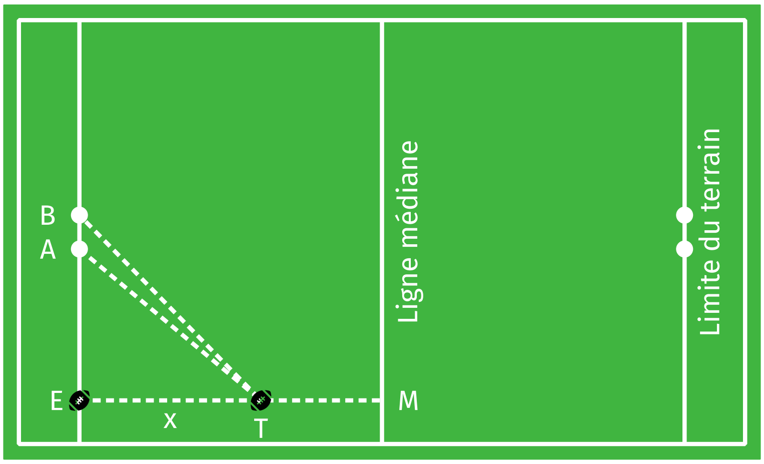
TD06

Optimisation au rugby

NOM : .... **Prénom :** ....

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

On donne les dimensions : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m; et on note α une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$.

On se place dans le repère $\left(\text{E}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ de sorte que, dans ce repère, on a T $(x;0)$, M $(50;0)$ et A $(0;25)$.

1. Préciser l'intervalle, noté I, dans lequel peut varier x.

2. Déterminer les coordonnées du point B.

3. Dans cette question, on suppose que $x = 15$.

- **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{TA}}$ et $\overrightarrow{\text{TB}}$.
- **b.** Déterminer la valeur de $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}}$.
- **c.** Calculer les longueurs TA et TB.
- **d.** En utilisant une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}}$, déterminer une valeur approchée, au centième de degré près, de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$.

4. Dans cette question, on ne connaît pas la valeur de x.

- **a.** Déterminer, en fonction de x, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{TA}}$ et $\overrightarrow{\text{TB}}$.
- **b.** Déterminer, en fonction de x, la valeur de $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}}$.
- **c.** Calculer, en fonction de x, les longueurs TA et TB.
- **d.** En utilisant une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{\text{TA}} \cdot \overrightarrow{\text{TB}}$, vérifier que :

$$\cos\left(\widehat{\text{ATB}}\right) = \frac{x^2 + 765}{\sqrt{x^2 + 625} \times \sqrt{x^2 + 936{,}36}}.$$

5. On considère donc la fonction f définie sur I (donné dans la question **1.**) par

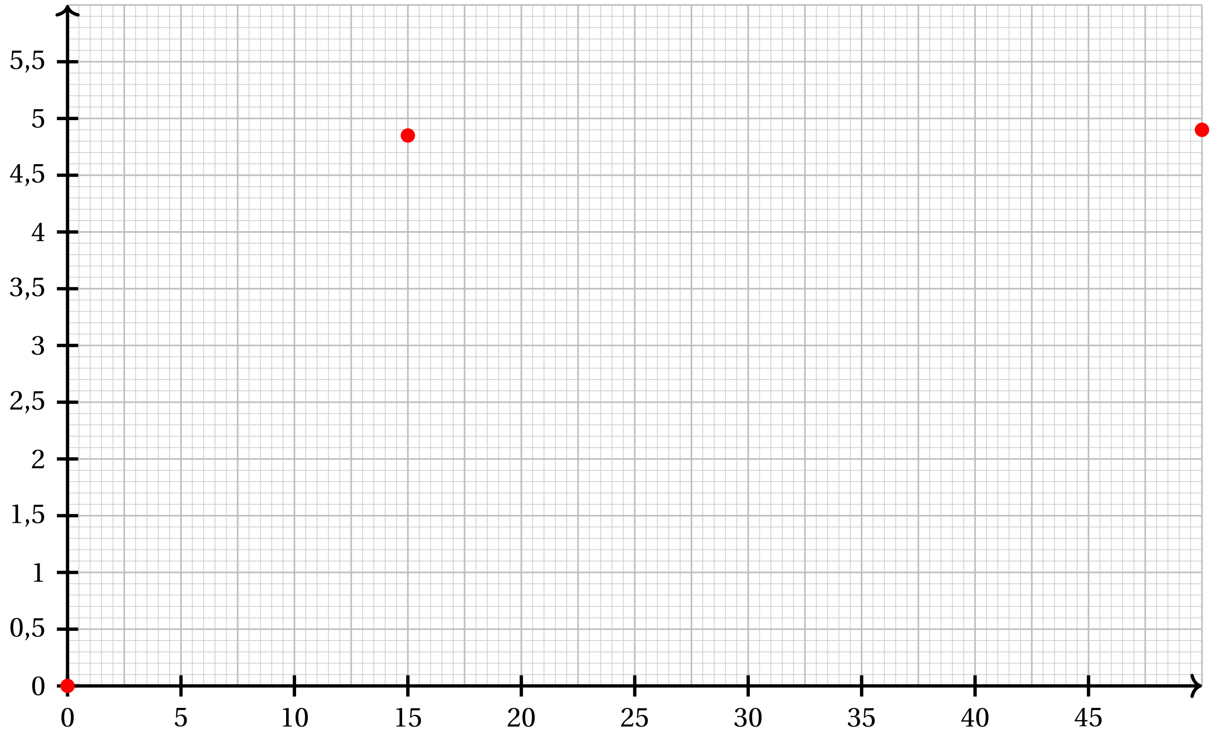
$$f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+765}{\sqrt{x^2+625}\times\sqrt{x^2+936{,}36}}\right).$$

a. En utilisant la calculatrice, paramétrée en degré, compléter le tableau de valeurs (arrondies à 0,01) :

x	5	10	15	20	21	22	23	24	25
$f(x)$			4,85						

x	26	27	28	29	30	35	40	45	50
$f(x)$									4,90

b. Dans le repère suivant, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



c. Estimer graphiquement le maximum de f ainsi que la valeur de x pour laquelle f est maximale.

d. Conclure quant au problème initial.

6. On admet, après étude mathématique « plus poussée » que, lorsque l'essai est marqué à l'extérieur des poteaux et à une distance m du poteau (m correspond à la longueur EA et est typiquement entre 2 et 32 mètres), la valeur de x qui rend maximal l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est donnée par

$$x = \sqrt{m^2+5{,}6m}.$$

a. Vérifier que pour $m = 25$, on retrouve approximativement la valeur de x déterminée à la question **5.c.**.

b. Si l'essai est marqué à peu près au milieu de la distance entre le poteau et le coin de l'aire de jeu (la largeur d'un terrain de rugby est d'environ 70 m), déterminer la position la plus favorable pour le transformer.

c. Compléter l'algorithme `python` suivant de sorte qu'un appel à la `fonction` `distance` renvoie la distance optimale pour la transformation lorsque que l'essai est marqué à `m` mètres de l'un des poteaux :

Code Python

```
from math import sqrt     #on importe la fonction racine
def distance(m):
    res = ..............................................
    return res
```

d. Vérifier, sur quelques exemples, que $x \approx m+2{,}5$ semble être une bonne approximation de la distance optimale.