., et la formule des probabilités conditionnelles, on a $P_F(M) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} \approx 0,773$.

39 1. Si un employé est en retard au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{R_2}(R_3) = \frac{1}{20}$.

De même, si un employé est à l'heure au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{\bar{R}_2}(R_3) = \frac{1}{5}$.

2. Par hypothèse, $P(R_1) = 0$, ce qui signifie que l'employé était à l'heure au jour 1.

Alors, la probabilité qu'il soit en retard au jour 2 est $P(R_2) = \frac{1}{5}$. Ainsi, on a :

$$P(R_2 \cap R_3) = P(R_2) \times P_{R_2}(R_3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{100}$$

De même, $P(R_1) = 0$, on en déduit que $P(\bar{R}_2) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Ainsi, on a :

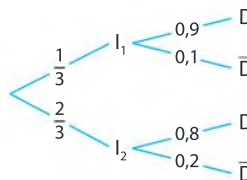
$$P(\bar{R}_2 \cap R_3) = P(\bar{R}_2) \times P_{\bar{R}_2}(R_3) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

3. Puisque $R_2 \cap R_3$ et $\bar{R}_2 \cap R_3$ forment une partition de R_3 , par la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$P(R_3) = P(R_2 \cap R_3) + P(\bar{R}_2 \cap R_3) = \frac{1}{100} + \frac{4}{25} = \frac{17}{100}$$

D'après l'énoncé, on a $P_{\bar{R}_3}(R_4) = \frac{1}{5}$.

40 1. En notant I_1 (respectivement I_2) l'événement « l'interrupteur I_1 (respectivement I_2) laisse passer le courant » et D l'événement « la diode émet de la lumière », on peut modéliser la situation par l'arbre de probabilité suivant :



D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(D) = P(I_1) \times P_{I_1}(D) + P(I_2) \times P_{I_2}(D) = \frac{1}{3} \times 0,9 + \frac{2}{3} \times 0,8 = \frac{5}{6}$$

2. Sachant que la diode n'éclaire pas, on cherche lequel des deux interrupteurs a la plus grande probabilité de laisser passer le courant. Il suffit de calculer $P_D(I_1)$ et $P_D(I_2)$ et de comparer les probabilités obtenues.

Grâce à la formule des probabilités conditionnelles et aux résultats de la question précédente, on a :

$$P_D(I_1) = \frac{P(I_1 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{\frac{1}{3} \times 0,1}{1 - \frac{5}{6}} = 0,2$$

$$\text{et } P_D(I_2) = \frac{P(I_2 \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,2}{1 - \frac{5}{6}} = 0,8.$$

Ainsi, puisque $P_D(I_1) < P_D(I_2)$, il est plus probable que ce soit l'interrupteur I_2 qui ait laissé passer le courant.

44 1. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,35 \times 0,48 = 0,168$.

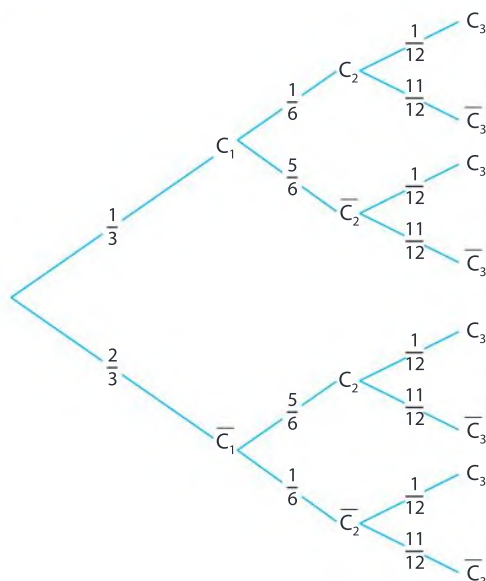
2. Grâce à la formule du premier point du **Coup de pouce**, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,48 - 0,168 = 0,662$.

3. Le deuxième point du **Coup de pouce** nous dit que puisque A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants. Ainsi, on a :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = 0,35 \times (1 - 0,48) = 0,182.$$

$$4. P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,35 + 0,52 - 0,182 = 0,688.$$

48 1. **Solution 1** : utiliser l'arbre de probabilités ci-dessous :



$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) \times P_{C_1 \cap C_2}(C_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{216}.$$

Solution 2 : utiliser l'indépendance des événements (caractérisation identique pour plus de 2 événements) :

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{216}.$$

2. Par indépendance des événements C_1 et C_2 , on a :

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \times P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

3. On cherche la probabilité de l'événement C_3 , qui est un événement situé en fin de chemin. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C_3) = P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(C_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) + P(\bar{C}_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap C_3) = \frac{1}{216} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Pour faire le point

Vrai ou Faux

- 51** FAUX **52** FAUX
53 1. FAUX 2. VRAI 3. FAUX 4. VRAI
54 VRAI

QCM

- 55** Réponse **b**. **58** Réponse **a**.
56 Réponse **b**. **59** Réponse **c**.
57 Réponse **c**.

7 Variables aléatoires discrètes

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 6

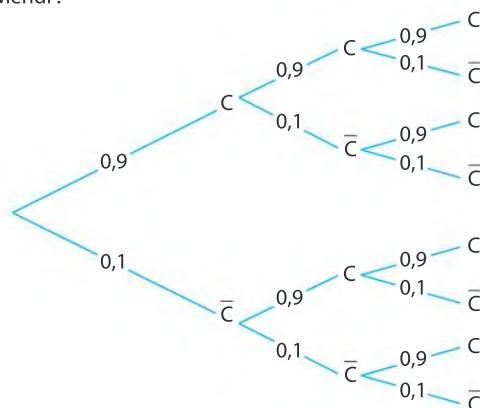
QCM

1. a 2. d 3. b 4. a 5. b 6. a

Exercices

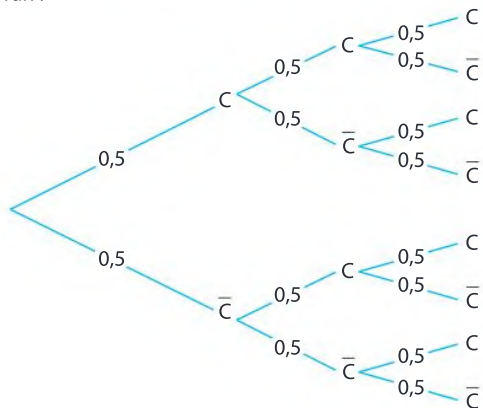
Pour commencer

23 1. Dans chaque arbre on notera C une réponse correcte, et $\bar{C}$ une réponse incorrecte. Pour Mehdi :



Corrigés

Pour Yvan :



2. Les valeurs de M et Y dépendent du nombre de bonnes réponses. On a donc le tableau suivant :

Nbre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de M ou Y correspondante	-3	0	3	6

3. Cette expérience est la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de bonnes réponses est donc une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(3; 0,9)$ pour Yvan et la loi $\mathcal{B}(3; 0,5)$ pour Yvan.

On a alors les tableaux suivants :
pour Mehdi :

Nbre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de M correspondante	-3	0	3	6
Probabilité correspondante	0,001	0,027	0,243	0,729

pour Yvan :

Nbre de bonnes réponses	0	1	2	3
Valeur de Y correspondante	−3	0	3	6
Probabilité correspondante	0,125	0,375	0,375	0,125

4. D'après ce qui précède, l'espérance de M est :
 $E(M) = -3 \times 0,001 + 0 \times 0,027 + 3 \times 0,243 + 6 \times 0,729 = 5,1$.
 De même, l'espérance de Y est : $E(Y) = 1,5$.
 Si on réalisait un grand nombre d'exercices similaires, en moyenne Mehdi gagnerait 5,1 points à chaque fois, et Yvan gagnerait 1,5 point.

30 Dans le triangle de Pascal, le premier et le dernier coefficient de chaque ligne est égal à 1.
De plus, chacun des autres coefficients est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui.
Ainsi la ligne $n = 9$ du triangle de Pascal est :

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
---	---	----	----	-----	-----	----	----	---	---

35 1. $P(X=2) = \binom{9}{2} 0,3^2 \times (1-0,3)^{9-2}$
 $= 36 \times 0,3^2 \times 0,7^7 \approx 0,267.$

$$\begin{aligned} 2. P(X=4) &= \binom{9}{4} 0,3^4 \times (1-0,3)^{9-4} \\ &= 126 \times 0,3^4 \times 0,7^5 \approx 0,172. \end{aligned}$$

39 La variable aléatoire X ne suit pas une loi binomiale. En effet, choisir une paire de chaussettes au hasard est une épreuve de Bernoulli, mais ces épreuves ne sont pas indépendantes : si Sofia choisit une des deux paires avec un trou le premier jour, alors la probabilité de choisir une paire avec un trou est plus faible les jours suivants.

44 1. Puisque ce tirage est considéré comme un tirage avec remise, vérifier les piles des 35 calculatrices de la classe est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 35$ et $p = 0,1$.

2. D'après la calculatrice : $P(X = 0) \approx 0,025$.
La probabilité que toutes les calculatrices de la classe aient des piles chargées est de 0,025.

3. D'après la calculatrice, la probabilité que 5 élèves ou moins aient une calculatrice dont les piles sont déchargées est $P(X \leq 5) \approx 0,868$.

4. L'espérance de X est : $E(X) = 35 \times 0,1 = 3,5$.

Si on vérifiait les piles des calculatrices dans un grand nombre de classes à 35 élèves, en moyenne 3,5 calculatrices par classe auraient des piles déchargées.

Pour s'entraîner

49 1. Les valeurs possibles prises par X sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

2. Le tableau suivant donne l'écart entre le résultat du premier dé (dans la colonne 1) et du deuxième dé (dans la ligne 1) :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Il y a donc 36 tirages possibles, tous avec la même probabilité qui est donc égale à $\frac{1}{36}$.

6 de ces tirages donnent le résultat 0.

10 de ces tirages donnent le résultat 1.

8 de ces tirages donnent le résultat 2.

6 de ces tirages donnent le résultat 3.

4 de ces tirages donnent le résultat 4.

2 de ces tirages donnent le résultat 5.

La loi de probabilité de X est donc :

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

3. L'espérance de X est :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} \\ = \frac{35}{18}.$$

- 53** 1. a. Les premières et dernières valeurs de $L2$ sont 1.
 b. Puisque $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ la i -ème valeur de $L2$ est la somme de la $(i-1)$ -ème valeur et i -ème valeur de $L1$, pour i allant de 1 à $n-1$.
 c. L'algorithme suivant convient :

```
def suivante(L1):
    L2=[]
    l=len(L1)-1
    for i in range(l):
        L2=L2+[L1[i]+L1[i+1]]
    L2=[1]+L2+[1]
    return(L2)
```

2. a. La première ligne du triangle de Pascal est l'unique valeur : 1.
 b. L'algorithme suivant convient :

```
def triangle(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        L=suivante(L)
    return(L)
```

3. La commande suivante renvoie le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 10$:

```
for n in range(11):
    L=triangle(n)
    print(L)
```

Le résultat est :

```
[1]
[1, 1]
[1, 2, 1]
[1, 3, 3, 1]
[1, 4, 6, 4, 1]
[1, 5, 10, 10, 5, 1]
[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
[1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1]
[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]
[1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1]
[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

- 54** 1. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(4; 0,95)$.
 2. D'après la calculatrice, la probabilité que seulement 3 vols soient réussis est environ : $P(X=3) \approx 0,171$.
 3. D'après la calculatrice, la probabilité que tous les vols soient réussis est environ : $P(X=4) \approx 0,815$.
 4. L'espérance de X est : $E(X) = 4 \times 0,95 = 3,8$.
 Si on effectuait un grand nombre de séries de quatre vols, il y aurait en moyenne 3,8 vols réussis par série.

- 56** 1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{3}$.
 2. La probabilité que tous les feux soient rouges est
 $P(X=6) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \approx 0,001$.
 3. Pour arriver à l'heure, il lui faut arriver avec moins d'une minute de retard, il faut donc que seulement trois feux ou moins soient rouges. La probabilité de cet événement est : $P(X \leq 3) \approx 0,900$.

4. L'espérance de X est : $E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$. Donc si elle effectue un grand nombre de trajets, en moyenne elle rencontrera deux feux rouges par trajet.

- 59** Soit X le nombre de cibles (parmi 5) que Martin Fourcade atteint lors d'une séance de tir.
 La réussite d'un tir étant indépendante des autres, une séance de tirs est assimilée à un schéma de Bernoulli.
 X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,9$. La probabilité qu'il atteigne les cinq cibles est donc :
 $P(X=5) = 0,9^5 \approx 0,59$.

Pour faire le point

Vrai ou Faux

- 63** FAUX
 La somme des probabilités est : $2p + 4p + 3p + 2p + p = 12p = 1$.
 Ainsi $p = \frac{1}{12}$.

- 64** FAUX
 La valeur de $\binom{17}{16}$ est 17.

- 65** FAUX
 Le coefficient binomial $\binom{8}{5}$ est aussi égal à 56.

- 66** FAUX
 Le coefficient binomial $\binom{252}{1}$ est aussi égal à 252.

- 67** FAUX
 Le coefficient binomial $\binom{314}{1}$ est égal à 314.

- 68** VRAI
 $P(X=2) = \binom{8}{2} 0,3^2 \times (1-0,3)^{8-2} = 28 \times 0,3^2 \times 0,7^6 \approx 0,30$.

- 69** FAUX
 D'après la calculatrice $P(Y \geq 4) \approx 0,63$.

- 70** VRAI
 D'après la calculatrice $P(Z > 8) \approx 0,35$.

- 71** VRAI
 L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,225)$ est $E(X) = 100 \times 0,225 = 22,5$.

QCM

- 72** 1. Réponse d.
 2. Réponse a.

- 73** Réponse d.

- 74** 1. Réponse a.
 2. Réponse c.
 3. Réponse c.

Crédits

pp. 74-77 : Stéphane Valembois – p. 87 : Réseau Sentinelles, Inserm, Sorbonne Université.
Pour les autres photographies Adobe Stock.

Vous utilisez un **Manuel connecté Delagrave**, qui propose des QR codes et/ou des liens hypertextes permettant d'accéder en ligne à des ressources numériques complémentaires.

Les éditions Delagrave mettent tout en œuvre pour sécuriser la consultation et l'utilisation des ressources en ligne qu'elles éditent, produisent ou hébergent, conformément aux règles d'usages de l'Internet. Delagrave ne saurait être tenu responsable des interruptions de services dues aux caractéristiques et limites du réseau Internet, notamment dans le cas d'interruptions quelle qu'en soit la cause, des performances techniques et des temps de réponse pour consulter ou interroger les ressources proposées. L'accès aux ressources associées au Manuel connecté Delagrave est garanti pour une période maximum de deux ans, à compter de la date de parution de cet ouvrage indiquée ci-dessous (copyright). Au terme de cette période, l'utilisateur du Manuel connecté Delagrave ne saurait exiger le maintien du service proposé.

Dans le cas où les QR codes et liens hypertextes permettent d'accéder à des sites internet tiers, la responsabilité des éditions Delagrave n'est pas engagée, notamment quant à leur éventuel dysfonctionnement ou à leur indisponibilité d'accès.

Conception graphique : Marc et Yvette

Conception couverture : Élodie Breda, Les Paoistes

Mise en page : STDI

Responsable éditoriale : Lucie Blettery

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.



ISBN : 978-2-206-10445-4

© Éditions Delagrave, 2020

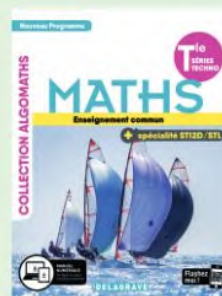
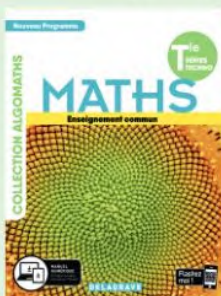
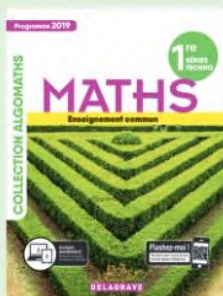
Éditions Delagrave – 5, allée de la 2^e D.B. – 75015 Paris

www.editions-delagrave.fr

Une collection pour donner le goût des maths

Enseignement commun

Enseignement commun + spécialité STI2D/STL



Un livre aux ressources
numériques intégrées

OU

Code
à
flasher

Flashez
moi !



OU

Lien
URL à
saisir



En savoir plus : www.editions-delagrave.fr

ISBN : 978-2-206-10445-4



9 782206 104454

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier
provenant de forêts gérées durablement.

DELAGRAVE

www.editions-delagrave.fr



CET OUVRAGE EXISTE AUSSI
EN VERSION NUMÉRIQUE

Achat individuel élève disponible
sur www.boutique.edulib.fr