

Les fondamentaux
du lycée

Maths

ENSEIGNEMENT COMMUN

1^{re}
SÉRIES
TECHNO

Sous la direction de N. Teulié
C. Jolibert • C. Lanot •
P. Lefebvre • C. Meunier •
C. Pivan • O. Pinçon • F. Thomas

> Une approche efficace
pour réussir son lycée

Tout pour se préparer au BAC !

- 1 livret de révisions pour l'épreuve anticipée de 1^{re}
- + de 200 automatismes
- + de 500 exercices
- 39 problèmes par compétences
- **Inédit** 16 itinéraires de révisions
- 49 points méthode et leurs exercices résolus
- 20 exercices corrigés en vidéo par Médématis
- 1 plateforme d'entraînement en ligne (+ de 100 exercices)



hachette
TECHNIQUE

Automatismes	8
---------------------------	---

1 Suites : généralités et variations

.....	24
Activités de découverte	26
1) Génération d'une suite numérique	28
2) Calcul des termes d'une suite numérique	30
3) Représentation graphique des termes d'une suite et sens de variation	32
Python Générer les termes d'une suite à l'aide des listes	34
L'essentiel	36
Exercices	40
Problèmes	48

2 Suites arithmétiques et géométriques

.....	50
Activités de découverte	52
1) Suites arithmétiques	54
2) Suites géométriques	56
L'essentiel	58
Exercices	61
Problèmes	70

3 Fonctions : généralités

.....	72
Activités de découverte	74
1) Modélisation et représentation des fonctions	76
2) Résolution graphique d'équations et d'inéquations	78
3) Calcul et interprétation du taux de variation	80
L'essentiel	82
Exercices	84
Problèmes	92

4 Fonctions polynômes de degré 2 et 3

.....	94
Activités de découverte	96
1) Fonctions polynômes de degré 2	98
2) Fonctions polynômes de degré 3	102
L'essentiel	106
Exercices	110
Problèmes	120

5	Dérivation	122
	Activités de découverte	124
	1) Nombre dérivé et tangente	126
	2) Fonction dérivée : calculs	128
	3) Sens de variation et extrema d'une fonction grâce à la dérivée	130
	L'essentiel	132
	Exercices	135
	Problèmes	144
6	Tableaux croisés et probabilités conditionnelles	146
	Activités de découverte	148
	1) Tableaux croisés et fréquences	150
	2) Calculer des probabilités conditionnelles	152
	L'essentiel	154
	Exercices	157
	Problèmes	166
7	Variables aléatoires	168
	Activités de découverte	170
	1) Expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes	172
	2) Variable aléatoire	174
	3) Répétition d'épreuves de Bernoulli	176
	L'essentiel	178
	Exercices	182
	Problèmes	191

Se préparer au Bac Voir page suivante

Corrigés des exercices 200

Fiches méthode

Utiliser la **Calculatrice** : Numworks / Texas Instr. / Casio rabat avant

Utiliser le **Tableur** rabat arrière

Utiliser **Python** 196

Les pictos de ce manuel

Calculatrice

Tableur

Logiciel de géométrie

Python

22
Vidéo



Les exercices-clés de chaque chapitre sont corrigés en vidéo par Médématicques.



hachette-clic.fr/25mf1001

Itinéraires de révision



Chapitre 1

- Je sais modéliser une situation à l'aide d'une suite 37
- Je sais calculer un terme de rang donné d'une suite définie par récurrence 38
- Je sais réaliser et exploiter une représentation graphique 39

Chapitre 2

- Je maîtrise les suites arithmétiques 59
- Je maîtrise les suites géométriques 60

Chapitre 3

- Je maîtrise les fonctions, leur représentation graphique et le taux de variation 83

Chapitre 4

- Je maîtrise les fonctions polynômes de degré 2 107
- Je maîtrise les fonctions polynômes de degré 3 108
- Je sais déterminer le signe des fonctions polynômes 109

Chapitre 5

- Je sais déterminer l'équation d'une tangente 133
- Je sais étudier une fonction à l'aide de sa dérivée 134

Chapitre 6

- Je sais calculer une fréquence marginale ou conditionnelle à partir d'un tableau croisé 155
- Je sais calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé 156

Chapitre 7

- Je sais calculer une probabilité à l'aide d'un arbre de probabilités 179
- Je sais calculer des probabilités et l'espérance associées à une variable aléatoire 180
- Je sais reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli et calculer des probabilités et l'espérance associée 181

Se préparer au Bac

- **+ 200 automatismes** 8

• À retrouver dans chaque chapitre :

- **+ de 500** exercices
- **39** problèmes par compétences
- **16** itinéraires de révision
- **49** points méthode et leurs exercices résolus
- **20** exercices corrigés en vidéo par Médémathiques

- **1 plateforme d'entraînement en ligne** avec **+ de 100** exercices interactifs supplémentaires



à retrouver ici :



hachette-clic.fr/25mflexosup

Spécial épreuve anticipée de maths de 1^{re}

À l'heure où nous imprimons ce manuel, les modalités de l'épreuve anticipée de 1^{re} ne sont pas encore publiées au Bulletin Officiel.

Retrouvez ici :



hachette-clic.fr/25mfldr



Un livret de révisions

avec des automatismes
et des exercices par compétences
pour s'entraîner



à télécharger



à imprimer



Toutes les **informations**
en temps réel !

- Les **modalités de l'épreuve**
- La **publication au BO**
- Le **sujet 0**

Comment accéder directement aux ressources numériques ?

3 possibilités

1

Recopier le mini-lien dans le navigateur Internet

hachette-clic.fr/25mfl002

2

Saisir l'adresse du site collection dans le navigateur Internet

Toutes les ressources se trouvent sur ce site :
hachette-clic.fr/25mfl



3

Flasher le QR code avec l'appareil photo d'un smartphone ou d'une tablette



Pour entrer dans le chapitre

Développer à l'aide de la distributivité ou d'une identité remarquable

- Simple distributive : $a(b+c) = ab+ac$
- Double distributive : $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
- Cas particulier : $-(a+b) = -a-b$
- Identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

1 Développer, réduire et ordonner les nombres suivants :
A = $2(n+3)$ B = $-(n+1)$
C = $(n+3)(n+2)$ D = $(n+1)^2$

Calculer l'image d'un réel par une fonction

$f(x)$ est l'image du réel x par f où f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} avec $x \in I$.

2 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Déterminer l'image de 2 par f .

3 Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$. Déterminer l'image de 3 par f .

Déterminer graphiquement des images par une fonction

- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée, dans le repère ci-contre.
- Les points de la courbe ont des coordonnées de la forme $(x; f(x))$ où $x \in \mathbb{R}$.
- A est le point de \mathbb{R} d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$.

4 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre. Avec la précision permise par le graphique, déterminer les images, par f de $-1, 0, 1$ et 3 .

1 Suites : généralités et variations

Focus métiers
Banque Assurance Biomédical Finance
Les suites permettent de calculer une évolution (épargne sur un compte bancaire, épidémie...)
Découvrez le métier hachette-clic.fr/25mfl002

Automatismes du chapitre

C03	passer d'une formulation additive à une formulation multiplicative	10
C17	effectuer une application numérique d'une formule (notamment celles utilisées dans d'autres disciplines)	18
C26	développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple	22

Vous utilisez le manuel numérique ?
Il suffit de cliquer sur les ressources !

+ de 100 ressources numériques disponibles

20 exercices corrigés

en vidéo par Médémathématiques

20 Vidéos



7 QCM interactifs et autocorrigés

pour réviser intégralement chaque chapitre

JE ME TESTE

Dans chaque QCM, trouver la ou les bonnes réponses

1 Un club sportif comptant 300 membres voit son nombre d'adhérents augmenter de 10% par an mais il perd également 10 membres tous les ans. On modélise cette situation à l'aide d'une suite u_n , où u_n désigne le nombre d'adhérents dans le club après n années.

- $u_0 = 300$
- La relation de récurrence est $u_{n+1} = 300 + 0,1u_n - 10$
- $u(2) = 342$

2 Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2n - 1$

- $u_0 = 0$
- $u_1 = 2$
- $u_{10} = 119$

Spécial Bac

1 livret de révisions



pour s'entraîner à l'épreuve anticipée de fin de 1^{re}



1 plateforme d'entraînement en ligne



avec + de 100 exercices supplémentaires

EXERCICE 7 - POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

Une entreprise fabrique des figurines. Le coût de production, exprimé en euros, de x figurines est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 400]$ par : $C(x) = x^2 + 50x + 4000$; la recette, exprimée en euros, obtenue par la vente de x figurines est donnée par la fonction R définie par : $R(x) = 100x$.

1 Donner l'expression du bénéfice B , réalisé par la fabrication et la vente de f figurines. Il est défini comme la différence entre la recette et le coût.

Tablez votre réponse(s) :

2 Une expression factorisée de la fonction B est :

- $(-x - 40)(x - 100)$
- $(x + 40)(-x + 100)$
- $(-x + 40)(x + 100)$
- $(-x + 40)(x - 100)$

7 vidéos métier

pour comprendre l'usage des mathématiques dans le quotidien des métiers



Focus métiers

A) Proportions et pourcentages

1. Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes 9
2. Calculer la proportion d'une proportion 9

B) Évolutions et variations

3. Passer d'une formulation additive à une formulation multiplicative 10
4. Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale 10
5. Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage 11
6. Interpréter un indice de base 100 ; calculer un indice ; calculer le taux d'évolution entre deux valeurs... 11
7. Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives 12
8. Calculer un taux d'évolution réciproque 12

C) Calcul numérique et algébrique

9. Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples 13
10. Effectuer des opérations sur les puissances 14
11. Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, scientifique) 14
12. Estimer un ordre de grandeur 15
13. Effectuer des conversions d'unités 15
14. Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une équation du type : $x^2 = a$ 16
15. Déterminer le signe d'une expression du premier degré,
d'une expression factorisée du second degré 17
16. Isoler une variable dans une égalité ou une inégalité qui en comporte plusieurs 17
17. Effectuer une application numérique d'une formule
(notamment celles utilisées dans d'autres disciplines) 18
18. Développer, factoriser, réduire une expression algébrique simple 18

D) Fonctions et représentations

19. Déterminer graphiquement des images et des antécédents 19
20. Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k, f(x) < k...$ 19
21. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations 20
22. Exploiter une équation de courbe (appartenance d'un point, calcul de coordonnées) 21
23. Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur 21
24. Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite 21
25. Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points 22

E) Représentations graphiques de données chiffrées

26. Lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barres ou circulaire,
un diagramme en boîte ou toute autre représentation
(repérer l'origine du repère, les unités de graduations ou les échelles...) 22
27. Passer du graphique aux données et vice versa 23

A) Proportions et pourcentages

A1. Calculer, appliquer, exprimer une proportion sous différentes formes

▶ On note **A** une partie d'un ensemble **E**. $\text{Card}(E)$ (respectivement $\text{Card}(A)$) représente le nombre d'éléments de **E** (respectivement le nombre d'éléments de **A**).

$p = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$ est la **proportion** de **A** dans **E**.

Remarque : Une proportion est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple : Dans une classe de 35 élèves, il y a 14 germanistes.

La proportion de germanistes est $p = \frac{14}{35}$.

Cette proportion peut s'écrire :

- sous **forme fractionnaire** : $\frac{2}{5}$;

- sous **forme décimale** : 0,4 ;

- à l'aide d'un **pourcentage** : 40 %.

Pour calculer une proportion p d'une quantité N , on calcule $p \times N$.

Exemple : Dans un lycée de 1 700 élèves, les trois quarts des élèves mangent à la cantine.

Le nombre de lycéens mangeant à la cantine est :

$$\frac{3}{4} \times 1700 = 1275.$$

Pour 1 et 2, déterminer la proportion de A dans E sous les trois formes : fraction irréductible, décimale, pourcentage.

Card(A) = 70 et Card(E) = 280

Card(A) = 40 et Card(E) = 500

Pour 3 à 5, recopier et compléter les deux formes manquantes.

$\frac{26}{50} = \dots = \dots\%$

$0,48 = \dots\% = \frac{\dots}{\dots}$

$38\% = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Dans un lycée il y a 1 500 élèves dont 300 sont en série STMG. Déterminer la proportion, en pourcentages, d'élèves en STMG.

150 personnes ont répondu à une demande d'emploi. 120 ont été retenues pour passer un entretien. Quelle est la proportion des personnes autorisées à passer un entretien ? La réponse sera donnée sous forme décimale.

Pour 8 à 10, calculer et donner la réponse sous forme décimale.

20 % de 230

$\frac{3}{4}$ de 280

0,2 % de 1 250

Sur l'emballage d'une plaque de chocolat il est noté 70 % de cacao ». Quelle est la masse de cacao dans une plaque de 250 g ?

Pour son anniversaire, Nora voudrait un ordinateur. Cet ordinateur coûte 760 €. Sa famille lui donnera 25 % du prix. À quelle somme correspond la participation de sa famille ?

A2. Calculer, la proportion d'une proportion

▶ On considère une population **F**.

E est une sous-population de **F** et **A** une sous-population de **E**.

On note $p_{A,E}$ la proportion de **A** dans **E** et $p_{E,F}$ la proportion de **E** dans **F**.

La proportion de **A** dans **F** se note $p_{A,F}$ et on a :

$$p_{A,F} = p_{A,E} \times p_{E,F}$$

Exemple :

Dans un lycée, $\frac{1}{3}$ des élèves sont en 1^{re} et parmi eux, $\frac{3}{4}$ sont en 1^{re} STMG.

La proportion des élèves de 1^{re} STMG dans l'ensemble du lycée est égale à : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$



Calculer $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{10}$.

Calculer $\frac{3}{4}$ de 30 %.

Calculer 20 % de 60 %.

Calculer 40 % de $\frac{3}{5}$.

Dans un lycée, 20 % des bacheliers sont des bacheliers technologiques, parmi lesquels 60 % ont eu un bac STMG. Déterminer la proportion d'étudiants ayant un bac STMG dans ce lycée.

Dans une entreprise, le quart des employés sont des cadres parmi lesquels 20 % sont des femmes. Quelle est la proportion de femmes cadres dans cette entreprise ?

Dans une entreprise, la moitié des pièces sont produites par une machine A. Le centième des pièces produites par la machine A sont défectueuses. Déterminer la proportion de pièces défectueuses et produites par la machine A dans cette entreprise.

En France, 60 % des voitures sont de marque française, parmi lesquelles le tiers sont de la marque Renault. Quelle est la proportion de voitures de la marque Renault en France ?

B) Évolutions et variations

B3. Passer d'une formulation additive à une formulation multiplicative

► Pour une **évolution** le **taux** t est souvent donné en **pourcentage**.

- Lorsque l'évolution est une **augmentation**, le **coefficient multiplicateur** est $1+t$.
- Lorsque l'évolution est une **diminution**, le **coefficient multiplicateur** est $1-t$.

Exemples :

Augmenter de 5 % revient à multiplier par :

$$\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05.$$

Diminuer de 5 % revient à multiplier par :

$$\left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,95.$$

Recopier et compléter les phases ci-dessous :

- Augmenter de 5 % c'est multiplier par...
- Diminuer de 10 % c'est multiplier par...
- Diminuer de 25 % c'est multiplier par...

Recopier et compléter les phases ci-dessous :

- Diminuer de 15 % c'est multiplier par...
- Augmenter de 15 % c'est multiplier par...
- Augmenter de 20 % c'est multiplier par...

Recopier et compléter les phases ci-dessous :

- Multiplier par 1,35 c'est augmenter de... %
- Multiplier par 0,85 c'est diminuer de... %
- Multiplier par 1,23 c'est augmenter de... %

a. Multiplier par 1,05 c'est une augmentation ou une diminution ? De combien ?

- b. Multiplier par 0,75 c'est une augmentation ou une diminution ? De combien ?

Pour 25 à 27, donner le coefficient multiplicateur correspondant.

a. Dans un jardin, le nombre de fleurs a diminué de 10 %.

- b. Lorsqu'une machine s'use, le nombre de pièces défectueuses fabriquées augmente de 5 %.

a. Les résultats au baccalauréat ont diminué de 2 % en 2024.

- b. Les taux d'intérêt ont été relevés de 1 %.

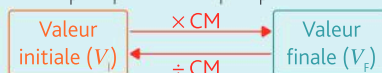
a. La consommation du papier et du carton dans le monde a augmenté de 20 %.

- b. Chaque année un journal perd 8 % de ses lecteurs.

B4. Appliquer un taux d'évolution pour calculer une valeur finale ou initiale

► Pour calculer une valeur finale ou initiale :

- On calcule le **coefficient multiplicateur** CM associé au taux d'évolution t : $CM = 1+t$.
- On multiplie ou on divise par CM selon la valeur recherchée. $V_f = V_i \times CM$ et $V_i = V_f \div CM$.



Exemple : Une carte de réduction permet d'obtenir une remise de 10 %.

- $CM = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$.
- Si un article est affiché à 25 €, alors le prix payé sera de $25 \times 0,9 = 22,50$ €.
- Si un article a coûté 27 € après la remise, alors le prix affiché était de $27 \div 0,9 = 30$ €.

Le prix d'un billet de train est de 76 €. Calculer le prix de ce billet si on applique une remise de 30 %.

Le prix d'un billet de train est de 42 € après une remise de 50 %. Calculer le prix initial avant la remise.

Après une baisse de 25 %, un article coûte 60 €. Quel était son prix initial ?

Sur une facture, on peut lire : « Montant hors taxes (HT) 510 € ». Calculer le montant toutes taxes comprises (TTC) sachant que le taux de TVA est de 20 % du montant HT.

Sur une facture, on peut lire : « Montant toutes taxes comprises (TTC) 240 € ». Calculer le montant hors taxes (HT) sachant que le taux de TVA est de 20 % du montant HT.

En France, l'inflation a été de 200 % environ entre janvier 1975 et décembre 1985. On suppose que tous les articles suivants ont suivi cette inflation.

a. Un article coûtait 250 F en janvier 1975. Quel était son prix en décembre 1985 ?

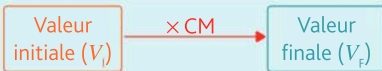
b. Un article coûtait 210 F en décembre 1985. Quel était son prix en janvier 1975 ?

Entre 2010 et 2025, le niveau moyen de pollution aux particules fines dans une ville a diminué de 20 % grâce à des mesures écologiques. En 2025, ce niveau est de $20 \mu\text{g} / \text{m}^3$.

Quel était le niveau moyen de pollution en 2010 ?

Un collectionneur a vendu un objet 1 250 € en réalisant un profit de 150 %. Quel était le prix d'achat initial de cet objet ?

B5. Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage



où CM est le coefficient multiplicateur, $CM = \frac{V_f}{V_i}$.

Le taux d'évolution est : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = CM - 1$.

Exemples :

- Le prix d'un article passe de 20 € à 23 €.

$$t = \frac{23 - 20}{20} = 0,15 = 15\%$$

Cela représente une hausse de 15 %.

- Le prix d'un article passe de 30 € à 24 €.

$$t = \frac{24 - 30}{30} = -0,2 = -20\%$$

Cela représente une baisse de 20 %.

Pour 36 à 43, donner le taux d'évolution.

$V_i = 50$ et $V_f = 75$. $V_i = 80$ et $V_f = 88$.

$V_i = 12$ et $V_f = 9$. $V_i = 36$ et $V_f = 45$.

$V_i = 85$ et $V_f = 51$. $V_i = 10$ et $V_f = 0,01$.

$V_i = 12$ et $V_f = 48$. $V_i = 1$ et $V_f = 0,999$.

Entre 1960 et 2020, la population mondiale est passée de 3 milliards à 7,8 milliards d'individus. Calculer le taux d'évolution en pourcentage, durant cette période.

Un pain a pour masse 550 g avant cuisson. Après cuisson, sa masse est réduite à 400 g. Quel est le pourcentage de diminution de masse (arrondir à 1 %) ?

Le prix d'une action boursière était de 120 € il y a un an. Aujourd'hui, elle se vend à 210 €. Calculer le pourcentage d'évolution du prix de vente de cette action.

Un groupe automobile est passé de 32 000 véhicules vendus en 2018 à 24 000 véhicules vendus en 2019. Calculer le taux d'évolution en pourcentage durant cette période.

Un randonneur commence sa randonnée avec une réserve d'eau de 2 litres. À l'arrivée, il lui reste 0,4 litre. Quel est le pourcentage de diminution de sa réserve d'eau au cours de la randonnée ?

Lors d'une promotion, le prix de vente d'une voiture est passé de 30 000 € à 25 000 €. Quel est le pourcentage de baisse appliquée sur le prix de la voiture ?

B6. Interpréter un indice base 100 ; calculer un indice ; calculer le taux d'évolution entre deux valeurs

Interpréter un indice de base 100

On choisit une date de référence à laquelle on associe la valeur 100.

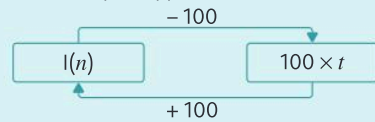
L'indice à la date n est donné par la formule :

$$I(n) = \frac{\text{valeur à la date } n}{\text{valeur à la date de référence}} \times 100$$

En pratique, on calcule souvent les indices par proportionnalité.

Calculer un indice et le taux d'évolution entre deux valeurs

Il y a un lien direct entre l'indice à la date n et le taux d'évolution en % par rapport à l'année de référence.



Exemple :

On propose un indice pour suivre l'évolution du SMIC horaire brut en France en prenant pour base 100 l'année 2020 (source INSEE).

Année	2020	2021	2022
Montant SMIC brut en €	10,15	10,48	10,85
Indice	100		

Les indices du SMIC correspondant aux années 2021 et 2022 sont :

$$I(2021) = \frac{10,48}{10,15} \times 100 \approx 103,25$$

$$I(2022) = \frac{10,85}{10,15} \times 100 \approx 106,90$$

Le SMIC a donc augmenté de 3,25 % environ entre 2020 et 2021 et de 6,9 % environ entre 2020 à 2022.

Attention ! On ne peut pas lire directement l'évolution entre 2021 et 2022 par simple soustraction.

Recopier et compléter le tableau suivant avec les indices manquants.

Valeurs	65	78	104
Indices	100		

Recopier et compléter le tableau suivant avec les indices manquants.

Valeurs	209	220	275
Indices		100	

Le tableau suivant présente la population des USA en millions d'habitants. Déterminer les indices manquants dans ce tableau (arrondir au dixième).

Année	2000	2010	2020
Population	282,2	309,4	329,5
Indice	100		

En reprenant les données de l'exercice précédent, calculer le taux d'évolution :

- entre 2000 et 2010.
- entre 2010 et 2020.

En reprenant les données de l'exercice précédent, calculer le taux d'évolution :

- entre 2018 et 2021.
- entre 2016 et 2021.

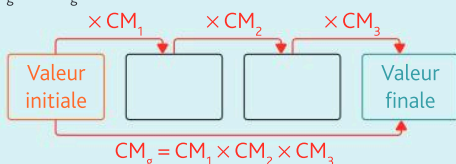
On suit le cours mensuel d'une action à l'aide d'un indice qui a été fixé à 100 en janvier 2022. Cette même année, en juin, l'indice était de 80 et il s'élevait à 128 en septembre.

Recopier et compléter la phrase suivante : Le cours de cette action a ... de ... % entre janvier et juin mais elle a ensuite ... de ... % entre juin et septembre.

B7 Calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives

► Pour calculer le taux d'évolution équivalent à plusieurs évolutions successives :

- on calcule le coefficient multiplicateur de chaque évolution : $CM_i = 1 + t_i$;
- on en déduit le coefficient multiplicateur global CM_g en multipliant tous les coefficients précédents ;
- on détermine le taux d'évolution global t_g : $t_g = CM_g - 1$.



Exemple :

Un magasin prévoit d'augmenter ses prix de 10 % en janvier, puis de les diminuer de 5 % en février.

Quel aura été le taux d'augmentation global durant ces deux mois ?

- Hausse de 10 % : $CM_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$.
- Hausse de 5 % : $CM_2 = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$.
- $CM_g = CM_1 \times CM_2 = 1,1 \times 0,95 = 1,045$.
- $t_g = CM_g - 1 = 0,045 = \frac{4,5}{100}$.

Les prix auront globalement augmenté de 4,5 % durant ces deux mois.

Attention ! Les taux d'évolution ne s'ajoutent pas.

Pour 56 à 59, donner le taux d'évolution équivalent à la série d'évolution proposée.

Une baisse de 20 % suivie d'une baisse de 10 %.

Deux hausses successives de 20 %.

Une hausse de 40 % suivie d'une baisse de 50 %.

Une baisse de 30 %, suivie d'une baisse de 20 % et d'une hausse 50 %.

En deux ans, le prix d'un article a augmenté de 50 %. La première année, il a augmenté de 20 %. De quel taux a-t-il augmenté la deuxième année ?

Un produit a augmenté de 5 % en 2024, puis de 10 % en 2025.

Quel est le taux d'évolution global du prix du produit sur ces deux années ?

Une entreprise a réalisé une augmentation de 10 % de ses ventes au mois de janvier, puis une baisse de 10 % en février. Quel est le taux d'évolution global des ventes sur ces deux mois ?

Le nombre de visiteurs d'un site Web a augmenté de 30 % en 2023, puis de 20 % en 2024. Quel est le taux d'évolution global du nombre de visiteurs pendant ces deux années ?

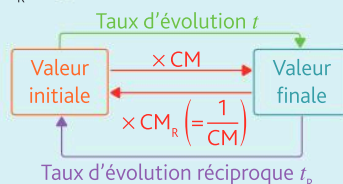
Les revenus d'une start-up ont augmenté de 150 % au premier semestre de 2024, puis de 200 % au second semestre. Quel est le taux d'évolution global des revenus de la start-up sur l'ensemble de l'année 2024 ?

Un investissement a rapporté 10 % d'intérêt chaque année pendant deux ans. Quel est le taux d'évolution global de l'investissement sur ces deux années ?

B8 Calculer un taux d'évolution réciproque

► Pour revenir à la valeur initiale après une évolution de taux t , on applique une nouvelle évolution, appelée évolution réciproque, de taux d'évolution associé t_R , appelé **taux d'évolution réciproque**.

- On calcule le coefficient multiplicateur CM de l'évolution initiale : $CM = 1 + t$.
- Puis on détermine le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque : $CM_R = \frac{1}{CM}$;
- Enfin, on détermine le taux d'évolution réciproque : $t_R = CM_R - 1$.



Exemple : Au premier semestre 2020, les prix de l'immobilier avaient baissé de 20 %. Quel taux d'évolution devrait s'appliquer pour revenir aux prix initiaux ?

• $CM = 1 + t = 1 + \left(-\frac{20}{100}\right) = 0,8$.

• $CM' = \frac{1}{CM} = \frac{1}{0,8} = 1,25$.

• $t' = CM' - 1 = 0,25 = 25\%$.

Pour revenir aux valeurs initiales, les prix devront augmenter de 25 %.

Pour l'ensemble des exercices, on pourra utiliser le tableau ci-dessous :

x	0,2	0,25	0,5	0,7	0,75
$\frac{1}{x}$	5	4	2	1,43	1,33

x	1,2	1,25	1,5	2,5	
$\frac{1}{x}$	0,83	0,8	0,67	0,4	

* Les valeurs ont été arrondies à 0,01.

Pour 66 à 68, donner le taux d'évolution réciproque et l'interpréter.

- a. Hausse de 25 %
- b. Baisse de 75 %

- a. Baisse de 50 %
- b. Hausse de 150 %

- a. Hausse de 50 %
- b. Baisse de 25 %

Une paire de sneakers est soldée à 84 € après une remise de 30 %. Quel est le taux d'évolution réciproque, arrondi au %, pour calculer le prix initial ?

Un produit soumis à une taxe de 20 % coûte 18 € toutes taxes comprises. Quel est le taux d'évolution réciproque, arrondi au %, à appliquer pour déterminer le prix hors taxes ?

C) Calcul numérique et algébrique

C9. Effectuer des opérations et des comparaisons entre des fractions simples

Comparaison de fractions

Deux fractions ayant le même dénominateur strictement positif sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$ car $2 < 4$.

Si les dénominateurs ne sont pas égaux, on réduit les fractions au même dénominateur puis on compare.

Exemple : $\frac{7}{3} > \frac{9}{4}$

car $\frac{7}{3} = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} = \frac{28}{12}$; $\frac{9}{4} = \frac{9 \times 3}{4 \times 3} = \frac{27}{12}$ et $28 > 27$.

Addition ou soustraction de fractions

On ajoute ou on soustrait les numérateurs de deux fractions ayant le même dénominateur et on garde ce dénominateur commun.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \quad \text{où } b \neq 0.$$

Lorsque les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les réduit au même dénominateur, puis on applique la règle précédente.

Exemples : $\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{7 \times 4} - \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{8}{28} - \frac{21}{28} = -\frac{13}{28}$$

Produits de fractions

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Il est inutile de les réduire au même dénominateur.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{où } b \neq 0 \quad \text{et } d \neq 0$$

Exemple : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

Quotient de fractions

Pour diviser par un nombre non nul, on multiplie par son inverse.

Exemples : $\frac{5}{3} \div \frac{9}{2} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{10}{27}$

$$\frac{2}{9} \div 5 = \frac{2}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{45}$$

Comparer les fractions suivantes :

a. $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{12}$ b. $\frac{7}{3}$ et $\frac{8}{3}$ c. $\frac{5}{6}$ et $\frac{1}{12}$

Pour 72 à 74, recopier et comparer les fractions en utilisant les symboles $<$, $>$ ou $=$.

a. $\frac{1}{5} \dots \frac{3}{15}$ b. $\frac{3}{20} \dots \frac{13}{60}$ c. $\frac{12}{75} \dots \frac{6}{25}$

a. $\frac{4}{5} \dots \frac{5}{6}$ b. $\frac{19}{40} \dots \frac{20}{50}$ c. $\frac{40}{41} \dots \frac{30}{31}$

a. $\frac{1}{5} \dots \frac{-1}{4}$ b. $\frac{-80}{20} \dots -4$ c. $-1 \dots \frac{-5}{6}$

Pour 75 à 77, calculer et écrire sous forme irréductible.

a. $\frac{1}{6} + \frac{5}{12}$ b. $\frac{1}{5} \times \frac{7}{7}$ c. $\frac{4}{3} \div \frac{7}{5}$

a. $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{3} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$

a. $2 - \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{7}\right)$ b. $4 \times \frac{5}{3} + \frac{4}{3}$ c. $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} \div \frac{7}{3}$

C10 Effectuer des opérations sur les puissances

► Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $a^1 = a$

n facteurs

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a $a^0 = 1$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, n et m entiers relatifs non nuls :

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples : $\frac{3^4}{3^5} = 3^{4-5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$$2^3 \times 4^2 = 2^3 \times (2^2)^2 = 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

► Simplifier les calculs ci-dessous afin de ne faire apparaître qu'une seule puissance de 5.

a. $5 \times 5 \times 5 \times 5$

b. $5^2 \times 5^3$

► Simplifier les calculs ci-dessous afin de ne faire apparaître qu'une seule puissance de 10.

a. $10^5 \times 10^4$

b. $10^{-5} \times 10^3$

c. $\frac{10^5}{10^4}$

d. $\frac{10^{-5}}{10^3}$

► Simplifier les calculs ci-dessous afin de ne faire apparaître qu'une seule puissance de 10.

a. $50^5 \times \frac{10^7}{5^5}$

b. $20^{-5} \times \frac{10^8}{2^{-5}}$

► Simplifier les calculs ci-dessous afin de ne faire apparaître qu'une seule puissance de 7.

a. $\frac{7^3}{7^2}$

b. $7^4 \times 7^{-5}$

c. $(7^3)^2$

► Écrire le nombre suivant sous la forme a^n avec $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. $5^6 \times (4^2)^3$

b. $4^3 \times 7^6$

► Simplifier les calculs ci-dessous afin de ne faire apparaître qu'une seule puissance de 3.

a. $\frac{3^5 \times 3^4 \times 3^{-2}}{3^2}$

b. $\frac{3^3 \times (3^3)^2}{3^5}$

c. $\frac{81}{27}$

► Écrire $\frac{25^3}{(2^3 \times 20)^2}$ sous la forme $2^a \times 5^b$.

► Pour 85 à 87, simplifier au maximum (a , b et x sont des réels non nuls).

a. $\frac{(2^2 \times 3^3)^2 \times 9}{12^2}$

b. $\frac{(x^2 \times x^3)^2 \times x}{x^2}$

a. $\frac{3^2 \times 5^3 \times 25}{75^3}$

b. $a^2 \times \frac{b^3}{(ab)^2}$

► Le résultat ne devra pas comporter de quotient.

a. $\frac{(ab)^3 b^{-4}}{(a^3 b)^2}$

b. $\frac{a^3 b^5 c^{-3}}{(b^2 c)^3}$

► C11. Passer d'une écriture d'un nombre à une autre (décimale, fractionnaire, scientifique)

► Un **nombre décimal** peut s'écrire sous une **forme fractionnaire** (la fraction sera irréductible) ou sous la **forme scientifique** : $a \times 10^n$ où a est un nombre réel tel que $a \in [1; 10[$ et n un entier relatif.

Exemple :

• Forme décimale : 12,14.

• Forme fractionnaire irréductible : $\frac{1214}{100} = \frac{607}{50}$.

• Écriture scientifique : $1,21 \times 10^3$.

► Donner une écriture fractionnaire des nombres suivants :

a. 0,5

b. 2,8

c. 2,56

► Pour 89 et 90, donner l'écriture fractionnaire irréductible des nombres proposés.

a. 3,9

b. 0,061

c. 1,09

a. 45,5

b. 0,64

c. 4,6

► Pour 91 à 94, donner l'écriture décimale des nombres proposés.

a. $\frac{2311}{10}$

b. $\frac{211}{10000}$

c. $\frac{45}{100}$

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{3}{4}$

c. $\frac{19}{4}$

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{19}{20}$

a. $\frac{16 \times 10^9}{8 \times 10^{11}}$

b. $\frac{3 \times 10^3}{5 \times 10^2}$

► Pour 95 et 96, donner l'écriture scientifique des nombres proposés.

a. 52,4

b. 0,48

c. 0,08

a. 1235,4

b. 0,026

c. Un million

► Pour 97 et 98, faire le calcul et donner l'écriture scientifique du résultat.

a. $0,5 \times 10^2 \times 6 \times 10^3$

b. $3 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-3}$

a. $\frac{4 \times 10^{-3}}{8 \times 10^2}$

b. $\frac{2 \times 10^2}{5 \times 10^4}$

Reproduire et compléter le tableau suivant :

Écriture décimale	Écriture fractionnaire irréductible	Écriture scientifique
0,023		
		29×10^{-2}
	$\frac{7}{4}$	

C12. Estimer un ordre de grandeur

L'ordre de grandeur d'une valeur est la puissance de 10 qui s'en rapproche le plus. Il permet notamment de donner une valeur approchée d'une grandeur physique.

Si x est un nombre dont l'écriture scientifique est $x = a \times 10^n$ où $a \in [1; 10[$ et n entier relatif, l'ordre de grandeur de x est :

- 10^n si $1 \leq a < 5$
- 10^{n+1} si $5 \leq a < 10$

Exemple :

La distance Terre-Lune est d'environ 384 400 km. Comme $384\,400 = 3,844 \times 10^5$ et 3,844 est entre 1 et 5, l'ordre de grandeur de cette distance est 10^5 km.

Les ordres de grandeur sont utiles pour estimer rapidement le résultat d'un calcul.

Donner un ordre de grandeur des nombres suivants :

- a. 3×10^9 b. 6×10^9 c. $2,1 \times 10^4$

Donner un ordre de grandeur des nombres suivants :

- a. 1 352 400 b. 0,028 9 c. 839 526

a. Quel est l'ordre de grandeur de la hauteur de la tour Eiffel ?

b. Quel est l'ordre de grandeur de la hauteur du mont Blanc ?

c. Quel est l'ordre de grandeur de la hauteur du mont Everest ?

Donner un ordre de grandeur des résultats suivants :

- a. 102×99 b. $\frac{1100}{9}$
c. $1,1 \times 10^{15} + 5,1 \times 10^{-9}$

Donner un ordre de grandeur des résultats suivants sous la forme d'une puissance de dix :

- a. $\frac{52,4 \times 10^3}{2 \times 10^5 \times 2,45 \times 10^{12}}$
b. $\frac{301 \times 10^5}{500 \times 10^{-3} \times 5,9 \times 10^{-1}}$

Donner la bonne réponse en utilisant un ordre de grandeur des nombres mis en jeu.

1. $86\,251 + 15\,284 = \dots$
a. 91 805 b. 1 110 805 c. 101 535
1. $237,1 \times 0,96 = \dots$
a. 137,96 b. 227,616 c. 2 207,616

C13. Conversions d'unités

Pour effectuer des conversions d'unités, on utilise généralement des tableaux.

Unités de longueur : unité légale de mesure : le mètre (m)
Le tableau de conversion comporte une colonne par unité.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	3	4	0			
		0,	0	0	1	2

Exemples :

$34 \text{ dm} = 340 \text{ m}$; $12 \text{ mm} = 0,0012 \text{ dam}$

Unités d'aire : unité légale de mesure : le mètre carré (m²)
Le tableau de conversion comporte deux colonnes par unité.

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
			1 2	0 0	0 0	

Exemple :

$12 \text{ m}^2 = 120\,000 \text{ cm}^2$

Unités de capacité : unité légale de mesure : le litre (L)
Le tableau de conversion comporte une colonne par unité.

Unités de volume : unité légale de mesure : le mètre cube (m³)
Le tableau de conversion comporte trois colonnes par unité.

Conversions unités de volume/unités de capacité :

$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$

km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
			kl hL daL	L	dL cL mL	
					1, 5 4 8	

Exemple :

$1\,548 \text{ cm}^3 = 1,548 \text{ dm}^3 = 1,548 \text{ L}$

Unités de masse : unité légale de mesure : le gramme (g)
Le tableau de conversion comporte une colonne par unité.

t	q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
		0,	0	0	1	5	3	

Exemple :

$153 \text{ cg} = 0,00153 \text{ kg}$

Unités de temps

$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$; $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$; $1 \text{ jour} = 24 \text{ h}$

Exemples :

- $32 \text{ h} = 32 \times 60 = 1\,920 \text{ min}$
- $4,5 \text{ h} = 4 \text{ h} + 0,5 \text{ h} = 4 \text{ h} + 0,5 \times 60 \text{ min} = 4 \text{ h } 30 \text{ min}$

- a. Convertir 3 km en mètres.
b. Convertir 1 m² en cm².
c. Convertir 100 hm³ en km³.

Pour 107 à 113, effectuer les conversions suivantes.

- a. 12 m = ... cm b. 22 hm = ... km
a. 2 000 cm² = ... m² b. 500 hm² = ... km²
a. 50 000 cm³ = ... m³ b. 10 dm³ = ... cm³

- a. 4 kg = ... hg b. 15 g = ... dg
 a. 1 547 mg = ... kg b. 125 dg = ... mg
 a. 4 h = ... min b. 360 min = ... h
 a. 140 min = ... h ... min
 b. 14 h 15 min = ... min

- Convertir les longueurs suivantes :
 a. la hauteur de la tour Eiffel, 300 m, en cm.
 b. La taille d'un moustique de 0,5 cm en m.
 c. La distance Bordeaux-Paris, 587 km en dm.

- Convertir les aires suivantes :
 a. La superficie d'un terrain de football de 7 000 m² en hm².
 b. La surface d'une pièce de 2 euros, 2 083 mm² en m².

- a. Un chat vit en moyenne 15 ans. Convertir en jours.
 b. Le record du monde pour un marathon est de 7 796 s. Convertir en heure, minute et seconde.

Pour 117 à 119, effectuer les conversions suivantes.

- a. 12 cm³ = ... mL b. 2L = ... cm³
 a. 2000 cm³ = ... L b. 500 mL = ... dm³
 a. 3,2 t = ... kg b. 250 kg = ... t

C14. Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une équation du type : $x^2 = a$

➤ Résoudre une équation du premier degré

Pour isoler l'inconnue d'un côté du symbole « = », on peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation. On peut également multiplier ou diviser les deux membres de l'équation par un même nombre non nul.

L'équation obtenue ainsi a alors les mêmes solutions que la précédente. On dit qu'elles sont équivalentes.

- Associer chacune des équations suivantes à sa solution :
 a. $2x - 12 = 8$ 1. -10
 b. $2x - 12 = 8x$ 2. 10
 c. $-2x - 12 = 8$ 3. -2
 d. $2x + 12 = 8x$ 4. 2

Pour 121 à 126, donner la solution de chacune des équations.

- $x - 3 = 8$ $5x = -15$ $\frac{x}{4} = -3$
 $3x - 5 = 1$ $\frac{x}{3} - 5 = 1$ $\frac{x-5}{3} = 1$

Pour 127 à 133, résoudre chacune des équations.

- $3x = 2x + 8$ $-4x + 3 = 9$
 $5(x - 2) = -20$
 $7x = 3x + 5$ $-5x - 2 = 13$
 $4(x - 3) = -18$
 a. $x^2 + x(3 - x) = 5$ b. $(2x - 5)(x - 3) = 2x^2 + 7$

➤ Résoudre une inéquation du premier degré

On applique la même méthode que l'équation en isolant l'inconnue d'un côté du symbole « < », « > ».

Attention ! l'inégalité change de sens si on multiplie ou on divise chaque membre par un même nombre négatif non nul.

Associer chacune des inéquations suivantes à sa solution :

- a. $6x - 5 \geq 7$ 1. $] -\infty ; -2]$
 b. $7 - 2x \geq 3$ 2. $] -\infty ; 2]$
 c. $-4x + 1 \leq 9$ 3. $[-2 ; +\infty[$
 d. $2x - 12 \geq 8x$ 4. $[2 ; +\infty[$

Pour 135 à 139, résoudre chacune des inéquations.

- $4x \geq 8$ $3x \leq -9$ $-5x > 20$
 a. $7x + 8 > 5x - 5$ b. $-5x + 6 \geq 2x - 4$
 c. $3(x - 5) \geq 7x + 1$
 a. $(x + 3)(x - 5) < x^2 - 4$
 b. $x(x + 7) \geq (x - 3)(x + 3)$
 c. $\frac{5x - 2}{9} > \frac{3 + 4x}{7}$

➤ Résoudre une équation du type $x^2 = a$

L'équation $x^2 = c$ admet :

- 2 solutions si $c > 0$: $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$
- 1 solution si $c = 0$: $x = 0$
- aucune solution réelle si $c < 0$

- L'équation $4x^2 = 16$ a pour solutions :
 a. 4 et -4 b. 2 et -2 c. 8 et -8
 d. $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ e. $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$

Pour 141 à 143, résoudre chacune des équations.

- a. $x^2 = 16$ b. $x^2 = 5$ c. $x^2 = 0$
 a. $4x^2 = 64$ b. $-5x^2 = -125$ c. $3x^2 - 12 = 15$
 a. $\frac{x^2}{3} = 12$ b. $5x^2 = -125$ c. $5(x^2 + 3) = 15$

C15. Déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré

► **Déterminer le signe d'une expression du premier degré**

Une expression du premier degré est une expression de la forme $A(x) = mx + p$ où m est un réel non nul et p un réel. Pour déterminer le signe de $A(x)$, on résout $A(x) = 0$ et on observe le **signe de m** .

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$$

Si $m > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx + p$	-	0	+

Si $m < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $mx + p$	+	0	-

Pour 144 à 147, résoudre les équations.

- $2x + 2 = 0$
- $5 + 3x = 0$
- $-4x + 7 = 0$
- $5 - x = 0$

Pour 148 à 155, déterminer le signe de $A(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.

- $A(x) = 3x + 2$
- $A(x) = 5 - 4x$
- $A(x) = 3 - 7x$
- $A(x) = x + 2$
- $A(x) = -5x - 7$
- $A(x) = -x - \frac{2}{7}$
- $A(x) = 5 - \frac{2}{3}x$
- $A(x) = \frac{x}{5} + 1$

► **Déterminer le signe d'une expression factorisée du second degré**

Une expression factorisée du second degré est de la forme $A(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où a est un réel non nul et x_1 et x_2 sont deux réels, appelés les **racines** de A .

Pour déterminer le signe de $A(x)$, on observe le **signe de a** . Supposons que $x_1 \leq x_2$.

Si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	-	0	+

Si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		-	0	+	0	-

Pour 156 à 161, déterminer le signe de $A(x)$ à l'aide d'un tableau de signes.

- $A(x) = 2(x - 4)(x - 1)$
- $A(x) = 3(x + 2)(x - 5)$
- $A(x) = -5(x + 3)(x + 2)$
- $A(x) = \frac{1}{3}(x - 3)(x + 2)$
- $A(x) = (3x - 6)(x - 2)$
- $A(x) = (5 - x)(x + 3)$

C16. Isoler une variable dans une égalité ou une inégalité qui en comporte plusieurs

► Comme dans la résolution d'une équation ou d'une inéquation, on **isole la grandeur recherchée** en appliquant les mêmes opérations aux deux membres de l'égalité ou de l'inégalité.

Exemple : Vitesse de coupe : V_C

En usinage, la vitesse de coupe est la distance (en mètres) parcourue en une minute par une dent de la fraise. On sait que $V_C = \frac{\pi \times D \times N}{1000}$, où D est le diamètre (en mètres) de la pièce à usiner et N est la vitesse de rotation (tours/min). Pour exprimer N en fonction de V_C et D , on va isoler N en considérant V_C et D comme des constantes.

$$V_C = \frac{\pi \times D \times N}{1000}$$

$\Leftrightarrow 1000 \times V_C = \pi \times D \times N$
On multiplie par 1 000 de chaque côté

$$\Leftrightarrow \frac{1000 \times V_C}{\pi \times D} = N$$

On divise par $\pi \times D$ de chaque côté

- Exprimer, dans chaque cas, a en fonction de b et c .
 - a. $a - 5b + 4c = 6$
 - b. $3a + 4b - 5c = 2$
 - c. $ab + 3c = 4$
 - d. $\frac{c}{a} + 4b - 5 = 3$
- La surface latérale S d'un cylindre est donnée par $S = 2\pi \times r \times h$, où r est le rayon de la base et h la hauteur. Exprimer h en fonction de S et r .
- Le volume V d'un cylindre est donné par $V = \pi \times r^2 \times h$, où r est le rayon de la base et h la hauteur. Exprimer r en fonction de V et h .
- Un rectangle a pour longueur L et pour largeur l . Son périmètre p s'obtient grâce à $p = 2 \times (L + l)$. Exprimer L à l'aide p et de l .
- L'aire S d'un trapèze est égale à $S = \frac{(B+b)}{2} \times h$ où B est la longueur de la grande base, b , la longueur de la petite base et h la hauteur. Exprimer B à l'aide de S , h et b .

C17. Effectuer une application numérique d'une formule (notamment celles utilisées dans d'autres disciplines)

- Chaque variable est remplacée par sa valeur dans la formule. Il peut être nécessaire de convertir des unités.

Exemple : Le volume d'un pavé droit est :

$V = L \times l \times h$. Déterminer le volume du pavé droit tel que $L = 5$ cm, $l = 2$ et $h = 3$ cm.

$V = 5 \times 2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$. Son volume est de 30 cm^3 .

- Le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

En prenant $\pi \approx 3$, déterminer une valeur approchée du volume de la boule de rayon 5 cm.

- La surface d'un trapèze est $S = \frac{a+b}{2} \times h$ où a est la mesure de la grande base, b celle de la petite base et h la hauteur. Déterminer la surface du trapèze dont la petite base mesure 4 cm, la grande base 5 cm et la hauteur 3 cm.

- Le taux d'évolution entre la valeur finale V_f et la valeur initiale V_i est $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$.

Déterminer le taux d'évolution du prix d'un article dont le prix passe de 20 € à 26 €.

- En économie l'élasticité-prix de la demande est donnée par la formule :

$$e = \frac{\frac{\text{variation de la demande}}{\text{demande initiale}}}{\frac{\text{variation du prix}}{\text{prix initial}}}$$

Déterminer l'élasticité-prix lorsque la demande d'un article passe de 100 à 80 unités pendant que son prix passe de 5 € à 3 €.

- La formule permettant de transformer des degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) en degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) est $F = 1,8C + 32$. Déterminer la température d'ébullition de l'eau, en $^{\circ}\text{F}$ sachant que l'eau bout à 100 $^{\circ}\text{C}$.

C18. Développer, factoriser, réduire une expression algébrique

- Développer**, c'est transformer un produit en sommes ou différences. Pour tous réels a , b et c :

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$\text{Cas particulier : } -(b+c) = -b-c$$

- Réduire**, c'est regrouper les termes « semblables »

- Factoriser**, c'est transformer une somme ou différence en produit.

Exemple :

$$(x+1)(x+2) - 5(x+1) = (x+1)(x+2-5) = (x+1)(x-3)$$

- Distributivité double :** Pour tous réels a , b , c et d :

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Exemple :

$$(2-x)(3+x) = 6+2x-3x-x^2 = -x^2-x+6$$

- Identités remarquables :** Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

Exemples

- Pour développer : $(x+2)^2 = x^2+4x+4$

- Pour factoriser : $x^2-4 = x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$

Pour 172 et 173, développer, réduire et ordonner.

- a. $2(x+5)$ b. $x(3-5x)$

- c. $(x-1)(x+2)$

- a. $(x+1)^2$ b. $(2-x)^2$

- c. $5(x+1)-(2x-3)$

Pour 174 à 176, factoriser.

- a. $2x+5x$

- b. $(x+1)+5(x+1)$

- c. x^2-16

- d. x^2-3x

- a. $(2x+1)(x-5)+2(x-5)$

- b. x^2+6x+9

- a. $(x+1)^2-(x+1)(2x-3)$

- b. $5x(7x-3)-10x$

- Associer chaque forme factorisée à sa forme développée :

Forme factorisée

Forme développée

- a. $(x-1)(x-2)$

- 1. x^2+3x+2

- b. $(x+1)(-x-2)$

- 2. x^2-3x+2

- c. $(x+1)(x+2)$

- 3. $-x^2-3x-2$

Pour 178 et 179, développer, réduire et ordonner.

- a. $3x(x+2)$

- b. $(x+7)(x-8)$

- c. $(x-0,1)(x-0,3)$

- a. $2(x+3)(x-3)$

- b. $(3x-7)(-x-1)$

Pour 180 à 182, factoriser (x et k sont des réels).

- a. x^2+9x

- b. x^2-81

- a. $2(x+4)-(x-2)(x+4)$

- b. $25x^2-16$

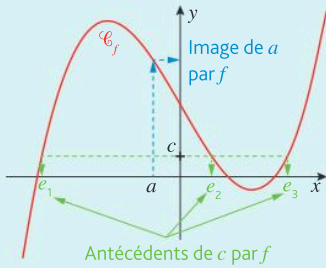
- a. $4x^2-k^2$

- b. $(3x-1)(2x+3)+9x^2-1$

D) Fonctions et représentations

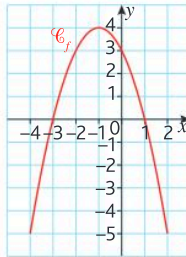
D19. Déterminer graphiquement des images et des antécédents

► Lecture d'images et d'antécédents

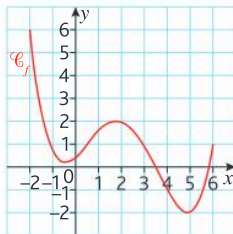


La lecture graphique est souvent approximative, elle est réalisée avec la précision permise par le graphique.

- Quelle est l'image de -2 ?
- Quel est l'antécédent de 4 ?
- Quels nombres ont pour image 0 ?
- De quel nombre -2 et 0 sont-ils les antécédents ?



Pour 184 à 186, utiliser la fonction f définie sur $[-2; 6]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre. On répondra avec la précision permise par le graphique.



- Vrai ou faux ?
 - L'image de 5 par f est -2 .
 - -1 possède 2 antécédents par f .
 - -1 a pour image 4 par f .
 - 1 est l'image de 6 par f .
 - Tous les nombres de $[1; 2]$ ont trois antécédents par f .
- Parmi les propositions suivantes, trouver celle qui n'a pas le même sens que les autres.
 - L'image de 6 par f est 1 .
 - $f(6) = 1$.
 - 6 a pour antécédent 1 par f .

- Vrai ou faux ?
 - Pour tout $k \in [-2; 0]$, k possède exactement deux antécédents par f .
 - Pour tout $k \in [0; 1]$, k possède exactement quatre antécédents par f .
 - Pour tout $k \in [2; 6]$, k possède au moins un antécédent par f .

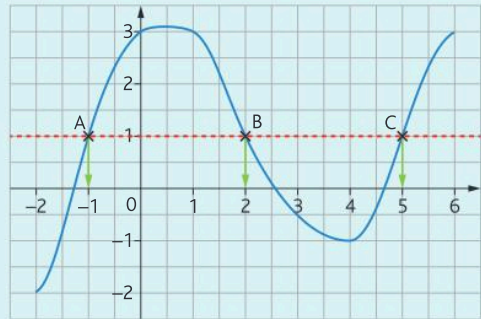
Pour chaque question, réécrire la proposition en utilisant le mot entre parenthèses. f est une fonction définie sur \mathbb{R} .

- 3 est l'image de 5 par f . (antécédent)
- 2 a pour antécédent 0 par f . (image)
- 1 et 5 sont les antécédents de -1 par f . (image)
- $f(6) = 2$. (image)

D20. Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type : $f(x) = k$, $f(x) < k$...

Une fonction f définie sur $[-2; 6]$ est représentée par la courbe bleue ci-dessous.

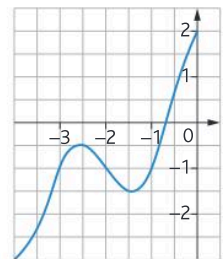
Résoudre l'équation $f(x) = 1$ et en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 1$.



- On trace la droite d'équation $y = 1$. Cette droite coupe la courbe aux points A, B et C dont les abscisses sont les solutions cherchées de l'équation $f(x) = 1$. On écrit $S = \{-1; 2; 5\}$.
- Pour résoudre l'inéquation $f(x) < 1$, trace la droite d'équation $y = 1$, et on cherche les abscisses des points de la courbe \mathcal{C}_f situés sous la droite d'équation $y = 1$. On écrit $S = [-2; -1[\cup]2; 5]$.

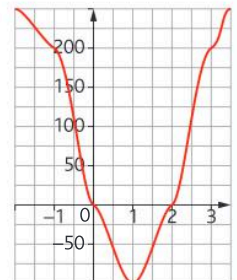
Une fonction f définie sur $[-4; 0]$ est représentée ci-contre :

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < -1$.

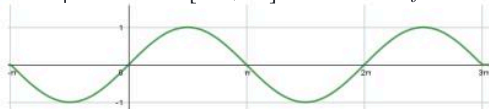


Une fonction g définie sur $[-2; 3,5]$ est représentée ci-contre :

- Résoudre l'inéquation $g(x) > 200$.
- Résoudre l'inéquation $g(x) \leq -50$.
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$.



On représente sur $[-\pi; 3\pi]$ une fonction f .



Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

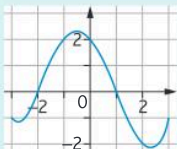
D21. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations

◆ Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

Soit f une fonction définie sur $[-3; 3]$ dont la représentation graphique, \mathcal{C}_f , est donnée dans un repère.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses : -2 et 1 .

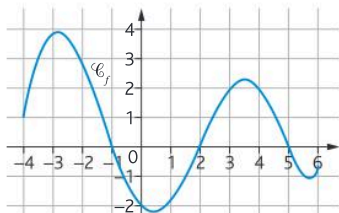
Lorsque \mathcal{C}_f est sous l'axe des abscisses, $f(x) < 0$, lorsque \mathcal{C}_f est au-dessus de l'axe des abscisses, $f(x) > 0$.



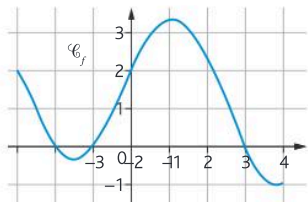
x	-3	-2	1	3	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour 191 à 193, la représentation graphique d'une fonction f dans un repère est donnée. Déterminer le signe de $f(x)$ avec la précision permise par le graphique.

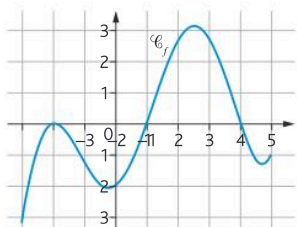
f est définie sur $[-4; 6]$



f est définie sur $[-3; 4]$

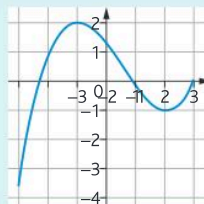


f est définie sur $[-3; 5]$



◆ Déterminer graphiquement les variations d'une fonction

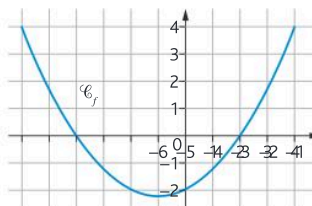
Soit f une fonction définie sur $[-3; 3]$ dont la représentation graphique, \mathcal{C}_f , est donnée dans un repère. Déterminer les abscisses des points pour lesquels la variation change.



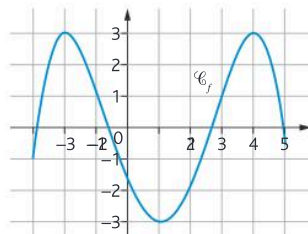
x	-3	-1	2	3
Variations de f		2	-1	0

Pour 194 à 196, la représentation graphique d'une fonction f dans un repère est donnée. Déterminer les variations de f avec la précision permise par le graphique.

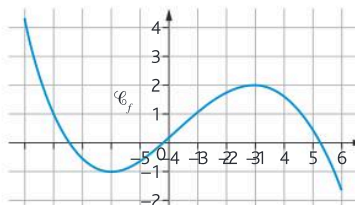
f est définie sur $[-6; 4]$



f est définie sur $[-3; 5]$



f est définie sur $[-5; 6]$



D22. Exploiter une équation de courbe (appartenance d'un point, calcul de coordonnées)

▶ Dans un repère, on note \mathcal{C}_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I . \mathcal{C}_f a pour équation $y = f(x)$.

Les points de \mathcal{C}_f ont pour coordonnées $x; f(x)$ (p) ou $x \in I$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 9.$$

Le point $A(-1; -8) \in \mathcal{C}_f$

car $f(x_A) = f(-1) = (-1)^2 - 9 = -8 = y_A$.

Soient f , la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

a. Les points $A(2; 3)$ et $B(-2; \frac{4}{3})$ appartiennent-ils à \mathcal{C}_f ?

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec les axes du repère.

Soit f , la fonction définie sur $[-3; 5]$ par $f(x) = \frac{3}{x+5}$. Soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

a. Montrer que le point $A(-2; 1)$ appartient à \mathcal{C}_f .

b. Calculer l'ordonnée du point B de \mathcal{C}_f , d'abscisse 4.

c. Calculer l'abscisse du point C de \mathcal{C}_f , d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

D23. Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur

On se place dans un repère.

▶ L'équation réduite d'une droite est :

• $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$ si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées ;

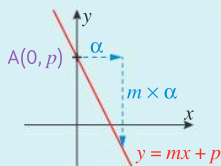
• $y = mx + p$ où $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. m est le coefficient directeur, p est l'ordonnée à l'origine.

▶ Tracer une droite

• Si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on peut déterminer les coordonnées de deux points appartenant à la droite. On pourra s'aider d'un tableau de valeurs :

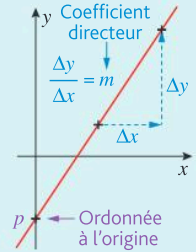
x	Valeur à choisir	Valeur à choisir
$y = mx + p$	Valeur à calculer	Valeur à calculer

• On peut aussi utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur. $A(0; p)$ est un point de la droite que l'on place. Pour placer un second point : avancer de α unités (où $\alpha > 0$) parallèlement à l'axe des abscisses et se déplacer de $m \times \alpha$ unités parallèlement à l'axe des



ordonnées (vers le haut si $m > 0$ et vers le bas si $m < 0$).

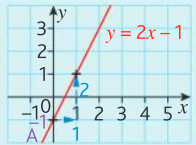
• Lorsque la droite est donnée par son coefficient directeur, on peut réaliser la construction précédente en remplaçant le point $A(0; p)$ par celui qui est donné.



Exemple : Tracer la droite d'équation $y = 2x - 1$.

• L'ordonnée à l'origine est -1 : on place le point A de coordonnées $(0; -1)$.

• Le coefficient directeur est 2. Comme $2 > 0$, pour construire un second point, on part de A, on avance de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses et on monte de 2 unités parallèlement à l'axe des ordonnées. On trace ensuite la droite passant par ces deux points.



Représenter, sur un même graphique, les droites d_1 , d_2 et d_3 d'équations respectives : $d_1: y = x - 3$, $d_2: x = 2$ et $d_3: y = -x + 2$.

Représenter, sur un même graphique, les droites d_4 et d_5 d'équations respectives : $d_4: y = 2x - 5$ et $d_5: y = -1,5x + 5$.

Représenter sur un graphique la droite d passant par $A(-2; 4)$ et ayant -1 comme coefficient directeur.

Représenter, sur un même graphique, les droites d_1 et d_2 . Pour cela, déterminer d'abord 2 points appartenant à chacune des droites à l'aide d'un tableau de valeurs.

a. $d_1: y = \frac{x}{9} - 3$

b. $d_2: y = \frac{3x + 1}{4}$

a. Sur un graphique, tracer la droite d_1 d'équation $y = \frac{x}{3} + 2$.

b. Sur le même graphique, tracer la droite d_2 ayant pour ordonnée à l'origine -2 et comme coefficient directeur 2.

D24. Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

▶ Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation réduite est de la forme $x = k$ où k est l'abscisse commune à tous les points de la droite.

▶ Si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation réduite est de la forme $y = mx + p$. On lit son ordonnée à l'origine ainsi que son coefficient directeur.

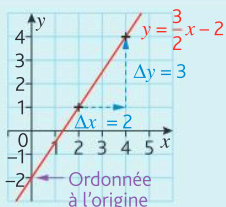
Exemple : Déterminer l'équation de la droite rouge, tracée ci-contre.

Le coefficient directeur est :

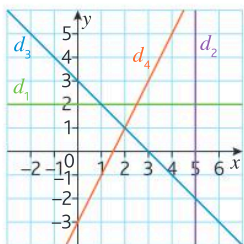
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$$

L'équation de la droite est :

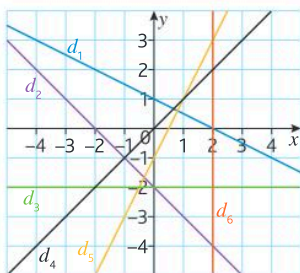
$$y = \frac{3}{2}x - 2$$



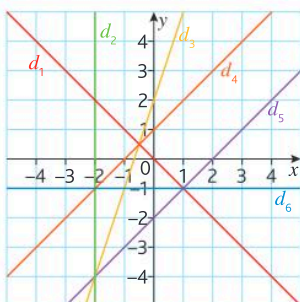
Lire sur le graphique les équations réduites des droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 .



Déterminer graphiquement, s'il existe, le coefficient directeur des droites.



Déterminer graphiquement, les équations réduites des droites.



D25. Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points

On se place dans un repère.

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts.

• Si $x_A = x_B$ la droite (AB) a pour équation $x = x_A$

• Si $x_A \neq x_B$ la droite (AB) a une équation du type $y = mx + p$.

Elle a pour **coefficient directeur** $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

On utilise son **ordonnée à l'origine** en utilisant les coordonnées du point A ou du point B.

Exemple : $A(2; 6)$ et $B(-2; 4)$.

Les abscisses sont différentes donc la droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{4 - 6}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Donc (AB) : $y = \frac{1}{2}x + p$.

A appartient à la droite (AB) donc :

$$6 = \frac{1}{2} \times 2 + p \Leftrightarrow p = 6 - 1 = 5$$

L'équation réduite de (AB) est $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Pour 207 à 210, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

A(2; 0) et B(1; 4) donc (AB) : ...

A(0; 1) et B(1; 3) donc (AB) : ...

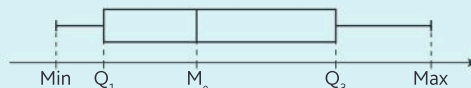
A(1/2; 2) et B(0; 2) donc (AB) : ...

A(1/6; -1) et B(2/3; 1) donc (AB) : ...

E) Représentations graphiques de données chiffrées

E26. Lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barre ou circulaire, un diagramme en boîte ou toute autre représentation

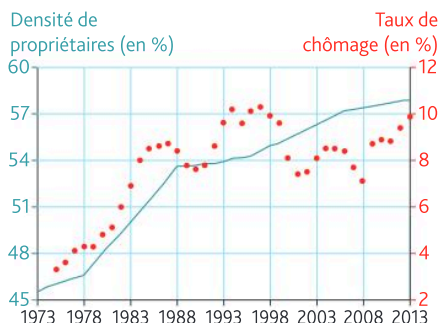
- Pour lire une **courbe** ou un **nuage de points**, on doit être attentif sur chacun des axes :
 - aux unités de graduation ;
 - aux grandeurs qui y sont représentées.
- Pour un **diagramme en barres** (ou en bâtons), les longueurs des barres sont proportionnelles aux effectifs de chaque classe.
- Pour un **histogramme**, les aires des rectangles sont proportionnelles aux effectifs de chaque classe.
- Pour un **diagramme circulaire**, les mesures des angles sont proportionnelles aux effectifs de chaque modalité.
- Un **diagramme en boîte** permet de lire sur l'axe des abscisses différents paramètres statistiques.



M_e est la **médiane** de la série statistique.

Q_1 = **premier quartile** et Q_3 = **troisième quartile**.

Le graphique suivant donne la densité (en %) de propriétaires et le taux de chômage (en %).



Source : INSEE, enquêtes Logement, enquêtes Emploi, Statistiques locales

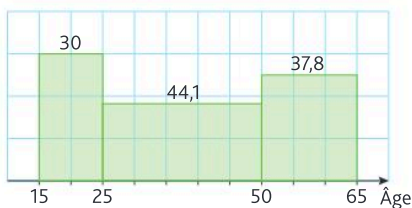
a. En 1993, quel était :

- La densité de propriétaires ?
- Le taux de chômage ?

b. Recopier et compléter la phase :

En... la densité de propriétaires était de 50 %, le taux de chômage était alors de... % environ.

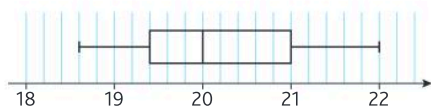
Voici la répartition du nombre de chômeurs (en milliers) dans une ville, selon leur âge.



a. Interpréter le nombre 44,1 du graphique.

b. Conjecturer ce que représente un carreau de ce graphique.

Le graphique suivant est le résultat d'une étude sur la quantité de sucre (en g) présent dans un verre de 200 ml de soda de différentes marques.



a. Lire la médiane (M_e) et l'interpréter.

b. Lire Q_1 et Q_3 .

c. Recopier et compléter : Environ 75 % des sodas ont une quantité de sucre supérieure à... g.

E27. Passer du graphique aux données et vice versa

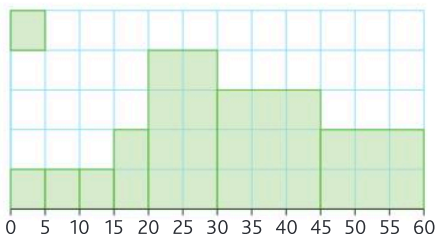
Passer du graphique aux données

Lorsqu'un graphique est donné (histogramme, diagramme circulaire, nuage de points, etc.), on repère les quantités représentées sur chaque axe afin de mettre en relation les données. On pourra utiliser un tableau de valeurs.

Passer des données au graphique

Lorsque des données sont proposées, on choisit le graphique le mieux adapté et on traduit chaque donnée à l'aide d'un point, d'un rectangle, d'un secteur angulaire, etc.

La répartition des distances (en km) domicile/travail des salariés d'une entreprise est donnée par l'histogramme ci-dessous.

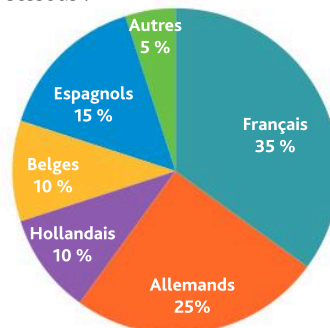


a. À combien de salariés correspondent 1 carreau ?

b. Recopier et compléter les effectifs du tableau ci-contre.

Dist (km)	Eff.
[0 ; 10[6
[10 ; 15[
[15 ; 20[
[20 ; 30[
[30 ; 45[
[45 ; 60[

En juillet 2022, une enquête a été réalisée sur les 600 clients d'un hôtel afin d'étudier leur nationalité. Les résultats sont donnés dans le diagramme circulaire ci-dessous :



a. À l'aide du graphique, compléter le tableau :

Nationalité	Effectif	Pourcentage
Français		
Allemands		
Hollandais		
Belges		
Espagnols		
Autres		
Total	600	

b. Construire le diagramme en barres correspondant au diagramme circulaire.

Pour entrer dans le chapitre

1

Développer à l'aide de la distributivité ou d'une identité remarquable

- Simple distributivité : $a(b + c) = ab + ac$
- Double distributivité : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Cas particulier : $-(a + b) = -a - b$
- Identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- 1 Développer, réduire et ordonner les nombres suivants :
- A = $2(n + 1)$ B = $-(n + 1)$
C = $(n + 1)(n + 2)$ D = $(n + 1)^2$

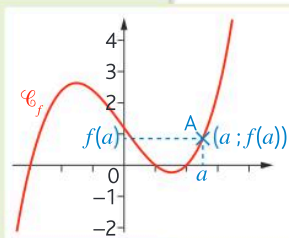
Calculer l'image d'un réel par une fonction

$f(a)$ est l'image du réel a par f où f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} avec $a \in I$

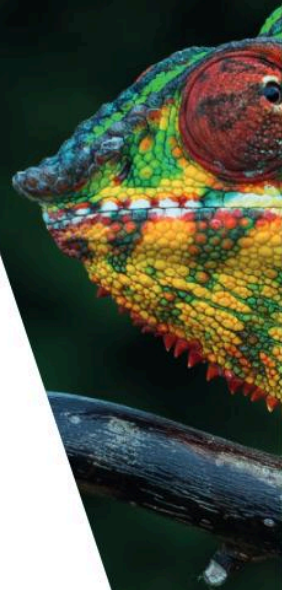
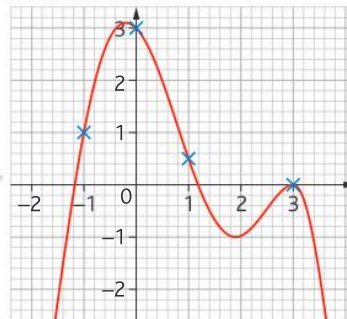
- 2 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - x + 3$
Déterminer l'image de 2 par f .
- 3 Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x + 1}{x + 3}$
Déterminer l'image de 3 par f .

Déterminer graphiquement des images par une fonction

- Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée, dans le repère ci-contre.
- Les points de la courbe ont des coordonnées de la forme $x; f(x)$ (où $x \in \mathbb{R}$).
- A est le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a et d'ordonnée $f(a)$.



- 4 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.
Avec la précision permise par le graphique, déterminer les images, par f de $-1, 0, 1$ et 3 .



Suites : généralités et variations



Focus métiers

Banque Assurance
Biomédical Finance

Les suites permettent de calculer une évolution (épargne sur un compte bancaire, épidémie...)



Découvre le métier de conseiller bancaire

hachette-clic.fr/25mfl002

Automatismes du chapitre

- B03** Passer d'une formulation additive à une formulation multiplicative 10
- C17** Effectuer une application numérique d'une formule 18
- E26** Lire un graphique, un histogramme, un diagramme en barres ou circulaire, un diagramme en boîte ou toute autre représentation..... 22

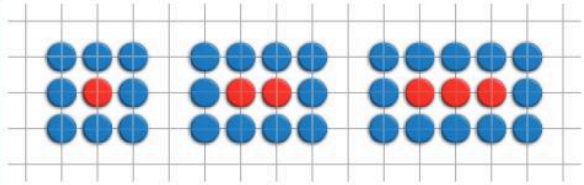
Un jeu de pions

D'après Eduscol 2022 « Introductions des suites arithmétiques et géométriques – Étude de motifs évolutifs (patterns) »



Objectif Découvrir les suites

Un jeu de plateau consiste à enfermer les pions de son adversaire. L'un des joueurs a des pions bleus, l'autre des pions rouges. Le but du jeu est d'enfermer les pions de l'adversaire de la façon suivante :



- 1 a. Combien faut-il de pions bleus pour enfermer un pion rouge ?
- b. Combien faut-il de pions bleus pour enfermer 2 pions rouges ?
- c. Combien faut-il de pions bleus pour enfermer 3 pions rouges ?
- d. Combien faut-il de pions bleus pour enfermer 4 pions rouges ?

- 2 En mathématiques, ce genre de situation, appelée « suite », se note $u(n)$. Ici $u(n)$ représente le nombre de pions bleus permettant d'enfermer n pions rouges. Recopier et compléter : $u(1) = \dots$; $u(2) = \dots$; $u(3) = \dots$; $u(4) = \dots$
- 3 Que représente $u(7)$? Calculer $u(7)$.
- 4 Conjecturer une expression pour $u(n)$, où n est un entier naturel non nul. Utiliser la notation u_n qui se lit « u indice n ».

» Cours p. 28

Une chenille à Versailles

Objectif Découvrir une suite définie par une relation de récurrence

Alain est le jardinier en chef du château de Versailles. Sur les 33 hectares du parc, il recense 230 000 pieds de buis (arbuste utilisé pour concevoir les « jardins à la française ») et constate que, chaque année, 20 % d'entre eux dépérissent et meurent. Les buis sont attaqués par la chenille de la pyrale (un papillon venu d'Asie) et un champignon, le *volutella buxi*.



- 1 a. Combien restera-t-il de pieds de buis sains dans un an ? Dans deux ans ?
- b. Soit $u(n)$ le nombre de pieds de buis sains après n années. Déterminer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
- c. Conjecturer une formule qui permet de déterminer le nombre de buis sains après $n + 1$ années connaissant le nombre de buis sains après n années.

- 2 Afin d'endiguer le phénomène, Alain décide de replanter chaque année 5 000 pieds de buis.
 - a. Combien y aura-t-il de pieds de buis sains dans un an ? Dans deux ans ?
 - b. Soit $v(n)$ le nombre de pieds de buis sains, en tenant compte des buis replantés, après n années. Vérifier que $v(3) = 129\,960$ et interpréter ce résultat.
 - c. Conjecturer une nouvelle formule qui permet de déterminer le nombre de buis sains après $n + 1$ années connaissant le nombre de buis sains après n années.

» Cours p. 28 et 30

Un post Instagram à succès ?

Calculatrice



Objectif Découvrir le sens de variation d'une suite

Dalal a publié une photo sur Instagram. Elle estime que le nombre de nouvelles personnes qui verront son post chaque jour peut être modélisé par une suite u telle que $u(n) = n^2 - n + 3$, avec u représentant le nombre de personnes qui visionnent son post la n ème journée.

1 En utilisant la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
$u(n)$							

2 D'après le tableau de valeurs, le nombre de vues du post va augmenter ou diminuer ?
La suite u semble-t-elle croissante ou décroissante ?

3 Exprimer $u(n+1)$ en fonction de n .

Rappel Identité remarquable :
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4 Exprimer $u(n+1) - u(n)$ en fonction de n .
En déduire le signe de $u(n+1) - u(n)$.

5 Recopier et compléter la phrase ci-dessous :
« Si $u(n+1) \geq u(n)$ pour tout n entier naturel, alors la suite u est ... ». Interpréter ce résultat dans le contexte.

» Cours p. 32

Combien rapporte un livret A ?

Calculatrice

Objectif Modéliser une situation avec des suites et rechercher un seuil

Au moment de votre naissance, vos parents décident de vous ouvrir un livret A. Le jour de votre naissance, vos parents déposent 1 000 € sur ce livret. Chaque année, 150 € sont déposés sur le livret à la date de votre anniversaire. Le livret est rémunéré à 3 % par an.



1 De quelle somme d'argent disposerez-vous lorsque vous aurez 1 an ?

2 De quelle somme d'argent disposerez-vous lorsque vous aurez 2 ans ?

3 Cette situation est modélisée à l'aide d'une suite u , où u_n désigne la somme d'argent disponible sur le livret à votre n ème anniversaire. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

a. Donner u_1 et u_2 .

b. Que représente u_{n+1} ?

4 Expliquer pourquoi $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.

5 En utilisant la calculatrice, déterminer l'âge à partir duquel la somme disponible sur votre livret dépassera les 4 000 €.

» Cours p. 28

Qu'est-ce qu'une suite ?

Définitions

- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
- Une suite numérique u , est une fonction définie sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{R} qui, à tout entier naturel n , associe son image $u(n)$.
- Certaines suites sont définies pour des entiers naturels n non nuls (dans $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$). De manière générale, une suite peut être définie pour tout entier naturel $n \geq k$, où k est un entier naturel quelconque.
- Les images $u(n)$ sont les termes de la suite, on peut noter u_n (« u indice n »).
- Le terme $u(n)$ ou u_n est appelé le terme général de la suite u ou le terme d'indice n ou le terme de rang n .
- La suite u peut aussi être notée (u_n) .

EXEMPLES

- La suite des premiers nombres impairs est : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9
Soit u la suite telle que u_n représente le n ième nombre impair.
Le terme de rang 1 est le premier terme u_1 .
Ici $u_1 = 1$ et $u_4 = 7$ est le quatrième terme, c'est le terme de rang 4.
- La liste 1 ; 5 ; 25 ; 625 ; 390 625 définit les premiers termes de la suite v telle que :
 $v_0 = 1, v_1 = 5, v_2 = 25, v_3 = 625$ et $v_4 = 390\,625$.
 - » v_0 est le premier terme, c'est le terme de rang 0.
 - » v_3 est le quatrième terme, c'est le terme de rang 3.

Remarque

Les phénomènes modélisés à l'aide des suites sont appelés des **phénomènes discrets**.

Différents modes de génération d'une suite

Définition 1

Une suite est définie par une formule explicite ou de manière fonctionnelle lorsque $u(n)$ ou u_n s'exprime en fonction de l'entier n .

EXEMPLES

- $u_n = n^2 + 3$
- $u(n) = 3n - 2$

Définition 2

Une suite est définie par récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme souvent u_0 ou u_1 (ou ses premiers termes) et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent (ou des précédents). Cette relation est appelée relation de récurrence.

EXEMPLES

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 : \text{premier terme} \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 : \text{relation de récurrence} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(1) = 2 : \text{premier terme} \\ u(n+1) = \frac{u(n)}{3} + 1 : \text{relation de récurrence} \end{array} \right.$$

1 Déterminer une formule explicite

EXO

➤ Déterminer la formule explicite permettant de calculer tous les termes de la suite u dont les trois premiers termes sont affichés dans la page de tableur ci-contre :

	A	B
1	n	u(n)
2	0	=1+A2^3
3	1	=1+A3^3
4	2	=1+A4^3

Méthode

- 1 On identifie la cellule correspondant à la valeur de n .
- 2 Puis on identifie la formule permettant de calculer $u(n)$ ou u_n .

➤

Réponse

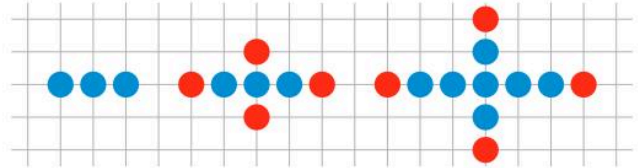
- 1 Pour chaque terme, on élève l'indice correspondant à la puissance 3 et on ajoute 1.
- 2 Ainsi $u(n) = 1 + n^3$ ou $u_n = 1 + n^3$

➤ Exercice 15 p. 41

2 Déterminer une formule par récurrence

EXO

➤ On donne les trois premières étapes de création d'un motif géométrique. Déterminer la formule de récurrence de la suite u permettant de compter le nombre de points obtenus à la n ième étape.



Méthode

- 1 On identifie le premier terme, celui-ci est souvent le terme d'indice 0 ou d'indice 1.
- 2 On identifie la formule permettant de passer d'une étape à la suivante.

➤

Réponse

- 1 À la première étape il y a 3 points donc $u_1 = 3$ ou $u(1) = 3$
- 2 On constate qu'à chaque étape on ajoute 4 points de plus qu'à l'étape précédente. Ainsi $u_{n+1} = u_n + 4$ ou $u(n+1) = u(n) + 4$

➤ Exercice 16 p. 41

3 Modéliser une situation à l'aide d'une suite

EXO

➤ Une ville de 100 000 habitants voit sa population augmenter de 4 % par an, mais perd 2 000 habitants (déménagement, décès) tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Méthode

- 1 On détermine la donnée qui correspond à n et celle qui correspond à u_n .
- 2 On isole le premier terme en restant vigilant sur son indice.
- 3 On traduit mathématiquement les données de l'énoncé, par exemple des pourcentages par des coefficients multiplicateurs.
- 4 On détermine la formule permettant de calculer un terme en fonction du précédent, c'est la formule de récurrence.

➤

Réponse

- 1 On appelle u la suite telle que u_n représente le nombre d'habitants dans n années.
- 2 Initialement il y avait 100 000 habitants donc $u_0 = 100\ 000$.
- 3 Chaque année la population augmente de 4 %, c'est-à-dire que, d'une année sur l'autre, le nombre d'habitants est multiplié par 1,04 et 2 000 habitants disparaissent.
- 4 Donc $u_{n+1} = 1,04u_n - 2\ 000$

➤ Exercice 22 p. 41

Suite définie à l'aide d'une formule explicite (ou d'une relation fonctionnelle)

Savoir-faire

- Soit u une suite définie sur \mathbb{N} à l'aide d'une relation fonctionnelle.
- Pour calculer un des termes de la suite, il suffit de remplacer n par la valeur souhaitée, dans la formule qui correspond à la relation fonctionnelle.
- Ce calcul correspond à la recherche de l'image de la valeur souhaitée par la fonction u .

EXEMPLES

Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2n - 3$

- Le premier terme est $u_0 = 0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3$
- Le troisième terme est $u_2 = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$
- $u_5 = 5^2 + 2 \times 5 - 3 = 32$ est le sixième terme de la suite

Remarque

Dans le cas d'une suite définie à l'aide d'une relation fonctionnelle, il est possible de **calculer directement n'importe quel terme de la suite.**

Suite définie à l'aide d'une relation de récurrence

Savoir-faire

- Soit u une suite définie par une relation de récurrence et son premier terme (ou ses premiers termes).
- Pour déterminer un terme de rang donné, il est nécessaire de connaître la valeur du terme précédent (ou des termes précédents).
- Le calcul s'effectue de proche en proche.

EXEMPLES

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n + 4$ et par son premier terme $u_0 = 1$

Pour obtenir u_2 il faut connaître u_1 :

- $u_1 = 2 \times u_0 + 4 = 2 \times 1 + 4 = 6$
- $u_2 = 2 \times u_1 + 4 = 2 \times 6 + 4 = 16$

Soit v la suite définie pour tout entier naturel non nul, n par $u_{n+1} = u_n^2$ et par son premier terme $u_1 = 2$.

- Le quatrième terme est u_4 , il est nécessaire de calculer u_3 et u_2 pour l'obtenir.
- $u_2 = u_1^2 = 4$ et $u_3 = u_2^2 = 16$ donc $u_4 = u_3^2 = 256$.

Remarques

- Dans le cas d'une suite définie par récurrence, **il n'est pas possible de calculer un terme sans connaître les termes précédents.**
- La relation de récurrence ne suffit pas, il est nécessaire de **connaître le premier terme pour initier le calcul des autres termes.**

4 Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle

EXO

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = u(n) = \frac{n+1}{n+2}$.
Calculer les 4 premiers termes de la suite. Calculer u_{10} .

Méthode

- La suite est définie pour tout entier naturel n , son premier terme est donc u_0 . Pour obtenir les quatre premiers termes, il faut remplacer n par 0, 1, 2 et 3 dans la formule explicite qui définit la suite u .
- Pour calculer un terme de rang ou d'indice donné, il suffit de remplacer n par cette valeur dans la formule explicite qui définit la suite u .

Exercices 36 à 38 p. 42

Réponse

$$\begin{aligned} 1 \quad u_0 &= u(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}; \quad u_1 = u(1) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}; \\ u_2 &= u(2) = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4} \text{ et } u_3 = u(3) = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5} \\ 2 \quad u_{10} &= u(10) = \frac{10+1}{10+2} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

5 Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation de récurrence

EXO

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n non nul par la relation de récurrence :
 $u_{n+1} = 3 - 2u_n$ et par son premier terme $u_1 = 2$. Calculer le troisième terme de la suite.

Méthode

- La suite est définie pour tout entier naturel n non nul, son premier terme est donc u_1 . Son troisième terme est le terme de rang 3, u_3 .
- Pour calculer un terme de rang donné, il est nécessaire de connaître les valeurs de tous les termes précédents. Il faudra calculer u_2 pour obtenir u_3 puisque u_1 est connu.

Exercices 42 à 46 p. 42

Réponse

$$\begin{aligned} 1 \quad u_1 &= 2 \\ 2 \quad u_2 &= 3 - 2u_1 = 3 - 2 \times 2 = -1 \text{ et} \\ u_3 &= 3 - 2u_2 = 3 - 2 \times (-1) = 5 \end{aligned}$$

6 Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par récurrence à l'aide de la calculatrice

EXO

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence :
 $u_{n+1} = 2 - 5u_n$ et le premier terme $u_0 = 5$. Déterminer u_5 à l'aide de la calculatrice.

Méthode

- Se placer dans le menu « suite »
- Choisir le type de suite : ici il s'agit d'une suite « récurrente d'ordre 1 »
- Enregistrer la formule de récurrence et le premier terme (par défaut le premier terme est le terme d'indice 0)
- Choisir « Afficher les valeurs »

Exercices 57 à 59 p. 43

Réponse

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad u_5 = -14\,583$$

n	u _n
0	5
1	-17
2	117
3	-583
4	2917
5	-14 583
6	72 917

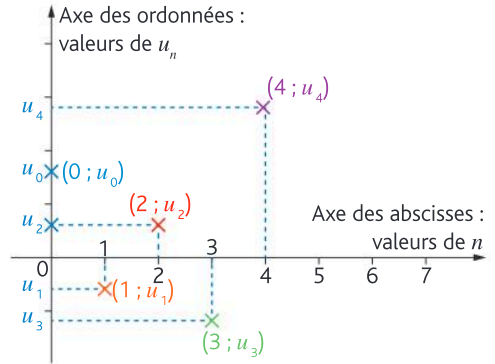
Représentation graphique d'une suite

Définitions

- Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite est un **nuage de points**.
- Ce nuage est constitué des **points de coordonnées** $n; u(n)$ ($n; u_n$) avec n entier naturel.

Remarque

Les points ne seront **pas reliés**, car la suite n'est définie que pour des abscisses qui sont des **nombre entiers**.



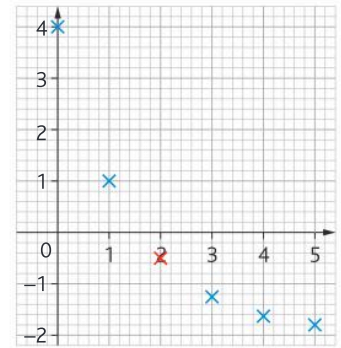
EXEMPLE

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,5u_n - 1 \text{ et par le premier terme } u_0 = 4$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant, ce qui permet de tracer le nuage de points représentant la suite u dans le repère ci-contre.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	4	1	-0.5	-1.25	-1.625	-1.8125



Sens de variation d'une suite

Définitions

- Une suite u est **croissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite u est **décroissante** si pour tout entier naturel $n : u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite est **monotone** si sa variation reste identique pour tout entier naturel n .

EXEMPLE

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 1$.

- $u_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3$
- Donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 - (2n + 1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2$
- Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, la suite u est strictement croissante.

Remarques

- Une suite peut être ni croissante ni décroissante.
- Une suite peut être **strictement** croissante (respectivement **strictement** décroissante) lorsque, pour tout entier naturel $n : u_{n+1} > u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).

7 Déterminer graphiquement les termes d'une suite

EXO

- Soit u une suite dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-dessous : Lire, avec la précision permise par le graphique, les valeurs de u_0 , u_3 et u_5 .

Méthode

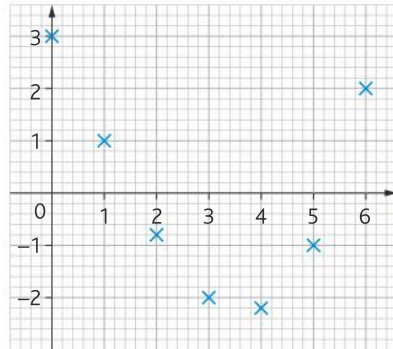
- 1 Pour déterminer le terme de rang n de la suite donnée par sa représentation graphique, on lit l'ordonnée du point d'abscisse n .



Réponse

- 1 $u_0 = 3$, $u_3 = -2$ et $u_5 = -1$

➤ Exercice 69 p. 44



8 Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite pour conjecturer son sens de variation

EXO

- Construire, dans un repère, le nuage de points associé à la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2u_n - 10$ et $u_0 = 4$.

Méthode

- 1 À l'aide de la calculatrice, ou « à la main », on complète un tableau de valeurs de la suite u .
- 2 Dans un repère, on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.
- 3 Pour conjecturer les variations, on observe le nuage de points, si celui-ci « monte vers la droite » la suite sera croissante, s'il « descend vers la droite » la suite sera décroissante.



➤ Exercices 70 à 73 p. 44

Réponse



- 3 La suite u semble être croissante.

9 Déterminer le sens de variation d'une suite

EXO

- Soit u la suite définie par $u_{n+1} = u_n - 2$ et $u_0 = 16$. Déterminer le sens de variation de u .

Méthode

- 1 On étudie le **signe** de $u_{n+1} - u_n$.
- 2 On interprète ce signe selon la définition du cours :
- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ cela signifie que $u_{n+1} \geq u_n$, la suite u sera croissante.
 - Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ cela signifie que $u_{n+1} \leq u_n$, la suite u sera décroissante.



Réponse

- 1 $u_{n+1} - u_n = u_n - 2 - u_n = -2$.
- 2 Comme $-2 < 0$, on obtient :
 $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$
 La suite u est donc strictement décroissante.

➤ Exercice 78 et 79 p. 45

Générer les termes d'une suite à l'aide des listes

Qu'est-ce qu'une liste ?

Définitions

- Une liste est une collection finie et ordonnée d'objets.
- Les listes se notent entre crochets, chaque élément est séparé du suivant à l'aide d'une virgule.
- La liste vide se note avec deux crochets, sans rien à l'intérieur : `[]`

EXEMPLE

```
L=[1,1,2,3,5,8,13]
```

Créer une liste

Définitions

- Une liste peut être créée par **extension** : la liste est saisie directement.
- Une liste peut être créée par **ajouts successifs**. Soit `L` une liste, pour ajouter l'élément `a` à la liste `L`, saisir l'instruction `L + [a]` ou `L.append(a)`.
- Une liste peut être créée en **compréhension**, dans ce cas l'instruction de création se trouve directement dans la liste.

EXEMPLES

- Liste créée par **extension** :

```
puissance2=[1,2,4,8,16,32]
```
- **Ajouter successivement** les nombres 64 et 128 à la liste précédente :

```
puissance2.append(64)
puissance2.append(128)
print(puissance2)
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]
```
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 + 1$.
- La liste des 5 premiers termes de la suite s'obtient grâce à la liste en **compréhension** :

```
Suite_u=[n**2+1 for n in range(5)]
print(Suite_u)
[1, 2, 5, 10, 17]
```

Manipuler les éléments d'une liste

Définitions

Soit `L` une liste non vide,

- `L[0]` est le **premier terme** de la liste, `L[1]` le **second** et ainsi de suite.
- `len(L)` est un nombre entier qui correspond au nombre d'éléments de la liste `L`.
- `L.remove(a)` permet de **supprimer** la première occurrence de `a` dans la liste `L`.
- `L.pop(i)` permet de **supprimer** l'élément d'**indice** `i` de la liste `L`.

EXEMPLE

```
puissance2=[1,2,4,8,16,32]
```

L'instruction `print(len(puissance2))` permet d'afficher la longueur de la liste `puissance2`, soit 6.

Itérer sur les éléments d'une liste

Définition

Itérer sur les éléments d'une liste `L`, c'est obtenir tous les éléments de la liste, en utilisant l'instruction élément `for` élément `in` `L`.

EXEMPLE

```
L=[3*n+1 for n in range(4)]
```

La liste `L` contient les 4 premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 1$. L'instruction `print(L)` permet d'afficher `[1, 4, 7, 10]`.

10
EXO

Déterminer une liste des termes d'une suite définie par une formule de récurrence

- Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -5$.
- Créer la fonction `liste_u(n)` qui renvoie les n premières valeurs de u_n connaissant n .
 - Utiliser cette fonction pour afficher la liste des 7 premiers termes de la suite u .

Méthode

- 1 La variable permettant de calculer les différents termes de la suite doit être initialisée à u_0 .
- 2 On sait combien de termes on doit calculer donc on utilise une boucle `for`.
- 3 Les n premiers termes sont les termes u_0 à u_{n-1} , nous utiliserons `range(n)` qui correspond à la liste des entiers allant de 0 à $n-1$ soit n valeurs.
- 4 On va utiliser une liste vide, dans laquelle on ajoutera au fur et à mesure les termes de la suite.



Réponse

```
def suite_u(n):
    u = -5 # c'est le premier terme u(0)
    L = [] # c'est la liste dans laquelle on stocke les termes de la suite
    for i in range(n):
        L.append(u) # on ajoute u(i) à la liste, à chaque "tour" de boucle
        u = 2*u+3 # formule de récurrence de la suite
    return L # une fois les n calculs réalisés, on renvoie la liste des n termes
```

```
>>> suite_u(7)
[-5, -7, -11, -19, -35, -67, -131]
```

➤ Exercice 91 p. 47

11
EXO

Déterminer une liste des termes d'une suite à l'aide d'une liste en compréhension

- Pour chaque liste, identifier la formule explicite caractérisant la suite et prévoir le résultat renvoyé par la commande `print(nom de la liste)`.

```
L1 = [2*n**2-3 for n in range(4)]
```

```
L2 = [20*0.5**n for n in range(3)]
```

Méthode

`for n in range(4)` signifie que n va prendre toutes les valeurs de 0 à 3 car `range(n)` permet d'obtenir tous les entiers de 0 à $n-1$.



Réponse

- L1 permet d'obtenir la liste des 4 premiers termes (u_0 à u_3) de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 3$. L'affichage sera `[-3, -1, 5, 15]`.
- L2 permet d'obtenir la liste des 3 premiers termes (u_0 à u_2) de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 20 \times 0,5^n$. L'affichage sera `[20, 10, 5]`.

➤ Exercice 98 p. 47

Je retiens

1. Génération d'une suite numérique

Une suite est une **fonction** dont la variable, qui se note n , est un **entier naturel** ($n \in \mathbb{N}$).
Le terme d'indice n se note $u(n)$ ou u_n (se lit « u indice n »).

Relation fonctionnelle (ou formule explicite)

Le terme général u_n est donné en fonction de n

➔ **EXEMPLE** : $u_n = n^2 - 3n + 1$ pour tout entier naturel n

Relation de récurrence

Les termes s'expriment les uns en fonction des autres.

➔ **EXEMPLE** : $u_{n+1} = 2u_n - 1$

2. Calcul des termes d'une suite numérique

Chaque terme est calculé **directement** en remplaçant n dans la formule par la valeur souhaitée.

➔ **EXEMPLE** : $u_n = n^2 - 3n + 1$
 $u_2 = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$

Les termes s'expriment les uns en fonction des autres et le calcul se fait **de proche en proche** grâce au premier terme de la suite qui est donné.

➔ **EXEMPLE** : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 1$
 $u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$

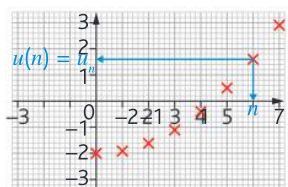
3. Représentation graphique des termes d'une suite et sens de variation

Représentation graphique

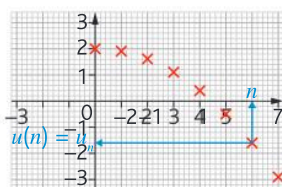
- Dans un repère, la représentation graphique d'une suite u est donnée par le **nuage de points** $(n; u_n)$.
- Les points ne sont **pas reliés** car les abscisses (n) ne sont que des **nombre entiers**.

Sens de variation

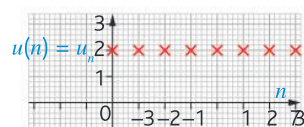
- Pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$:
 u est croissante



- Pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$:
 u est décroissante



- Pour tout n , $u_{n+1} = u_n$:
 u est constante



Je me teste

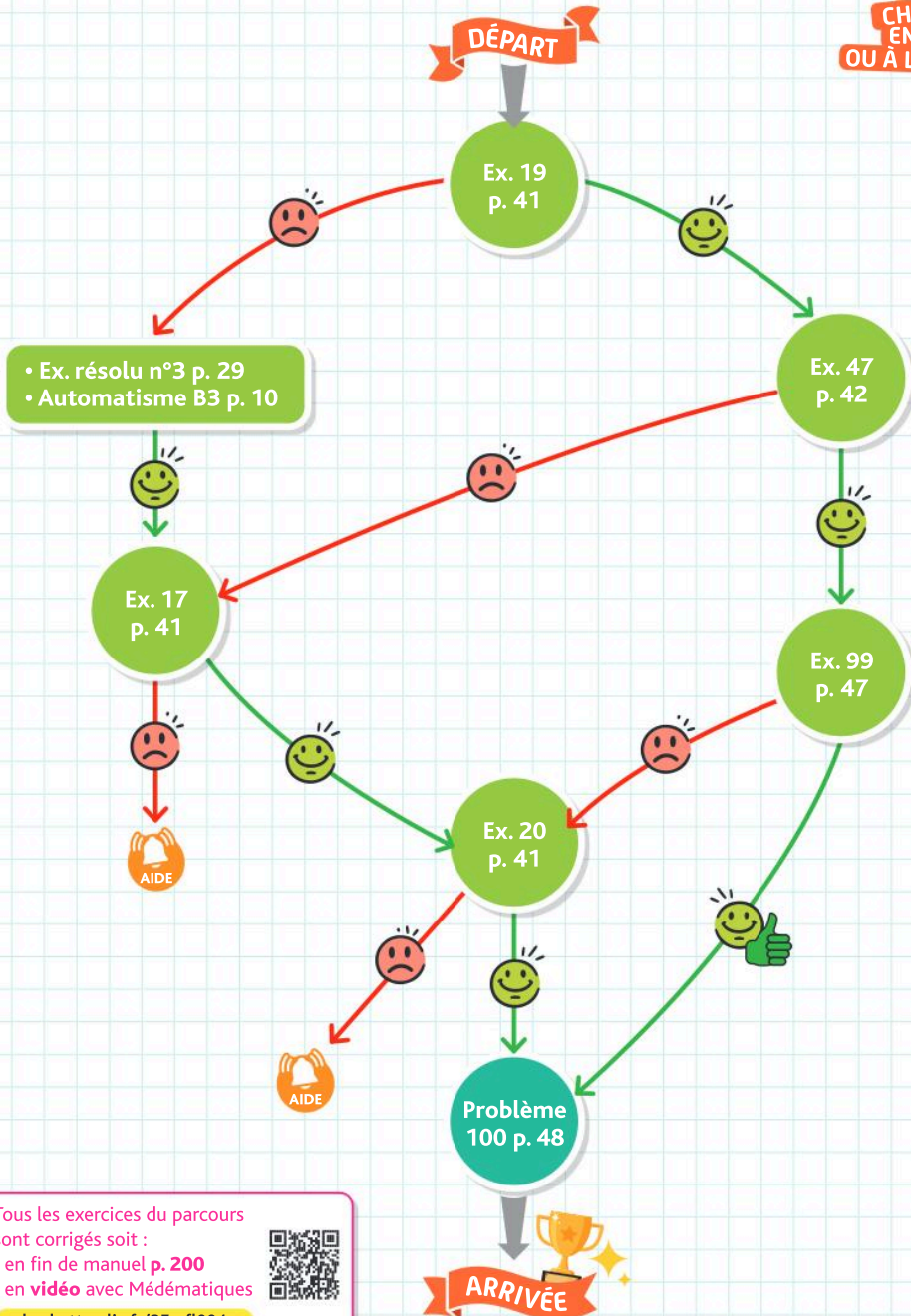


QCM interactif
et auto-corrigé

hachette-clic.fr/25mfl003

Je me prépare à une évaluation

Je sais modéliser une situation à l'aide d'une suite



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

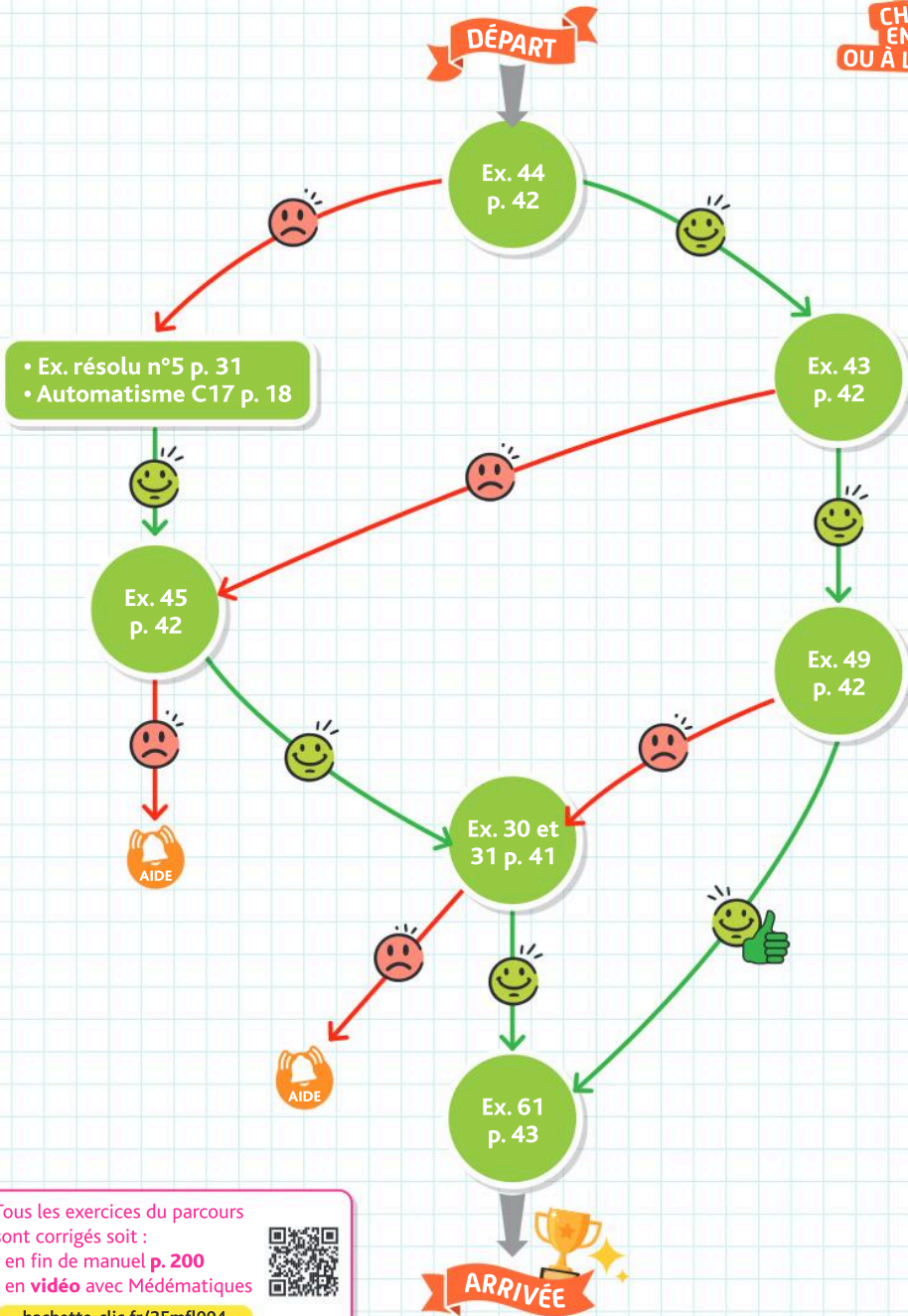
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl004

Je me prépare à une évaluation

Je sais calculer un terme de rang donné d'une suite définie par récurrence



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

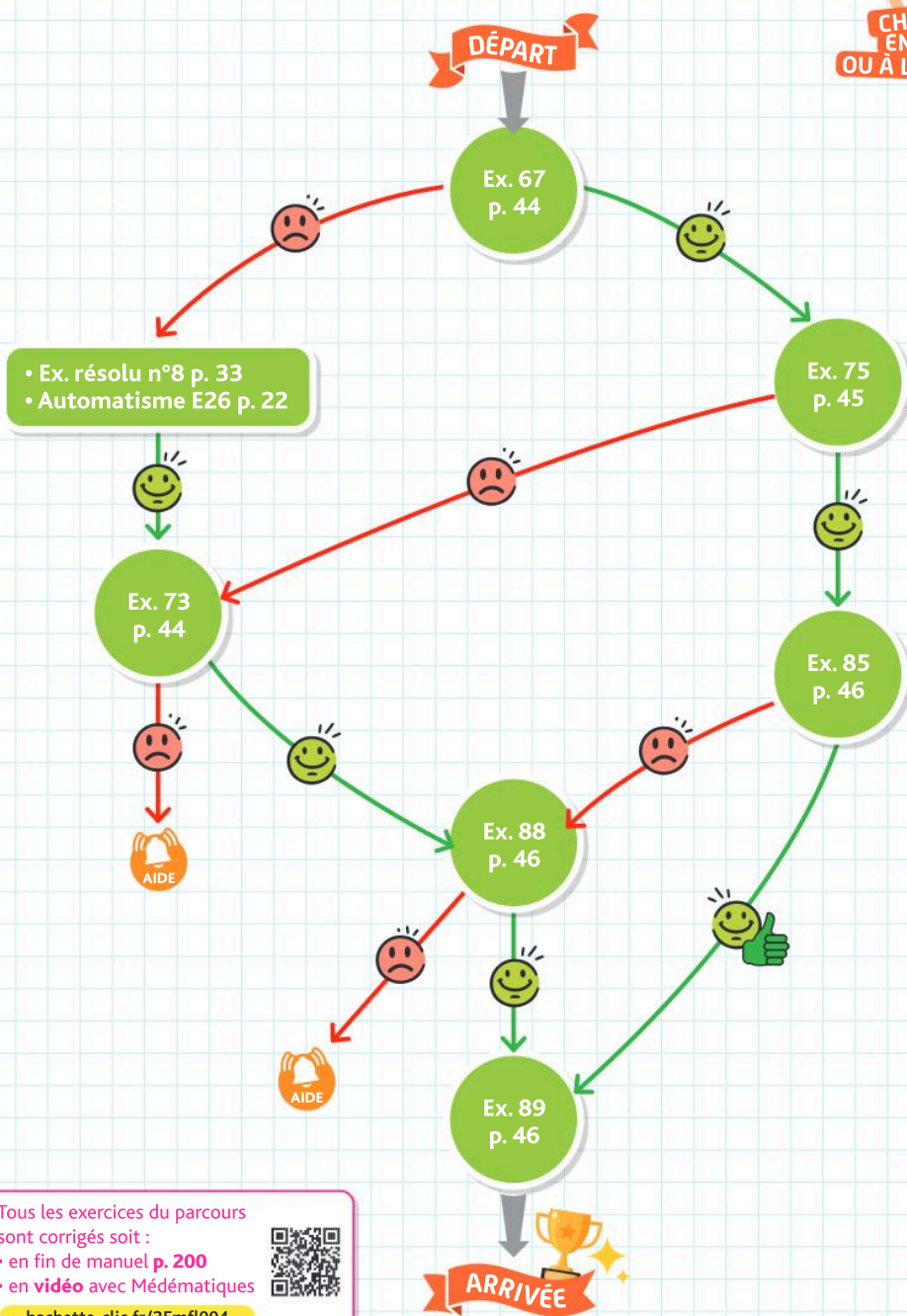
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médématiques

hachette-clic.fr/25mf1004



Je me prépare à une évaluation

Je sais réaliser et exploiter une représentation graphique



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médématicques



hachette-clic.fr/25mf1004

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl004

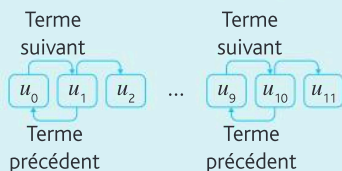


1 Génération d'une suite numérique

Questions flash

- À quelle évolution est associé le coefficient multiplicateur 1,20 ?
 - Quel est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 5 % ?
- Pour 3 et 4, donner le coefficient multiplicateur correspondant :**
- Le nombre d'abonnés augmente de 30 % chaque jour.
 - La température d'une boisson chaude diminue de 10 % chaque minute.
 - Les températures des premiers jours de juillet à Marseille sont, en degrés Celsius : 28 ; 30 ; 27 ; 33 ; 29 ; 31. Ces températures sont modélisées à l'aide d'une suite u .
 - Quelle est la signification de n ?
 - À quelle quantité correspond le nombre u_n ?

► Pour une suite, les valeurs sont repérées par des **entiers successifs** 0,1,2,3, 4,..., appelés **indices**.



- 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 sont les premiers termes d'une suite u dont le premier terme est le terme $u_0 = 3$:
- Que vaut u_1 ?
 - Déterminer u_5 .
 - À quel terme de la suite correspond 13 ?

- 7 ; 8 ; 11 ; 15 ; 18 ; 23 ; 27 ; 34 sont les premiers termes d'une suite u dont le premier terme est le terme $u(0) = 7$.
- Que vaut u_1 ?
 - Déterminer u_6 .
 - À quel terme de la suite correspond 18 ?

Le tableau suivant donne le dernier cours de l'action d'une entreprise lors des sept dernières années :

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Cotation	5,50	7,80	10,32	13,54	18,23	27,01	31,12

- La suite c est définie de telle façon que c_n représente la cotation de l'entreprise l'année 2018 + n .
- Que représente c_0 ?
 - Que vaut c_2 ?
 - Quel est l'indice du terme de la suite c qui correspond à 27,01.

- Soit u une suite de premier terme u_0 .
- Comment appelle-t-on le terme suivant u_1 ?
 - Le terme précédent u_{11} ?
- Soit u définie sur \mathbb{N}^* , une suite dont les premiers termes sont :
 1 ; 5 ; 21 ; 13 ; 15 ; 28 ; 13 ; 31 ; 54
- Que vaut u_4 ? u_7 ?
 - Déterminer la valeur de n pour laquelle $u_n = 15$.
- Le tableau ci-dessous donne des termes d'une suite u :
- | n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 99 | 100 |
|-------|-----|-------|-------|--------|--------|--------|-----|--------|--------|
| u_n | 1,5 | 0,625 | 0,375 | 0,2656 | 0,2063 | 0,1693 | ... | 0,0102 | 0,0101 |
- Que vaut u_2 ?
 - Quel est le terme représenté par la valeur 0,2656 ?
 - Quel est le 5^e terme ?
 - Déterminer n lorsque $u_n = 0,0101$

► Une suite est définie de manière **fonctionnelle** lorsque la formule pour calculer u_n ne dépend que de n . Une suite est définie par **récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

- Parmi les suites données ci-dessous, identifier celles qui sont définies par récurrence et celles qui sont définies de manière fonctionnelle.
- $u_n = 2n + 3$
 - $v_1 = 0,5$ et $v_{n+1} = v_n - 1$
 - $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n + n$
 - $t_1 = 2$ et $t_n = (t_{n-1})^2$

Soit u une suite définie pour tout entier naturel n . Les termes de la suite s'obtiennent à l'aide de l'algorithme suivant :

```
def suite_u(n):
    return (n+1)/(n+2)
```

- La suite est-elle définie par récurrence ou de manière fonctionnelle ?
- Préciser la formule.

Soit v une suite définie pour tout entier naturel n . Les termes de la suite s'obtiennent à l'aide de l'algorithme ci-contre.

```
def suite_v(n):
    v=2
    for i in range(n):
        v=v/2+0.5
    return v
```

- La suite est-elle définie par récurrence ou de manière fonctionnelle ?
- Préciser la formule et le premier terme.

Les premiers termes d'une suite U sont donnés dans le tableur ci-dessous :

A		B	
n	Un		
0	5		
1	8		
2	11		

- Donner U_0 .
- Quel est le nombre de termes affichés ?
- La suite est-elle définie par récurrence ou de manière fonctionnelle ?
- Préciser la formule.

Les premiers termes d'une suite U sont donnés dans le tableur ci-dessous :

A		B	
n	Un		
0	1,5		
1	9,5		
2	33,5		
3	105,5		

- Donner U_0 .
- Quel est le nombre de termes affichés ?
- La suite est-elle définie par récurrence ou de manière fonctionnelle ?
- Préciser la formule.

Pour **modéliser** une situation à l'aide d'une suite, on détermine la quantité qui correspondra à la suite, et la signification du « n ».

Vidéo Une association sportive de Dordogne comptant 850 membres voit son nombre d'adhérents augmenter de 5 % tandis que 10 personnes quittent l'association tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Le budget, initialement de 75 000 €, alloué à un service administratif diminue de 2 % tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Corrigé Dans un lac, il y a 1000 poissons. Malheureusement, chaque année, 5 % des poissons disparaissent (pêche, décès). Afin de maintenir un nombre suffisant de poissons, la société de pêche introduit chaque année 500 alevins (jeunes poissons).



- Quel sera le nombre de poissons au bout d'un an ?
- Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Corrigé La proportion de déchets recyclés parmi les déchets d'emballages ménagers augmente de 4 % tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Le chiffre d'affaires d'une entreprise en difficulté baisse de 1,8 % tous les ans. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

Une ville comporte 250 000 habitants. Chaque année, 10 % des habitants disparaissent (déménagement ou décès) et 3 000 habitants s'installent. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.

2 Calcul des termes d'une suite numérique

Questions flash

- Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$. Que vaut u_0 ?
- Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n - 3$. Déterminer u_5 .
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = u_n + 2$ avec $u_0 = 3$. Calculer u_1 .
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ avec $u_1 = 4$. Calculer u_2 .
- Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{2}n + 5$. Que vaut u_2 ?
- Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + \frac{1}{3}$. Déterminer u_1 .
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}$ avec $u_0 = \frac{1}{3}$. Calculer u_1 .
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 3u_n - 1$ avec $u_1 = \frac{1}{4}$. Calculer u_2 .
- Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ avec $u_0 = 0$. Calculer u_2 .

Une **suite logique** est une succession de nombres liés, en général, par une logique de calcul.

Compléter les suites logiques :

- 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ...
- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; ...

Compléter les suites logiques :

- 3 ; 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; ...
- 2 ; 8 ; 32 ; 128 ; ...

Compléter les suites logiques :

- 1 ; -2 ; 3 ; -4 ; ...
- 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; ...

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl004



Compléter les suites logiques :

- 8 ; 10 ; 13 ; 17 ; 22 ;
- La suite de Conway, ou lorsque la logique n'est pas une formule de calcul.
1 ; 11 ; 21 ; 1211 ; 111221 ; 312211 ;

► Pour une suite définie de manière **fonctionnelle**, $u_n = u(n)$ se calcule comme l'image d'un nombre par une fonction.

Déterminer les 3 premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 5n$.

Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3n - 1$.

- Calculer u_5 .
- Calculer u_8 .

Déterminer les 5 premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$.

Dans un parc, les agents municipaux installent un piège à moustiques.
 Au vu du nombre de captures, le nombre de moustiques trouvés dans le piège est modélisé par la suite u où u_n représente le nombre de moustiques découverts dans le piège après n jours et $u_n = n^2 - 2n + 20$.

- Déterminer le nombre de moustiques trouvés dans le piège le 2^e jour.
- Calculer u_5 et interpréter le résultat obtenu.

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$.
 Calculer u_4 et u_{10} .

Déterminer les 5 premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = -n^2 + 5n$.

► Pour calculer un terme d'une suite définie par **récurrence**, il est nécessaire de connaître les termes précédents.

Déterminer les 3 premiers termes de la suite définie par $u_0 = -10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

Corrigé Déterminer les 5 premiers termes de la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

Corrigé Déterminer les 5 premiers termes de la suite définie par $u_0 = -10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Vidéo Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ avec $u_0 = 4$

- Recopier et compléter les calculs suivants :
 $u_1 = 2 \times u_0 - 3 = \dots$; $u_2 = 2 \times \dots$
- Calculer u_3 .

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 4u_n + 5$ avec $u_0 = 0$.

- Recopier et compléter les calculs suivants :
 $u_1 = 4 \times u_0 + 5 = \dots$; $u_2 = 4 \times \dots$
- Calculer u_3 .

Corrigé Les algues peuvent être meurtrières

pour les poissons comme pour les hommes ! Dans un étang qui contient 2 500 kg d'algues, le propriétaire décide d'installer un système de filtration afin d'en diminuer la quantité. Chaque jour la quantité d'algues augmente de 3 %, chaque nuit il actionne la filtration et prélève 150 kg d'algues. La quantité d'algues présente dans l'étang chaque matin est modélisée par la suite u où u_n représente la quantité d'algues, en kg, présente dans l'étang après n jours.



- Justifier que la suite u peut être modélisée par la relation $u_{n+1} = 1,03u_n - 150$.
- Quelle est la valeur de u_0 ?
- Déterminer la quantité d'algues encore présente dans l'étang après 2 jours.
- Calculer u_3 et interpréter le résultat obtenu.

Déterminer les 5 premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_{n+1} = u_n^2 + 3$ avec $u_0 = 2$.

Corrigé Déterminer les 5 premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_{n+1} = u_n + n$ avec $u_0 = 1$.

Déterminer les 4 premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ avec $u_1 = 0$.

Soit u une suite définie pour tout entier naturel n . Dans chaque cas, calculer u_2 :

- $u_n = \frac{1}{n+1}$
- $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_1 = 1$
- $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_1 = 2$
- $u_n = (n+1)^2$

Répondre par VRAI ou FAUX

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$.

- a. $u_5 = 10$ b. $u_{10} = 100$
 c. $u_{n+1} = n^2 + 1$ d. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

Emma a commencé une feuille de tableur pour déterminer les termes d'une suite.

	A	B
1	n	Un
2		0
3		1
4		2

En B3, elle a tapé :

« =7*B2-10 ».

- a. Quel sera le résultat de la case B3 ?
 b. La suite est-elle définie par récurrence ou de manière fonctionnelle ?
 c. Préciser la suite ainsi définie.

À l'aide du tableur, on veut déterminer les premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - n^2$.

	A	B
1	n	Un
2		0
3		1
4		2

Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour qu'en recopiant la cellule vers le bas on puisse automatiser le calcul de u_n ?

À l'aide du tableur, on veut déterminer les premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

	A	B
1	n	Un
2		0
3		1
4		2

Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour qu'en recopiant la cellule vers le bas on puisse automatiser le calcul de u_n ?

Python Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -3u_n + 8$. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il renvoie le terme u_7 lorsque l'utilisateur saisit `suite(?)` dans la ligne de commande.

```
def suite(n):
    u=4
    for i in range(n):
        u=.....
    return u
```

Une calculatrice permet de calculer les termes d'une suite. Les suites définies par **récurrence** s'enregistrent en saisissant une formule du type $u_{n+1} = \dots$, le premier terme (ainsi que son rang) devra être enregistré. Une suite **fonctionnelle** s'enregistre en saisissant une expression avec n .

Calculatrice Soit u une suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1$ avec $u_0 = -1$. À l'aide de la calculatrice, déterminer u_2 ; u_3 et u_4 .

Calculatrice Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 8n^2 + 2n$. À l'aide la calculatrice, déterminer u_8 ; u_{17} et u_{35} .

Calculatrice Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - 1$ avec $u_1 = -1$. À l'aide de la calculatrice, déterminer u_{10} ; u_{20} et u_{30} .

Un capital de 5 000 € est placé à un taux de 3 % par an, à intérêts composés (c'est-à-dire que chaque fin d'année les intérêts sont calculés par rapport au capital présent l'année précédente). Une fois les intérêts enregistrés, chaque fin d'année 500 € sont prélevés pour être déposés sur un autre compte. Soit C_n le capital disponible à la fin de l'année n . Ainsi $C_0 = 5000$.

- a. Calculer et interpréter C_1
 b. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

Corrigé **Calculatrice** Chaque année une revue perd 30% de ses abonnés tandis que 500 nouvelles personnes s'abonnent. En 2024 il y avait 18 200 abonnés.

Le nombre d'abonnés, en centaines d'abonnés, l'année 2024+ n est modélisé par la suite a .

- a. Déterminer a_0 .
 b. Démontrer que $a_{n+1} = 0,7a_n + 5$.
 c. Déterminer le nombre d'abonnés en 2026.
 d. La revue n'est plus rentable dès que le nombre d'abonnés descend au-dessous des 2 000 abonnés. En utilisant la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la revue ne sera plus publiée.

Soit u la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2 \times u_n$. Calculer u_2 et u_4 .

Dans le roman *Da Vinci code* écrit par Dan Brown, Robert Langdon et Sophie Neveu doivent trouver le code d'un coffre appartenant à Jacques Saunière. Ce code comporte 10 chiffres, ils savent que ces chiffres sont issus des premiers nombres de la suite de Fibonacci.



La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 1, F_2 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- a. Calculer F_3 et F_4
 b. Quel est le code à dix chiffres que Robert Langdon et Sophie Neveu doivent entrer pour avoir accès au coffre ?

Exercices

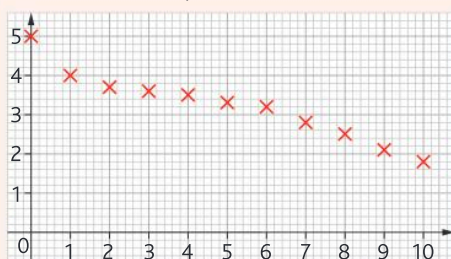
3 Représentation graphique des termes d'une suite et sens de variation

Questions flash

64 Les premiers termes d'une suite sont obtenus à l'aide d'une calculatrice, dont la copie d'écran est ci-contre. Conjecturer le sens de variation de la suite.

n	u _n
0	-2
1	-14
2	-38
3	-86
4	-182
5	-374
6	-758
7	-1514
8	-3022

65 La représentation graphique d'une suite u est donnée dans le repère ci-dessous :



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

- Déterminer u_1
- Déterminer u_{10}
- Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 3$

La représentation graphique d'une suite est un **nuage de points** dont les coordonnées sont de la forme $(n; u_n)$ ou $n; u(n)$.

Soit u une suite définie pour tout entier naturel n , dont on connaît le tableau des premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u _n	-2	0	1	2	2,5	3,5	4	4,1	4,2

Tracer la représentation graphique des 9 premiers termes de u dans un repère.

Corrigé Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n - 3$. Recopier et compléter le tableau suivant puis tracer la représentation graphique de u dans un repère.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u _n									

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$ et $u_0 = 0$.

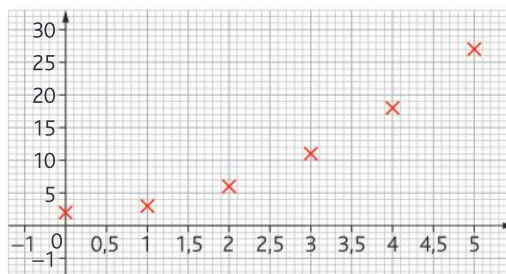
Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl004



Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir au centième si besoin) puis tracer la représentation graphique de u dans un repère.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u _n									

Les premiers termes d'une suite u sont représentés ci-dessous :



Lire avec la précision permise par le graphique $u_0; u_1$ et u_4 .

Une suite peut être **croissante**, **décroissante**, ou ni croissante ni décroissante.

Pour les exercices 70 à 73, en utilisant la calculatrice, tracer la représentation graphique de chaque suite. Puis conjecturer sa variation.

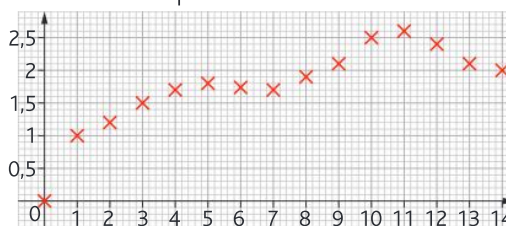
Calculatrice a. Pour tout entier naturel $n, u_n = 4n - 5$.
 b. Pour tout entier naturel $n, u_n = -n^2 + 5$.

Calculatrice a. Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 2u_n + 5$ avec $u_1 = 1$.
 b. Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = -u_n^2$ avec $u_0 = -1$.

Calculatrice a. Pour tout entier naturel $n, u_n = -3n + 7$.
 b. Pour tout entier naturel $n, u_n = n^2 - 3$.

Vidéo **Calculatrice** a. Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n + 7$ avec $u_0 = -1$.
 b. Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n^2 - 3$ avec $u_0 = 0$.

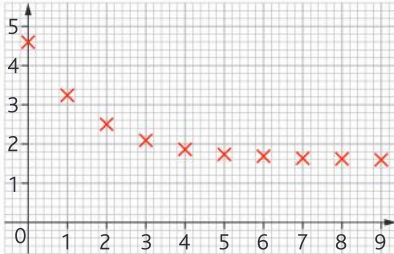
La représentation graphique d'une suite u est donnée dans le repère ci-dessous :



- La suite u semble-t-elle croissante ? décroissante ?
- En utilisant la précision permise par le graphique, déterminer u_3 , u_5 et u_{14} .
- Déterminer le plus petit n tel que $u_n > 2$.

Corrigé

La représentation graphique d'une suite u est donnée dans le repère ci-dessous :

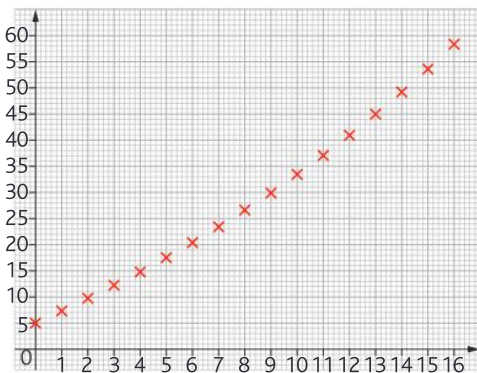


- Conjecturer graphiquement le sens de variation de u . Par la suite on admet que cette conjecture est vérifiée.
- En utilisant la précision permise par le graphique, déterminer u_0 et u_8 .
- Déterminer graphiquement le plus petit entier naturel n tel que, pour tout $n \geq 2$ on a : $u_n \leq 2$.

Dans un laboratoire, un chercheur étudie la prolifération des bactéries dans une solution nutritive.



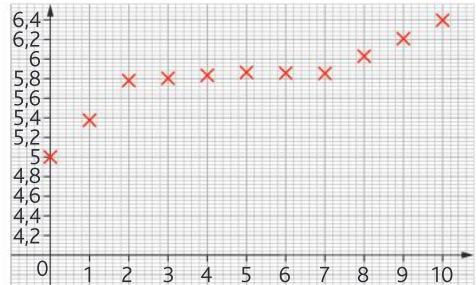
Soit u la suite telle que u_n représente le nombre de milliers de bactéries présentes dans la solution nutritive après n minutes. Le relevé qu'il obtient est donné ci-dessous :



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

- Déterminer le nombre de bactéries présentes dans la solution au début de l'expérience.
- Déterminer u_5 et interpréter le résultat.
- Le chercheur considère que la solution nutritive est de bonne qualité si le nombre de bactéries décuple en moins d'un quart d'heure. La solution nutritive est-elle de bonne qualité ?

Le Crowdfunding permet de participer, avec d'autres épargnants, au financement d'un programme immobilier. Un particulier investi dans un tel projet et la modélisation de ses avoirs est donnée par une suite u telle que u_n représente le capital disponible, en milliers d'euros, après n années. Le relevé sur plusieurs années est donné sur le graphique ci-dessous.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

- Quelle somme a-t-il initialement investie ?
- Déterminer u_7 et interpréter le résultat.
- Quel est le capital obtenu après 10 ans de placement ?
- Déterminer les variations de u et interpréter le résultat.

Pour déterminer **les variations d'une suite**, il suffit d'étudier le **signe de** $u_{n+1} - u_n$. Si le signe est **positif** on en déduit que $u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite est **croissante**. Si le signe est **négatif** on en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite est **décroissante**. Si le signe n'est pas constant, la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n + 5$.

- Recopier et compléter : $u_{n+1} = 3(\dots) + 5 =$
En déduire l'expression de $u_{n+1} - u_n$.
- Quel est le sens de variation de la suite u ? Justifier.

La suite u est définie sur \mathbb{N} par $u_n = u_n + n^2$. Étudier, pour tout entier naturel n , le signe de $u_{n+1} - u_n$ en déduire la variation de u .

Un instagrammeur publie des photos et des vidéos sur son compte Instagram qui compte déjà 8 500 abonnés.

Chaque semaine le nombre d'abonnés est modélisé par une suite u telle que u_n représente le nombre de milliers d'abonnés après n semaines.

- Calculer u_{10} et interpréter le résultat.
- Étudier, pour tout entier naturel n , le signe de $u_{n+1} - u_n$, en déduire la variation de u et interpréter le résultat.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl004



Soit u une suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ et $u_0 = 4$.

- Tracer la représentation graphique de u dans un repère. Conjecturer la variation de u .
- On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 2$, calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la variation de u .

➤ Lorsqu'une suite u est à termes strictement positifs, on peut comparer, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 pour déterminer les variations de u .

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)(n+2)$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de n et en déduire la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Quel est le sens de variation de la suite u ? Justifier.

u est une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 0,5^n$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de n et en déduire la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- Quel est le sens de variation de la suite u ? Justifier.

La table de valeurs des termes d'une suite croissante u est donnée ci-dessous :

rad SUITES		
Suites	Graphique	Tableau
Régler l'intervalle		
n	u_n	
18	418.5	
19	465.5	
20	515	
21	567	
22	621.5	
23	678.5	
24	738	
25	800	

Déterminer la plus petite valeur de n telle que u_n dépasse 500.

On considère les suites définies par $u(n) = -3n + 84$ et $v(n) = n^2 + 5$.

Tracer la représentation graphique de u et v dans un même repère. Conjecturer puis déterminer les variations des deux suites.

Déterminer graphiquement le plus petit entier n tel que : $v_n \geq u_n$.

Calculatrice On considère les suites u et v définies pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,5u_n \text{ avec } u_0 = 10 \text{ et}$$

$$v_{n+1} = 2v_n + 1 \text{ avec } v_0 = 1$$

En utilisant la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que $v_n \geq u_n$.

Calculatrice La suite u est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{n+1}$

- En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, déterminer la variation de u .
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-2}$.

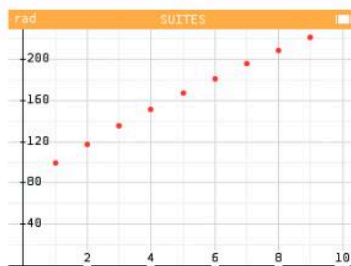
Corrigé Une commune dispose de 200 vélos en libre-service. Chaque vélo est loué pour une semaine (du lundi au dimanche). La première semaine, 100 vélos ont été loués.



Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de vélos. Pour cela il modélise le nombre de vélos loués chaque semaine par une suite u où, pour tout entier naturel n non nul, u_n représente le nombre de vélos loués la n -ième semaine.

La modélisation proposée est $u_{n+1} = 0,95u_n + 23$.

- Déterminer, avec cette modélisation le nombre de vélos loués la 2^e semaine.
- La représentation graphique de u est :



Conjecturer graphiquement les variations de la suite. Dans combien de semaines le nombre de vélos proposés par la commune sera-t-il insuffisant ?

Corrigé Dans une ville il existe deux quartiers. Le quartier Nansouty qui compte 2 000 habitants et le quartier des Capucins qui en compte 2 700. Chaque année, 10 % des habitants des Capucins partent et 50 nouveaux habitants arrivent, alors qu'à Nansouty 5 % arrivent et 120 personnes quittent le quartier. La population du quartier Nansouty est modélisée par une suite u et celle du quartier des Capucins est modélisée par une suite v .

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

- b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
- c. Tracer la représentation graphique des deux suites. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le nombre d'années nécessaire pour que la population de Nansouty soit plus importante que celle des Capucins ?

Générer les termes d'une suite à l'aide des listes Python

Questions flash

- 90** La liste des 4 premiers termes d'une suite u définie pour tout entier naturel n est : **suite_u=[2,5,2.3,7.2]**
- a. Que vaut u_0 ?
- b. Que vaut u_2 ?
- c. Que contient la liste L après avoir saisi l'instruction `L.append(9.2)` ?
- 91** Donner la liste en extension des 5 premiers termes de la suite v définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 2 - n^2$.

➤ Générer une liste en extension

Une liste peut être saisie dans la console à l'aide de crochets : `L=[1,3,5,7]`

- Que faut-il saisir dans un éditeur Python pour générer en extension la liste des nombres suivants : 5 ; 3 ; 7 ; 8 ; 9 ?
- Que faut-il saisir dans un éditeur Python pour générer en extension la pluviométrie à Bordeaux de janvier à juin : 75 ; 55 ; 55 ; 73 ; 76 ; 68 ?

➤ Manipuler des éléments d'une liste

Chaque élément d'une liste est repéré par son indice. Le premier élément d'une liste est l'élément d'indice 0.

- Soit u une suite définie pour tout entier naturel n . Les premiers termes de u sont donnés par la liste `L=[1,5,8,9,15,14,7,8,5]`.
- a. Donner `L[0]`, à quel terme de la suite correspond-il ?
- b. Quelle instruction permet d'afficher u_5 ? Donner u_5 .
- c. Déterminer la valeur de i telle que `L[i]=15`. À quel terme de la suite correspond cette valeur ?
- Soit u une suite définie pour tout entier naturel n non nul. Les premiers termes de u sont donnés par la liste `L=[5,7,4,12,15,18]`.
- a. Donner `L[1]`, à quel terme de la suite correspond-il ?

- b. Quelle instruction permet d'afficher u_5 ? Donner u_5 .
- c. Déterminer la valeur de i telle que `L[i]=4`. À quel terme de la suite correspond cette valeur ?

➤ Générer une liste par ajouts successifs

L'instruction `L.append` permet d'ajouter un élément à la fin de la liste L.

L'instruction `L+M` permet d'ajouter les éléments de la liste M aux éléments de la liste L.

- Les listes L et M sont données ci-dessous :
`L=[2,4,7,8]` et `M=[1,3,5]`
- a. Quelle liste est retournée par l'instruction : `print(L+M)` ?
- b. Quelle liste est retournée par les instructions données ci-dessous ?
`L.append(6)`
`print(L)`
- Les listes R et S sont données ci-dessous :
`R=[7,13,5,9,2]` et `S=[3,12,8,4,18]`
- a. Quelle liste est retournée par l'instruction `print(R+S)` ?
- b. Quelle liste est retournée par les instructions données ci-dessous ?
`S.append(9)`
`print(S)`

➤ Générer une liste en compréhension : les instructions sont données dans la liste elle-même.

- Pour chaque question, prévoir le résultat affiché par l'appel de l'instruction `print(T)` :
- a. `T=[n for n in range(1,5)]`
- b. `T=[n**2 for n in range(5)]`
- c. `T=[2*n-3 for n in [1,3,7]]`

Corrige Dans un gymnase il y a une fuite aux douches. En attendant les réparations, l'eau va dans un récupérateur d'eau. Le premier jour, il y a 5 litres d'eau dans le récupérateur. Chaque jour, le récupérateur est rempli par 3 litres d'eau provenant de la fuite mais, pour éviter qu'il ne déborde, la moitié de l'eau qu'il contient est vidée pour être réutilisée ailleurs. Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il permette d'obtenir la liste de la quantité d'eau (en litres) contenue dans le récupérateur au cours des 5 premières journées.

```
u=5
L=[]
for i in range(...):
    L.append(u)
    u=.....
print(L)
```

Diminuer le chômage **STMG**

» **Modéliser • Communiquer**

Dans une agence de France Travail, au 1^{er} janvier 2024 il y a 480 demandeurs d'emploi. Les statistiques ont permis au directeur d'agence de prévoir que chaque trimestre, 125 personnes viennent s'inscrire et 38 % retrouvent un emploi.

Le nombre de demandeurs d'emploi est modélisé à l'aide d'une suite u telle que u_n représente le nombre de demandeurs d'emploi au début du n ième trimestre après le 1^{er} janvier 2024.

- Calculer u_1 .
- Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du 2^e puis du 3^e trimestre 2024.
- Justifier que la situation précédente peut être modélisée par $u_{n+1} = 0,62u_n + 125$.
- Combien de demandeurs d'emploi peut-on estimer le 1^{er} janvier 2026 ?
- Le directeur de l'agence souhaite que le nombre de demandeurs d'emploi diminue de 30 % par rapport au premier trimestre 2024. Pourra-t-il atteindre son objectif ? Si oui à quelle date ?

4 bébés par seconde **ST2S**

» **Modéliser • Communiquer**

La population mondiale était de 8 milliards en 2022. On estime que chaque seconde quatre bébés viennent au monde et deux personnes meurent.



Soit u la suite telle que u_n représente la population mondiale, en milliards d'individus, à l'année $2022+n$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la population mondiale en 2040.
- Les Nations Unies prévoient que la population mondiale sera de 10 milliards en 2060. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il renvoie, avec la modélisation proposée, l'année à partir de laquelle la population atteindra les 10 milliards.

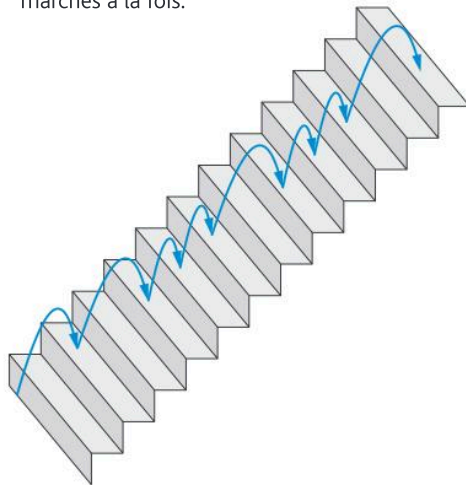
```

u = 8
n = 0
while ..... :
    u = u+.....
    n = n+1
print(2022+n)
    
```

De la robotique dans l'escalier **STI2D**

» **Chercher • Raisonner**

Un robot peut monter un escalier une ou deux marches à la fois.



- De combien de façons différentes peut-il monter un escalier d'une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ?

Soit u la suite telle que u_n soit égale au nombre de façons dont le robot peut monter un escalier de n marches.

- Déterminer une relation liant u_n , u_{n-1} et u_{n-2} pour tout entier naturel n supérieur à 3.
- Compléter la fiche de tableur ci-dessous :

	A	B
	Nombre de marches : n	u(n)
1		
2		1
3		2
4		3
5		4

- Quelle formule faut-il saisir en B4 pour obtenir, en tirant vers le bas, le nombre de façons de monter un escalier à n marches ?
- De combien de façons le robot peut-il monter un escalier de 25 marches ?



La valeur d'un bien immobilier **STMG** **Calculatrice**

» Représenter • Calculer

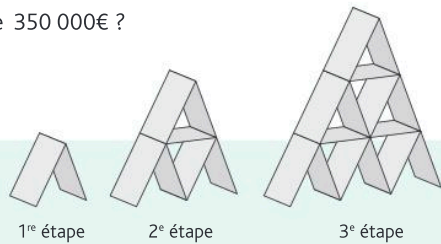
Un bien immobilier, un peu vétuste, a une valeur de 240 000 €. Chaque année, la valeur de ce bien augmente de 2 % et le propriétaire effectue 2 000 € de travaux. La valeur du bien est modélisée par la suite u où u_n représente la valeur, en euros, du bien après n années.

- Justifier que la suite u peut être modélisée par la relation $u_{n+1} = 1,02u_n - 2000$.
- Quelle est la valeur de u_0 ?
- Implanter la suite dans une calculatrice.
- Quelle est la valeur du bien immobilier après 3 années ?
- Déterminer u_8 à l'aide de la calculatrice et interpréter le résultat obtenu.
- Après combien d'années, la valeur du bien dépassera-t-elle 350 000€ ?

Le challenge du château de cartes **STI2D** **Tableur**

» Chercher • Représenter • Modéliser

Soit u la suite telle que u_n est égale au nombre de cartes nécessaires pour réaliser un château de cartes à n étages. Ainsi $u_1 = 2, u_2 = 7$.



- Déterminer u_3 et u_4 .
- Justifier la formule : $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$
- Afin de prévoir le nombre de cartes pour un château à n étages, compléter la feuille de tableur ci-contre :
- Quelle formule faut-il saisir en B3 ?
- Combien faut-il de cartes pour réaliser un château avec 50 étages ?
- Un jeu de poker comporte 52 cartes, combien d'étages complets peut-on réaliser avec un tel jeu ? Restera-t-il des cartes ? Si oui combien ?

	A	B
1	n	u(n)
2	1	2
3	2	
4	3	

Le crédit idéal **STMG** **Tableur**

» Raisonner • Calculer

Une banque peut prêter une somme d'argent à un particulier ou une entreprise à un certain taux annuel. Le capital emprunté peut être remboursé chaque mois par la même mensualité.

Chaque mensualité est constituée par le remboursement d'une partie du capital (amortissement) et des intérêts sur le capital restant dû.

C_n est le capital restant dû le mois n , m la mensualité payée chaque mois, I_n la part d'intérêt dans cette mensualité, A_n la part correspondant à l'amortissement du capital et t le taux mensuel du crédit.

- Recopier et compléter le tableau d'amortissement du crédit ci-dessous :
- Comment obtenir le coût total du crédit ?
- Rémy souhaite emprunter 250 000 € afin d'acquérir un bien immobilier. La banque lui propose un taux de crédit de 3,55 % par an, qui correspond approximativement à un taux mensuel de 0,291 %. Il souhaite rembourser 1 100 € par mois. À l'aide d'un tableur, déterminer le nombre de mois nécessaires au remboursement du crédit.
- Préciser la dernière mensualité et le coût réel du crédit.

n	C_n	I_n	A_n
0	C_0	$t \times C_0$	$m - I_0$
1	$C_0 - A_0$		
$k - 1$			
k	$C_k =$	$I_k =$	$A_k =$
$k + 1$			

Pour entrer dans le chapitre

Utiliser un taux d'évolution

Pour une **évolution**, le **taux** t est souvent donné en **pourcentage**.

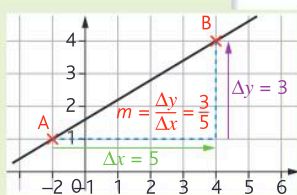
- Lorsque l'évolution est une **augmentation**, le **coefficient multiplicateur** est $1 + t$.
- Lorsque l'évolution est une **diminution**, le **coefficient multiplicateur** est $1 - t$.

- 1 Déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 15 %.
- 2 Déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 7 %.
- 3 Expliquer pourquoi diminuer une grandeur de 2 % revient à la multiplier par 0,98.

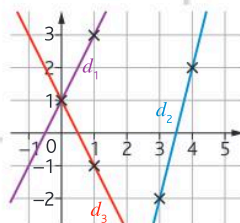
Déterminer un coefficient directeur

Le **coefficient directeur** d'une droite, non verticale, est donné par :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- 4 Avec la précision permise par le graphique, déterminer le coefficient directeur des droites d_1 , d_2 et d_3 .



Modéliser une situation à l'aide d'une suite

Pour modéliser une situation à l'aide d'une suite, il faut identifier la **quantité qui évolue**, qui correspond au **terme général** de la suite et préciser ce **que représente** n (année, mois, répétitions...).

Pour chaque exemple, modéliser la situation à l'aide d'une suite.

- 5 Adama fait du « resell » sur Vinted. Chaque mois il gagne en moyenne 85 € qu'il dépose sur son compte sur lequel il a au départ 256 €.
- 6 Un patient reçoit 1,8 mg d'un médicament par une injection intraveineuse. Chaque heure, la quantité de médicament présente dans le sang est divisée par 2.
- 7 En plaçant 1 500 € sur une assurance vie, Maleyna peut espérer un rendement annuel de 2,8 %.

2

Suites arithmétiques et géométriques

Automatismes du chapitre

- B5** Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage 11
- B6** Interpréter un indice de base 100 ; calculer un indice ; calculer le taux d'évolution entre deux valeurs 11



Focus métiers

Assurance **Banque**
Finance Météorologie
Recherche

Grâce aux suites, on peut modéliser de nombreuses situations comme l'évolution des populations, la gestion des stocks ou la prévision des tendances financières.



Découvrez le métier de conseiller en gestion de patrimoine

hachette-clic.fr/25mfl005

1 ACTIVITÉ

Prête pour le marathon ?

Objectif Découvrir les suites arithmétiques

Leïla s'est lancé un défi : le jour de son anniversaire, le 10 août, elle sera capable de courir un marathon ! La distance à parcourir pour réaliser un marathon est de 42,195 km. Le 31 mars, elle est capable de courir 10 km. À partir du 1^{er} avril, elle commence son plan d'entraînement : chaque jour, elle est en mesure de courir 0,7 km de plus que la veille.

Soit d la suite telle que d_n désigne la distance que peut courir Leïla après n jours d'entraînement.



- 1
 - a. Déterminer les 5 premiers termes de la suite d .
 - b. Représenter le nuage de points correspondant à ces cinq termes sur un graphique. Comment semble être le nuage de points ?
 - c. Calculer $d_1 - d_0$, $d_2 - d_1$, $d_3 - d_2$ et $d_4 - d_3$. Que remarquez-vous ?
- 2
 - a. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n .
 - b. En utilisant la calculatrice, prévoir la date à partir de laquelle Leïla sera en mesure de courir un marathon. Sera-t-elle prête le 10 août pour son anniversaire ?

» Cours p. 54

2 ACTIVITÉ

Quand la rumeur se propage Calculatrice

Objectif Découvrir les suites géométriques

Mathis publie une information sur un réseau social qu'il partage avec deux personnes qui n'avaient pas cette information. Chacune de ces personnes partage elle aussi cette information avec deux personnes et ainsi de suite.

Soit u la suite telle que u_n désigne le nombre de personnes qui reçoivent l'information à la $n^{\text{ième}}$ étape. Ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$.



- 1
 - a. Déterminer les quatre termes suivants.
 - b. Calculer $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_2}$, $\frac{u_4}{u_3}$, $\frac{u_5}{u_4}$ et $\frac{u_6}{u_5}$. Que remarquez-vous ?
- 2
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. En utilisant la calculatrice, prévoir le nombre d'étapes nécessaires pour que plus de 1 000 personnes reçoivent l'information en même temps.

» Cours p. 56

La meilleure proposition d'embauche



Objectif Reconnaître la nature d'une suite

Lors d'un entretien d'embauche, vous recevez trois propositions de rémunération :

- **Proposition 1** : un salaire net à l'embauche de 1 450 € puis une augmentation chaque année de 35 €.
- **Proposition 2** : un salaire net à l'embauche de 1 400 € puis une augmentation annuelle de 3 %.
- **Proposition 3** : un salaire net à l'embauche de 1 420 € puis une augmentation annuelle de 1 % et de 25 €.



1 Pour chaque proposition, déterminer votre salaire net la deuxième année puis la troisième année.

2 Soit u (proposition 1), v (proposition 2) ou w (proposition 3), les suites telles que u_n , v_n

et w_n désignent le salaire net après n années passées dans l'entreprise.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis v_{n+1} en fonction de v_n , et enfin w_{n+1} en fonction de w_n .

b. En déduire la nature de chacune des suites u , v et w .

» Cours p. 54 et 56

Peut-on nourrir tout le monde ?

Objectif Comparer l'évolution d'une suite arithmétique et géométrique

En 1800 la population anglaise était de 8,3 millions d'habitants. Chaque habitant arrivait à se nourrir. Thomas Malthus émet les hypothèses suivantes :

- chaque année la population augmente de 4 % ;
- chaque année, l'agriculture anglaise permet de nourrir 400 000 personnes de plus que l'année passée.



Thomas Malthus, économiste britannique (1766-1834)

1 Déterminer le nombre d'habitants et le nombre de personnes qui peuvent être nourries, en 1801, en Angleterre puis recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Année	Population	Nombre de personnes nourries
1800	8,3 millions	8,3 millions
1801		
1802		

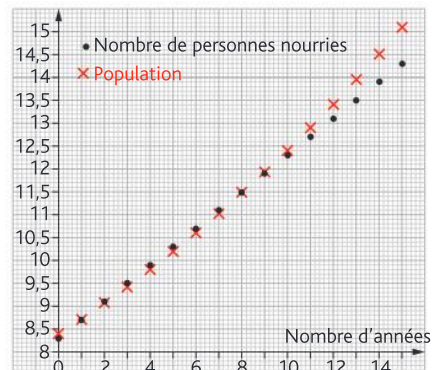
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de v .

2 a. Soit u la suite telle que u_n représente la population, en millions d'habitants, l'année $1800+n$. Ainsi $u_0 = 8,3$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de u .

b. Soit v la suite telle que v_n représente le nombre de personnes, en millions, qui peuvent être nourries en $1800+n$. Ainsi $v_0 = 8,3$.

3 a. On représente les suites u et v sur le graphique ci-dessous. Conjecturer les variations des suites u et v .

b. Avec cette modélisation la population anglaise pourra-t-elle toujours se nourrir ?



» Cours p. 54 et 56

Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

Définitions

- Une suite est une **suite arithmétique** si, pour passer d'un terme au suivant, on **ajoute** un même nombre réel, r , qui s'appelle **la raison**.
- u est arithmétique signifie que pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$.

EXEMPLES

Soit u la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$, pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n + 3$. Les premiers termes de la suite sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_0 = 5 & & u_1 = 8 & & u_2 = 11 & & u_3 = 14 \\
 \downarrow +3 & & \downarrow +3 & & \downarrow +3 & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Remarque

Une suite arithmétique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Propriété

Une suite u est arithmétique si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n$ est un réel indépendant de n . Ce réel est la **raison**.

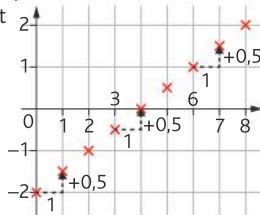
Représentation graphique d'une suite arithmétique

Propriétés

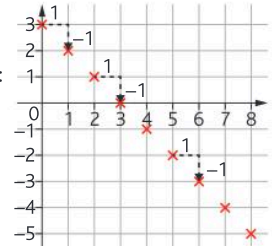
- Si u est une suite **arithmétique**, le nuage de points $(n ; u_n)$ est formé de **points alignés**.
- Réciproquement, si la représentation graphique d'une suite est formée de **points alignés**, la suite est **arithmétique**.
- La **raison** est le **coefficient directeur** de la droite sur laquelle se situent les points du nuage.

EXEMPLES

Soit u la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n + 0,5$. C'est une suite **arithmétique de raison 0,5**. Sa représentation graphique est :



Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n - 1$. C'est une suite **arithmétique de raison -1**. Sa représentation graphique est :



Variations d'une suite arithmétique

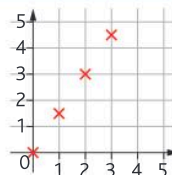
Propriétés

u est une suite arithmétique de raison r , où $r \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0$, alors u est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors u est constante.
- Si $r < 0$, alors u est strictement décroissante.

EXEMPLES

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = u_n + 1,5$. u est une suite arithmétique de raison $r = 1,5$, $r > 0$ donc u est **strictement croissante**.



Remarque

Les **variations** d'une suite arithmétique **ne dépendent que de sa raison**.

1 Déterminer les termes d'une suite arithmétique Calculatrice

➤ Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les six premiers termes de la suite arithmétique u de raison 0,3 et de premier terme $u_0 = 0,7$.

Méthode

- 1 Identifier la raison de la suite arithmétique afin d'en déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n : il s'agit d'une formule de récurrence.
- 2 Implanter dans la calculatrice la formule de récurrence de la suite u et indiquer le premier terme ainsi que son rang.

➤ Exercice 6 p. 61

Réponse

- 1 u est une suite arithmétique de raison $r = 0,3$ la formule de récurrence est $u_{n+1} = u_n + 0,3$



2 Démontrer qu'une suite est arithmétique

➤ Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 3 - 4n$ et $v_n = n^2 - 1$. Ces suites sont-elles arithmétiques ?

Méthode

- 1 Calculer les trois premiers termes de la suite : u_0, u_1 et u_2 .
- 2 Si $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ alors u n'est pas arithmétique. Si $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ et si, de plus, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n$ est un réel indépendant de n , alors u est arithmétique.

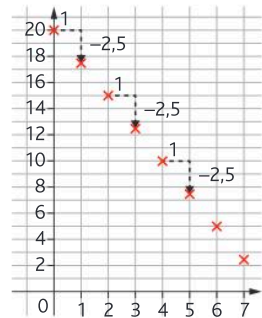
➤ Exercice 17 p. 61

Réponse

- 1 $u_0 = 3, u_1 = -1$ et $u_2 = -5$;
 $v_0 = -1, v_1 = 0$ et $v_2 = 3$.
- 2 $u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = -4$
 $u_{n+1} - u_n = 3 - 4(n+1) - (3 - 4n)$
 $= 3 - 4n - 4 - 3 + 4n = -4$
Donc u est une suite arithmétique de raison -4 .
 $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$. $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ donc v n'est pas arithmétique.

3 Conjecturer qu'une suite est arithmétique à partir de son graphique

➤ En début d'année, un élève achète un badge qui va lui permettre de prendre des cafés au distributeur du foyer du lycée. Il charge son badge avec 20 €. Sur l'appli de gestion de ses dépenses, il obtient le graphique ci-contre où l'abscisse représente le numéro de la semaine depuis qu'il a rechargé le badge et l'ordonnée la somme disponible sur son badge en fin de semaine. Ses dépenses suivent-elles une évolution arithmétique ?



Méthode

- 1 Si les points sont alignés on peut conjecturer que la suite est arithmétique.
- 2 Le coefficient directeur de la droite donne la raison de la suite.

➤ Exercice 26 p. 62

Réponse

- 1 Les points semblent alignés, on peut conjecturer que la suite est arithmétique.
- 2 Le coefficient directeur est $-2,5$ donc la suite u donnant le solde sur le badge en fonction de la semaine depuis que le badge a été chargé est définie par : $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = u_n - 2,5$.

Qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Définitions

- Une suite est une **suite géométrique** si, pour passer d'un terme au suivant, on **multiplie** par un même nombre réel non nul, q , qui s'appelle **la raison**.
- u est géométrique signifie que pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}^*$.

EXEMPLES

Soit u la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = 0,5 \times u_n$. Les premiers termes de la suite sont :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 0,5 \quad u_3 = 0,25$$

$\xrightarrow{\times 0,5}$ $\xrightarrow{\times 0,5}$ $\xrightarrow{\times 0,5}$

Propriété

Une suite u est géométrique si et seulement si, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel indépendant de n . Ce réel est la **raison**.

Remarques

- Une suite géométrique est définie par la donnée de son premier terme et de sa raison.
- Les suites géométriques étudiées en séries technologiques seront à termes **strictement positifs**, c'est-à-dire la raison q et le premier terme sont des réels strictement positifs.

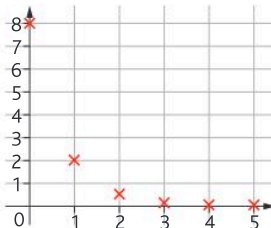
Représentation graphique d'une suite géométrique

Propriété

Si u est une suite **géométrique**, le nuage de points $(n; u_n)$ représente une croissance ou une décroissance dite « **exponentielle** ».

EXEMPLES

Soit u la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,25 \times u_n$. C'est une suite **géométrique de raison 0,25**. Sa représentation graphique est :



Remarque

Il est compliqué de déduire d'un nuage de points le caractère géométrique d'une suite, seule une tendance est observable.

Variations d'une suite géométrique

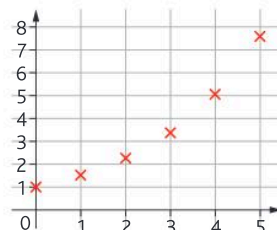
Propriétés

u est une suite géométrique de raison q , où $q > 0$.

- Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors u est constante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

EXEMPLES

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = 1,5 \times u_n$. u est une suite géométrique de raison $q = 1,5$. $q > 1$ donc u est **strictement croissante**.



4 Déterminer les termes d'une suite géométrique Calculatrice

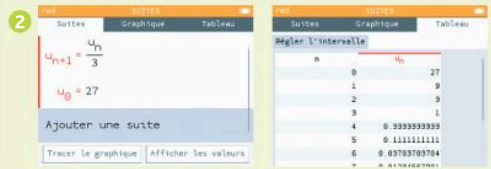
➤ Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les six premiers termes de la suite géométrique u de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 27$.

Méthode

- 1 Identifier la raison de la suite géométrique afin d'en déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n : il s'agit d'une formule de récurrence.
- 2 Implanter dans la calculatrice la formule de récurrence de la suite u et indiquer le premier terme ainsi que son rang.

Réponse

- 1 u est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$
la formule de récurrence est $u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n = \frac{u_n}{3}$



➤ Exercice 39 p. 63

5 Démontrer qu'une suite est géométrique

➤ Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 1$ et $v_n = 2 \times 5^n$. Ces suites sont-elles géométriques ?

Méthode

- 1 Calculer les trois premiers termes de la suite : u_0, u_1 et u_2 .
- 2 Si $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ alors u n'est pas géométrique.
Si $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$ et si, de plus, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel indépendant de n alors u est géométrique.

Réponse

- 1 $u_0 = 2, u_1 = 4$ et $u_2 = 10$;
 $v_0 = 2, v_1 = 10$ et $v_2 = 50$.
- 2 $\frac{u_1}{u_0} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2}$ donc u n'est pas géométrique.
 $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1}{v_0} = 5$
 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = \frac{5 \times 5^n}{5^n} = 5$ donc v est une suite géométrique de raison 5.

➤ Exercice 55 p. 65

6 Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique à l'aide de sa raison

➤ En 2024 le bénéfice annuel d'une entreprise est de 50 000 €. À la suite d'une étude, le bénéfice de l'entreprise est modélisé par une suite u telle que u_n représente le bénéfice prévisionnel à l'année 2024 + n . Ainsi $u_0 = 50\,000$. La modélisation amène à considérer la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,94u_n$. Comment va évoluer le bénéfice de cette entreprise dans les années à venir ?

Méthode

- 1 Identifier la nature et les caractéristiques de la suite.
- 2 Déterminer les variations de la suite en fonction de la raison et interpréter le résultat.

Réponse

- 1 $u_{n+1} = 0,94u_n$ donc la suite u est géométrique de raison 0,94.
- 2 Comme la raison est $q = 0,94$ et $0 < 0,94 < 1$ la suite est décroissante donc l'entreprise va voir ses bénéfices diminuer.

➤ Exercice 73 p. 66

Je retiens

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites définies par **réurrence**.

1. Suites arithmétiques

Définition

Soit r un nombre réel.
Une suite **arithmétique** de **raison r** est définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ réel donné} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Savoir-faire

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on **démontre** que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$, r étant un nombre réel, indépendant de n .

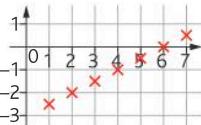
Représentation graphique

Le **nuage de points** $(n; u_n)$ associé à une suite arithmétique est situé sur une **droite de coefficient directeur r** .

Variations

La variation d'une suite arithmétique est **linéaire** et dépend du signe de r .

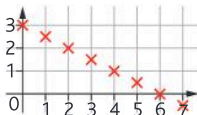
Si $r > 0$ la suite est strictement croissante



Si $r = 0$ la suite est constante



Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante



2. Suites géométriques

Définition

Soit q un nombre réel non nul.
Une suite **géométrique** de **raison q** est définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ réel donné} \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$$

En **série technologique**, les suites géométriques étudiées seront à termes **strictement positifs**, c'est-à-dire $q > 0$ et $u_0 > 0$.

Savoir-faire

Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on **démontre** que, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, q étant un nombre réel indépendant de n .

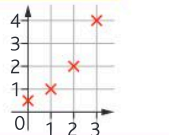
Représentation graphique

Le **nuage de points** $(n; u_n)$ associé à une suite géométrique représente une croissance (ou une décroissance) **exponentielle**.

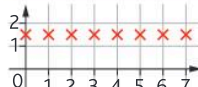
Variations

Déterminer la variation d'une suite géométrique revient à **comparer q et 1**.

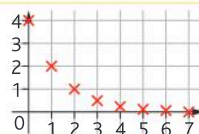
Si $q > 1$ la suite est strictement croissante



Si $q = 1$ la suite est constante



Si $0 < q < 1$ la suite est strictement décroissante



Je me teste

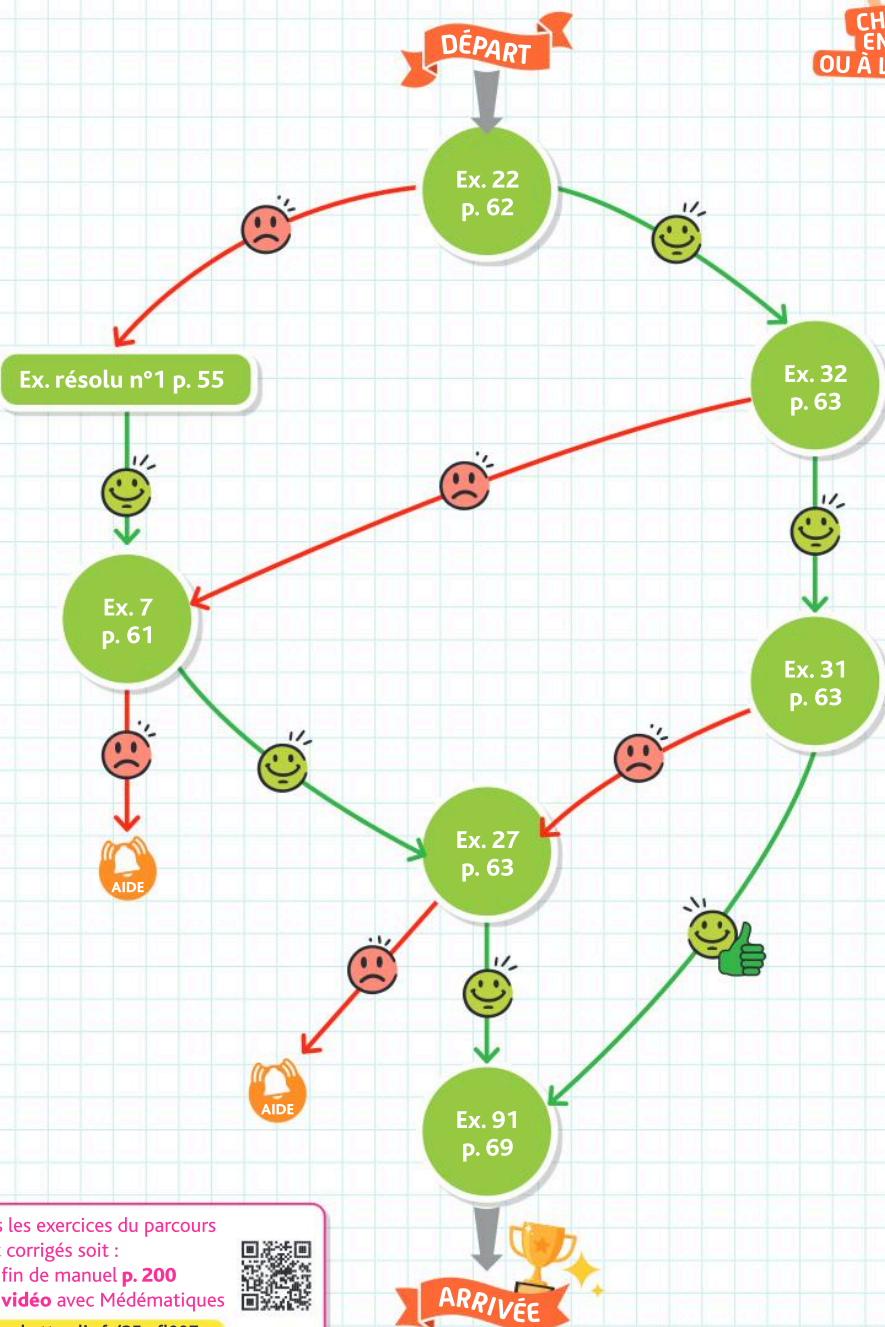


QCM interactif
et auto-corrigé

hachette-clic.fr/25mf1006

Je me prépare à une évaluation

Je maîtrise les suites arithmétiques



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

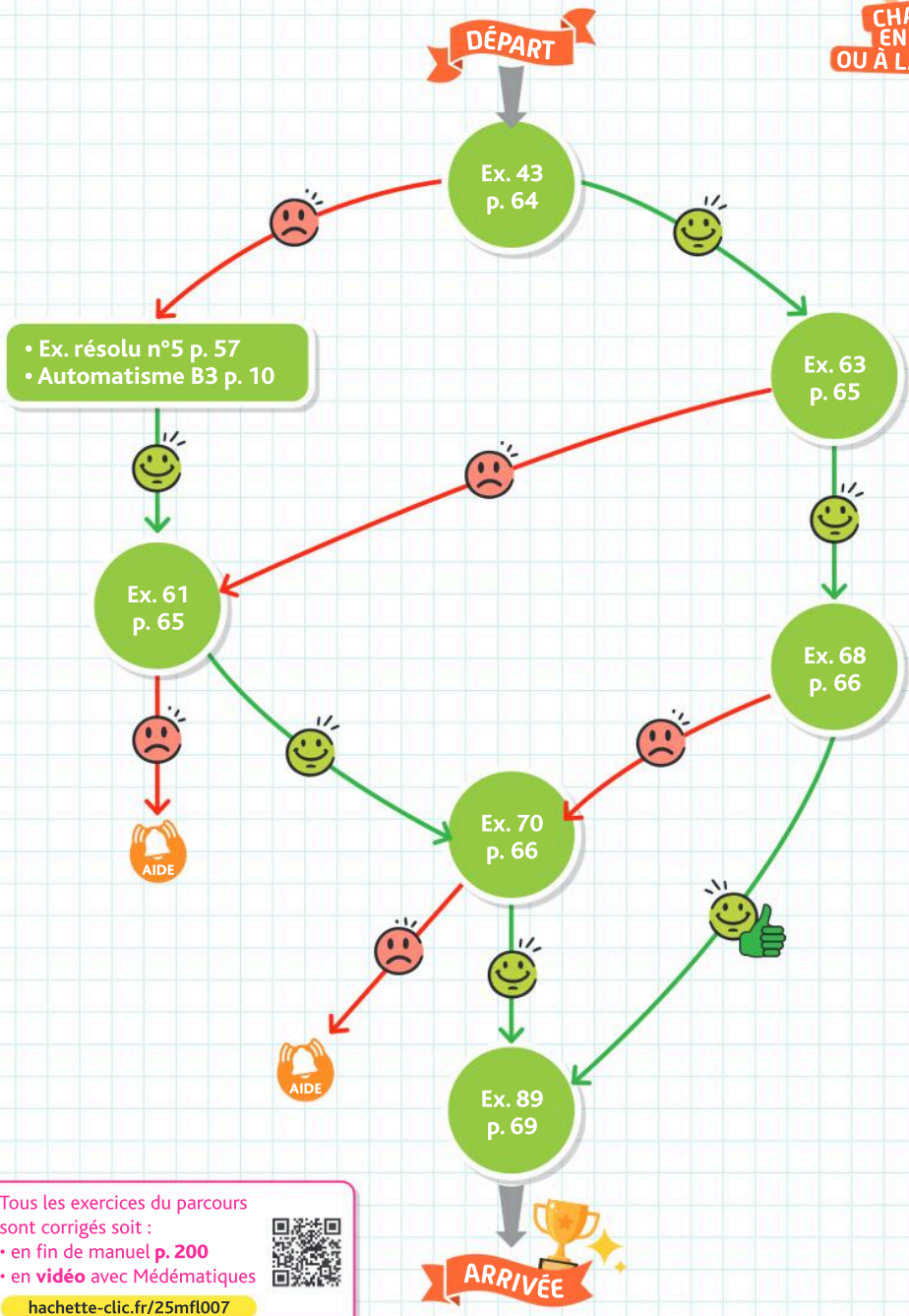
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mf1007

Je me prépare à une évaluation

Je maîtrise les suites géométriques



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

- en fin de manuel **p. 200**
- en **vidéo** avec Médématiques

hachette-clic.fr/25mfl007



Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl007



1 Suites arithmétiques

Questions flash

- 1 Calculer les 4 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 2.
- 2 u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$. Calculer u_1 et u_2 .
- 3 u est une suite arithmétique de raison 3 où $u_2 = 2$. Calculer u_1 et u_0 .
- 4 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n lorsque u est une suite arithmétique de raison 4.
- 5 u est une suite arithmétique telle que $u_0 = 3, u_1 = 6$. Calculer u_3 .

Une suite arithmétique est une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** (la raison).

- a. Calculer les 5 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 6.
- b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

Vidéo En France, l'espérance de vie des femmes était de 69,2 ans en 1950 et a progressé de manière arithmétique de 1950 à 2017, augmentant de 0,2 an chaque année.

- a. Selon les données de l'énoncé, quelle était l'espérance de vie des femmes en 1951 et 1952 ?
- b. En 2017, l'espérance de vie des femmes était de 85,4 ans. Quelle était celle de 2016 ?

- a. Calculer les 5 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison -2 .
- b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

- a. Calculer les 5 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$.
- b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

u est une suite arithmétique de raison -2 telle que $u_1 = 24$. Calculer u_0 et u_2 .

En 2023, le nombre de créations d'entreprises en Nouvelle Aquitaine s'élève à 87 000, soit 2 000 de moins qu'en 2022. On suppose que cette évolution va se poursuivre de la même façon.

- a. Selon ce modèle, quel nombre de créations d'entreprises peut-on prévoir en 2025 ?
- b. Quel était le nombre de créations en 2022 ?

À l'aide du tableur, on veut déterminer les premiers termes d'une suite arithmétique u de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 5.

	A	B
1	n	u(n)
2		0
3		1
4		2

Donner une formule à saisir dans la cellule B3 pour qu'en recopiant la cellule vers le bas on puisse automatiser le calcul de u_n .

À l'aide d'un tableur, on automatise le calcul des valeurs d'une suite arithmétique.

	A	B
1	n	u(n)
2		0
3		1=B2+3
4		2

En observant la formule saisie en B3, donner la raison et le premier terme de cette suite.

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 0,1. Recopier et compléter le script proposé ci-contre pour permettre d'afficher u_n dans la console.

```
def suite(n):
    u=.....
    for i in range(n):
        u=.....
    return u
```

Afin de programmer le calcul des termes d'une suite arithmétique, on propose l'algorithme ci-contre. Identifier le premier terme et la raison de cette suite.

```
def suite(n):
    u=-0.5
    for i in range(n):
        u=u-3
    return u
```

u est une suite arithmétique avec $u_0 = -2$ et $u_1 = 3$. Déterminer la raison.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n$ est un **réel indépendant de n** . Cette constante est la **raison** de la suite arithmétique.

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de **calculer trois termes consécutifs** et montrer que la différence du second et du premier n'est pas égale à la différence du troisième et du second. Par exemple $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Les premiers termes d'une suite sont 3 ; 7 et 11. Cette suite semble-t-elle arithmétique ? Si oui, donner sa raison.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl007



Les listes de nombres proposées sont-elles les premiers termes de suites arithmétiques ? Si oui, donner la raison.

- 5 ; 8 ; 11 ; 14
- 3 ; -6 ; -9 ; -12
- $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$

En France, le prix du kWh d'électricité a évolué de la manière suivante.

Mois	Février 2023	Août 2023	Février 2024
Prix (en €)	0,2062	0,2276	0,2516

L'évolution de ce prix peut-elle être modélisée par une suite arithmétique ? Si oui, donner la raison.

Dans une papillonneraie, un éleveur évalue sa population à 5 000 la première année, 4 250 la deuxième et 3 500 la troisième année. Peut-il modéliser l'évolution du nombre de papillons avec une suite arithmétique ?

Les suites u et v définies pour tout entier naturel n sont-elles arithmétiques ? Si oui donner la raison.

- $u_n = 3n - 1$
- $v_n = n^2$

Corrigé

Lalie possède 2 000 € sur son compte au 1^{er} janvier 2025. Chaque mois, la banque prélève 50 € pour rembourser un crédit à la consommation.

On note $u_0 = 2 000$ et u_n est la somme d'agent disponible sur le compte de Lalie à la fin du n -ième mois.

- Justifier que la suite u ainsi définie est arithmétique. Préciser sa raison.
- De quelle somme dispose Lalie fin mars 2025.

Un artisan veut recouvrir un toit avec des tuiles. Pour chaque rangée, il utilise trois tuiles de moins qu'à la rangée précédente.



- Modéliser cette situation à l'aide d'une suite arithmétique.
- Sur la 1^{re} rangée, on compte 150 tuiles. Combien y a-t-il de tuile sur la 2^e puis sur la troisième rangée.
- Le toit comporte 15 rangées. Quel est le nombre total de tuiles utilisées.

Pour chaque situation, reconnaître celles qui peuvent être modélisées par une suite arithmétique. Si c'est le cas, donner la raison et la formule de récurrence.

- Chaque année, le citronnier de Pierre donne 10 agrumes de plus que l'année précédente. u_n désigne le nombre de citrons obtenus par Pierre après n années.

On a relevé les précipitations au cours d'une saison pluvieuse. En moyenne, il est tombé chaque jour 6 mm de pluie par heure. u_n désigne la quantité, en millimètres, de pluie tombée après n heures.

Un influenceur voit son nombre de followers augmenter de 10 % chaque mois. u_n désigne le nombre de followers après n mois.

Le 1^{er} janvier 2024, Mariam ouvre une concession automobile. Le premier mois, elle vend 4 voitures. Chaque mois, elle vend deux voitures de plus que le mois précédent.

Soit u la suite telle que u_n représente le nombre de voitures vendues le n ième mois. Ainsi $u_1 = 4$.

- Déterminer u_2 et u_3 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et déterminer la nature de la suite u , préciser la raison.
- On considère le script ci-dessous :

```
def total(n):
    u=4
    S=0
    for i in range(n):
        S=S+u
        u=u+2
    return S
```

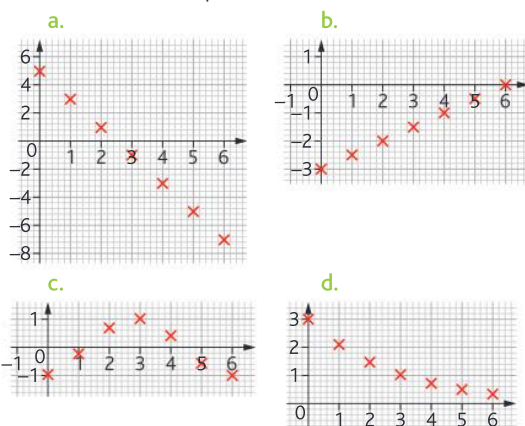
Dans la console on peut lire : `>>> total(5)`
40

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Dans un nuage de points représentant une suite, si tous les points sont alignés, la croissance est **linéaire** et la suite est arithmétique.

On détermine la raison en soustrayant les **ordonnées** de deux points consécutifs du nuage. C'est le **coefficient directeur** de la droite sur laquelle sont placés les points du nuage.

Avec la précision permise par le graphique, identifier les nuages de points qui peuvent correspondre à des suites arithmétiques et donner leur raison.



Corrigé

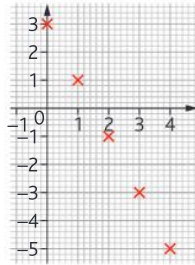
On donne la représentation graphique d'une suite u .

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec la précision permise par le graphique.

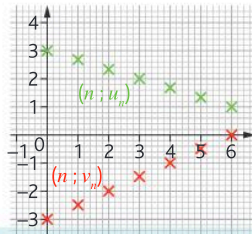
n	0	1	2
u_n

Expliquer pourquoi cette suite semble arithmétique.

b. Conjecturer alors sa raison et déterminer u_5 .



On a représenté sur un même graphique deux suites u et v . Expliquer pourquoi ces suites semblent arithmétiques. Préciser leur raison.



Une suite arithmétique est **croissante** lorsque sa **raison est positive**. Elle est **décroissante** lorsque sa **raison est négative**.

u, v et w sont des suites arithmétiques. Déterminer leurs variations.

- a. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n - 2$.
- b. v est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1,3$.
- c. $w_1 = 2$ et $w_{n+1} = w_n + 0,8$.

On considère la suite u définie par :

$$u_0 = \frac{5}{3} \text{ et } u_{n+1} = u_n - 2 + \frac{2}{3}$$

- a. Calculer u_1 .
- b. Montrer que u est arithmétique.
- c. Déterminer ses variations.

Corrigé

Calculatrice On considère les suites u et v définies par :

$$u_n = 2n + 6 \text{ et } v_n = 3n + 0,4$$

- a. Afficher les nuages de points sur l'écran de votre calculatrice. Conjecturer le sens de variation de chaque suite.
- b. Vérifier que les deux suites sont arithmétiques et donner leur raison.
- c. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n ainsi que v_{n+1} en fonction de v_n .
- d. Démontrer la conjecture effectuée au a.

Corrigé

D'après l'INSEE, l'espérance de vie était pour les hommes de 59,9 ans en 1946. Soit u la suite telle que u_n corresponde à l'espérance de vie des

hommes en $1946 + n$. La modélisation choisie par l'INSEE est $u_{n+1} = u_n + 0,25$.

- a. Justifier que cette suite est arithmétique.
- b. Donner u_0 et sa raison.
- c. Déterminer les variations de u et interpréter le résultat obtenu.

2 Suites géométriques

Questions flash

- 33 Calculer les 3 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
- 34 u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$. Calculer u_1 et u_2 .
- 35 u est une suite géométrique de raison 4 avec $u_1 = 8$. Calculer u_2 et u_0 .
- 36 Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n pour une suite u géométrique de raison 2.
- 37 u est une suite géométrique avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 21$. Déterminer sa raison.
- 38 Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 0,5. Parmi les scripts proposés ci-dessous, quel est celui qui permet d'afficher u_5 lorsque dans la console on saisit >>> suite(5) ?

```

a. def suite(n):
    u=3
    for i in range(n):
        u=0.5*u
    return u

b. def suite(n):
    u=3
    while n!=5:
        u=1/2*u
    return u

c. def suite(n):
    u=3
    for i in range(5):
        u=1/2+u
    return u

```

Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par un même nombre** (la raison). On ne considèrera que des raisons strictement positives.

- a. Calculer les 3 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 3.
- b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

QCM choisir la bonne réponse.

La ville de Bordeaux compte 262 000 habitants début 2024. On estime que sa population va augmenter de 2 % par an.

Soit u la suite telle que, pour tout entier naturel n , u_n représente la population de Bordeaux en $2024 + n$ ans. Alors pour tout n , on a :

- a. $u_{n+1} = u_n + 5\ 240$
- b. $u_{n+1} = u_n \times 1,02$
- c. $u_{n+1} = u_n \times 1,2$

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl007



- a. Calculer les 3 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
 b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

- a. Calculer les 3 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$.
 b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

Corrigé

Pour monter son entreprise, un entrepreneur dispose d'un capital de départ de 20 000 €. Il suppose que, grâce au développement de son entreprise, cet investissement augmentera de 4 % par an. On appelle C_n le capital disponible à la fin de l'année n . Ainsi $C_0 = 20\,000$.

- a. Calculer le capital C_1 acquis à la fin de la première année.
 b. Déterminer C_2 puis C_3 .

u est une suite géométrique de raison 2 avec $u_2 = 280$. Calculer u_1 et u_0 .

Les Hippopotames de Pablo Escobar

À la suite de son décès, en 1993 les hippopotames que le narcotrafiquant colombien avait importés pour son zoo personnel sont livrés à eux-mêmes. Sans prédateurs, ils se multiplient. En 2020 ils étaient 80. On estime que tous les 5 ans leur population double.



- a. Quel sera la population des hippopotames en 2025 ? en 2030 ?
 b. Soit u la suite tel que u_n désigne le nombre d'hippopotames en $2020 + 5n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite u .
 c. Calculer u_3 et u_4 et interpréter les résultats obtenus dans le contexte.
 d. Un chercheur estime que si rien n'est fait la population des hippopotames dépassera les 5 000 individus en 2050. Que penser de cette affirmation ?

Compléter le 4^e et le 5^e terme de la liste des termes des suites géométriques qui commencent par :

- a. 4 ; 12 ; 36 ; ... b. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$; ...

À l'aide du tableur, on veut déterminer les premiers termes d'une suite géométrique u de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.

	A	B
1	n	u(n)
2		0
3		1
4		2

Quelle formule saisir dans la cellule B3 pour qu'en recopiant la cellule vers le bas on puisse automatiser le calcul de u_n ?

À l'aide d'un tableur, on a voulu automatiser le calcul des valeurs d'une suite géométrique.

	A	B
1	n	u(n)
2		0
3		1=B2/2
4		2

En observant la formule saisie en B3, donner la raison, puis le premier terme de cette suite.

Soit u la suite géométrique définie par $u_0 = 3$ et de raison 0,1.

Compléter le script proposé ci-dessous pour permettre d'afficher u_n dans la console.

```
def suite(n):
    u=3
    for i in range(n):
        u=.....
    return u
```

Calculatrice On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

À l'aide de la calculatrice, déterminer u_5 ; u_{10} et u_{15} .

- Pour montrer qu'une suite est géométrique, il suffit de montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un **réel indépendant de n** . Cette constante est la **raison** de la suite géométrique.

• Pour montrer que la suite n'est pas géométrique, il suffit de **calculer trois termes consécutifs** et montrer que le rapport du second et du premier n'est pas égal au rapport du troisième et du second.

Par exemple $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Les premiers termes d'une suite sont 1, 8 et 64. Cette suite peut-elle être géométrique ? Si oui donner la raison.

6, 30 et 120 sont-ils les premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui donner la raison.

Les listes de nombres ci-dessous sont-elles les premiers termes de suites géométriques ? Si oui, donner la raison.

a. 1024 ; 512 ; 256 ; 128

b. 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01

Les premiers termes d'une suite sont 80, 20 et 5. Cette suite peut-elle être géométrique ? Si oui, donner sa raison.

Les suites u et v définies ci-dessous sont-elles géométriques ?

- a. $u_{n+1} = 2u_n$
b. $v_n = 2 \times 3^n$

Les suites u et v définies ci-dessous sont-elles géométriques ?

- a. $u_n = 3n^2 + 2,1$ b. $v_n = \frac{1}{3^n}$

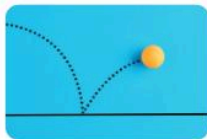
Montrer que les situations suivantes peuvent être modélisées à l'aide d'une suite géométrique.

- a. Chaque année un appartement voit sa valeur augmenter de 5 %.
b. Depuis la mise en place d'un radar, le nombre d'infractions diminue de 10 % par semaine.

Les situations suivantes peuvent-elles être modélisées par une suite géométrique ? Si oui, donner leur raison.

- a. Une vidéo virale sur Tiktok augmente de 4,8 % de vues par jour.
b. La dune du Pilat est en érosion chronique : le pied de la dune recule en moyenne de 4 m par an.

Un joueur lâche une balle de tennis d'une hauteur de 1,60 m. La balle rebondit à chaque fois aux trois quarts de la hauteur précédente.



- a. Calculer la hauteur du premier rebond.
b. Quelle sera la hauteur du deuxième rebond ?
c. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.
d. Cette suite est-elle géométrique ? Si oui donner sa raison.

Pour chaque situation, reconnaître celles qui peuvent être modélisées par une suite géométrique.

- a. Le nombre d'abonnés à un compte Instagram augmente de 4 % tous les mois.
b. Les grands-parents de Loane versent 30 € sur son livret A tous les mois.
c. Le budget d'une association étudiante baisse de 1,8 % tous les ans.



À Reims, la valeur d'un bien immobilier de 200 000 € augmente de 5 % par an.

- a. Calculer la valeur de ce bien au bout d'un an.
b. Quelle sera la valeur du bien au bout de 2 ans ?
c. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.
d. Cette suite est-elle géométrique, si oui, donner sa raison.

À la naissance d'Amza, ses grands-parents décident d'ouvrir un LIVRET A et y déposent la somme de 1 000 €. Le LIVRET A est un placement à intérêts

composés, c'est-à-dire que chaque année le nouveau capital est calculé à partir du capital de l'année précédente, augmenté des intérêts. On suppose que chaque année le taux d'intérêt est de 3 %.

- a. Montrer que le capital disponible pour les deux ans d'Amza est de 1 060,90 €.
b. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.
c. Les grands-parents pensent que Amza pourra payer son permis (1 800 €) avec la somme d'argent disponible sur le LIVRET A à ses 18 ans. Est-ce que ce sera effectivement le cas ?

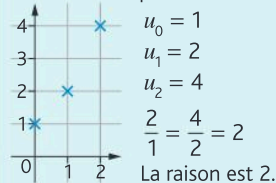


Au cours de l'année 2025, une entreprise a fabriqué 30 000 véhicules électriques. Dans les années à venir, elle prévoit une augmentation de cette production de 10 % par an. On pose $p_0 = 30\,000$ et on note p_n la quantité produite au cours de l'année (2025 + n)

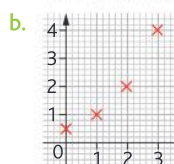
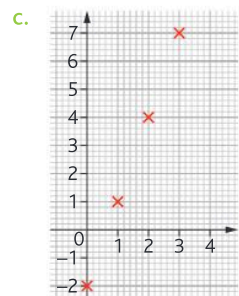
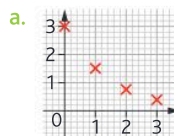
- a. Calculer p_1, p_2 et p_3 .
b. Exprimer, pour tout entier n , p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la nature de la suite p .
c. Déterminer p_{10} . Donner la signification de ce nombre dans le contexte de l'exercice.
d. Calculer $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.
e. Interpréter la valeur trouvée dans le contexte de l'exercice.

Si le nuage de points représentant une suite est sous la forme d'une **exponentielle** (croissante ou décroissante) alors la suite est géométrique.

On détermine la raison en faisant le rapport des **ordonnées** de deux points consécutifs du nuage.



Parmi les représentations graphiques ci-dessous, avec la précision permise par le graphique, déterminer celles qui peuvent représenter le nuage de points d'une suite géométrique. Et, le cas échéant, déterminer leur raison.

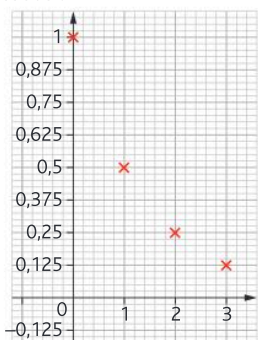


Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl007



La représentation graphique d'une suite u est donnée ci-dessous :



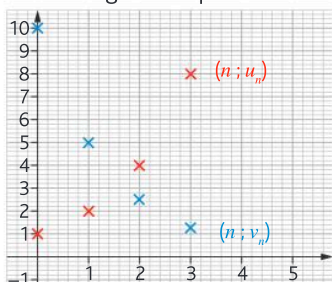
a. Avec la précision permise par le graphique, recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3
u_n

Expliquer pourquoi cette suite semble géométrique.

b. Conjecturer alors sa raison.

Deux suites u et v sont représentées ci-dessous. Avec la précision permise par le graphique, conjecturer qu'elles sont géométriques et donner leur raison.



Soit u une suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ et $u_0 = 4$.

Tracer la représentation graphique de u .

On considère une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison strictement positive. Alors la suite est **croissante lorsque sa raison est supérieure à 1** et **décroissante lorsque sa raison est inférieure à 1**.

Une population de 150 bactéries coliformes (intestinales) est introduite dans une substance nutritive. Après chaque minute, la population augmente de 3,5 %.

Soit la suite u définie, pour tout entier naturel n , où u_n représente le nombre de bactéries vivantes présentes au bout de n minutes.

On a donc $u_0 = 150$.

- Calculer u_1 et u_2 . Arrondir à l'unité.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Déterminer le sens de variation de u .

Les suites u et v sont définies par :

$$u_0 = 12 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n}{3}; v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n}{5}.$$

- Montrer que u et v sont des suites géométriques.
- Déterminer la variation de chacune des suites.

Calculatrice Les suites u et v sont définies par :

$$u_n = 6 \times 2^n \text{ et } v_n = 3 \times 0,4^n.$$

- Afficher le nuage de point sur l'écran de votre calculatrice. Conjecturer le sens de variation de chaque suite.
- Vérifier que les deux suites sont géométriques, donner leurs raisons et leurs premiers termes.
- En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
- Démontrer la conjecture effectuée au a.

Calculatrice Les suites u et v sont définies, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 1,03u_n$ avec $u_0 = 0,1$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$ avec $v_0 = 1270$.

- À l'aide de la calculatrice, donner u_{20} et v_{20} (arrondir au dix-millième près).
- Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq v_n$.

```
def comparaison():
    n=0
    u=0.1
    v=.....
    while u<v :
        n=.....
        u=.....
        v=v/2
    return .....
```

La suite u est définie, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2^n}{7^n}$.

- Calculer u_0 et u_1 .
- Déterminer la variation de u .

u, v et w sont des suites géométriques. Donner leurs variations.

- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,75u_n$.
- $v_1 = 0,3$ et $v_{n+1} = 5u_n$.
- w est une suite de premier terme 100 et de raison 0,99.

Les suites géométriques proposées sont-elles croissantes ou décroissantes ?

- $u_0 = 0,75$ et $u_{n+1} = 2u_n$.
- v est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_1 = 5$.
- $w_0 = \frac{1}{3}$ et $w_{n+1} = \frac{w_n}{6}$.

3 Suites arithmétiques et géométriques

• Intérêts simples

À chaque fin de période (mois, année...), les intérêts sont calculés uniquement sur la somme (capital) placée au départ.

• Intérêts composés

À la fin de chaque période, les intérêts produits sont ajoutés au capital et produisent des intérêts pendant les périodes suivantes.

Associer chaque suite à son expression en fonction de n :

A : suite arithmétique décroissante

B : suite géométrique de raison 5

C : suite géométrique décroissante

D : suite arithmétique de raison 5

① $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,5u_n$ ② $u_n = 3 + 5n$

③ $u_n = 5^n$ ④ $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

Intérêts simples

On dispose de 25 000 € que l'on place à intérêt simple au taux de 5 % l'an.

On note $C_0 = 25\,000$ € et C_n la somme dont on disposera au bout de n années de placement.

a. Calculer C_1 et C_2 .

b. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

c. Reconnaître la nature de la suite C .

d. De quelle somme disposera-t-on si l'argent reste placé pendant 5 ans ?

Intérêts composés

Hilena dispose de 3 000 €. Elle place cette somme, à intérêts composés, au taux annuel de 2,5 % l'an.

On note $C_0 = 3\,000$ et C_n la somme dont Hilena disposera au bout de n années de placement.

a. Calculer C_1 et C_2 .

b. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

c. Reconnaître la nature de la suite C .

d. Déterminer le capital d'Hilena si elle laisse son argent placé pendant 5 ans.

Calculatrice Comparaison de placements

Pierre et Carole disposent chacun de 8 000 €.

Pierre les place à intérêt simple au taux de 3 % par an.

Carole les place à intérêts composés, au taux annuel de 2 % par an.

a. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la période durant laquelle le placement de Pierre est plus avantageux que celui de Carole.

b. Pour chaque placement, déterminer au bout de combien d'années le capital initial aura augmenté de plus de la moitié.

Pour chaque situation, déterminer la formule de récurrence et reconnaître la nature des suites modélisées.

a. Afin de se préparer pour un marathon, Théo suit un protocole d'entraînement. Chaque jour, il court 1 km de plus que le jour précédent. u_n désigne le nombre de kilomètres parcourus par Théo après n jours d'entraînement.



b. Avec l'inflation, le coût des matières premières d'un producteur de vêtements augmente de 3,5 % par an. u_n désigne le prix des matières premières textiles après n années.

Les premiers termes d'une suite sont donnés dans le tableau ci-dessous.

n	u(n)
0	2
1	3
2	4,5
3	6,75

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b. Déterminer, en le justifiant, la nature de la suite u .

c. Déterminer le sens de variation de u .

Elya a commencé un tableur pour déterminer les termes d'une suite.

En B3, elle a tapé :

« =7*A2+3 »

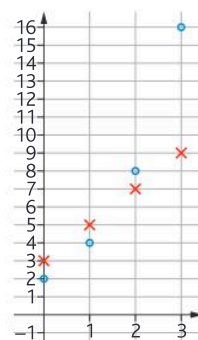
n	u _n
0	3
1	1
2	2

a. Déterminer les valeurs de u_2 et u_3 .

b. Déterminer, en le justifiant, la nature de la suite u .

c. Préciser le sens de variation de u .

Dans le repère ci-dessous, on a représenté les premiers termes de deux suites u (avec des croix rouges) et v (avec des ronds bleus).



a. L'une des deux suites est arithmétique, l'autre est géométrique. Identifier les suites avec leur nature.

b. Pour chacune des suites, donner la raison et le premier terme (avec la précision permise par le graphique), puis le sens de variation.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl007



Associer chacune des situations suivantes à sa représentation graphique :

<p>Situation A : Pour mesure des températures, on peut utiliser comme unité le degré Fahrenheit : $T^{\circ}\text{F} = T^{\circ}\text{C} \times 1,8 + 32$</p>	<p>Situation B : On souhaite convertir des dollars en euros. Au 20/06/22, un dollar vaut 0,95 €.</p>	<p>Situation C : Un actif financier augmente de 11 % par an. On souhaite suivre son évolution sur plusieurs années.</p>
<p>Graphique 1 :</p>	<p>Graphique 2 :</p>	<p>Graphique 3 :</p>

Un drone parcourt 4,9 mètres pendant la première seconde, puis la distance parcourue augmente de 2 % toutes les secondes.



- Modéliser cette situation par une suite.
- Déterminer la nature de la suite obtenue.
- Calculer la distance totale parcourue par le drone pendant 3 secondes.

Pour les trois algorithmes proposés, identifier ceux qui traduisent des suites arithmétiques ou des suites géométriques. Pour chaque suite, donner la raison, le premier terme, la variation et la relation de récurrence.

a.

```
def suite_u(n):
    u=-5
    for i in range(n):
        u=u+2.5
    return u
```

b.

```
def suite_v(n):
    v=1.5
    for i in range(n):
        v=v*0.7
    return v
```

c.

```
def suite_w(n):
    w=2
    for i in range(n):
        w=w*8/3
    return w
```

Calculatrice En 2025, la batterie de votre smartphone affiche une autonomie de 10 heures. Chaque année, l'autonomie de la batterie baisse de 8 %.

Soit u la suite telle que u_n désigne l'autonomie de la batterie (en heure) après n années d'utilisation. Que vaut u_0 ?

- Déterminer l'autonomie de la batterie en 2026 puis en 2027.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Déterminer à l'aide de la calculatrice, l'autonomie de la batterie dans 10 ans.
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'année à partir de laquelle l'autonomie de la batterie sera de moins de 2 h.

On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie plusieurs modèles d'évolution de cette population. En 2025, la population de la ville était de 15 000 habitants.

1. Modèle 1

On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 1 000 habitants par an. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants pour l'année $(2025+n)$. On a ainsi $u_0 = 15\,000$.

- Calculer u_1 et interpréter le résultat.
- Déterminer la nature et la raison de la suite u .
- On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N=0
U=15000
while U<30000:
    U=U+1000
    N=N+1
```

À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N est égale à 15. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. Modèle 2

On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an. On note v_n le nombre d'habitants pour l'année $(2025+n)$. Ainsi on a $v_0 = 15\,000$.

- Déterminer la nature et la raison de la suite v .
- Calculer, selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2030, arrondi à l'unité.

Une population de bactéries augmente toutes les deux heures de 44 %.

- Peut-on affirmer que cette population augmente de 22 % par heure ?
- Supposons que la population était de 3 milliards de bactéries à midi.
 - Combien la population comptera-t-elle d'individus à 14 h ?

b. Combien la population comptait-elle d'individus à 10h ?

3. Montrer que la population de bactéries peut être modélisée par une suite (p_n) dont on donnera la nature et la raison.

Corrigé

Calculatrice La légende de Sissa

Le roi accepte de payer Sissa en grains de riz selon la méthode suivante : sur la première case d'un échiquier, il pose un grain de riz, puis deux grains sur la deuxième case, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met jusqu'à la 64^e case.

On définit la suite u telle que, pour tout entier naturel n , u_n donne le nombre de grain de riz sur la n -ième case.

a. Donner u_1 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

c. Que peut-on en déduire pour la suite u ?

d. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier.

e. Un grain de riz pèse en moyenne 0,04 g. Calculer la masse totale de riz à déposer sur la dernière case.



Calculatrice Jasmine dispose de deux contrats d'embauche commençant au 1^{er} janvier 2026. Ces contrats sont valables pour 10 ans.

Pour les deux contrats, le salaire mensuel perçu tout au long de l'année 2026 est de 1 000 €.

Contrat A : le salaire mensuel augmente de 90 € au 1^{er} janvier de chaque année.

– on note u_0 le salaire mensuel perçu tout au long de l'année 2026.

– plus généralement, on note u_n le salaire mensuel perçu tout au long de l'année $(2026 + n)$.

Contrat B : le salaire mensuel augmente de 7 % au 1^{er} janvier de chaque année.

– on note v_0 le salaire mensuel perçu tout au long de l'année 2026.

– plus généralement, on note v_n le salaire mensuel perçu tout au long de l'année $(2026 + n)$.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . Quelle est la nature de la suite u ?

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite v ?

c. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le montant du salaire perçu en 2035, pour chaque contrat.

Corrigé

Calculatrice Maël souhaite souscrire un abonnement à une plateforme de séries à la demande. Pour cela, il compare les offres sur le marché.

En 2024 les tarifs sont :

• *Netflix* : 5,99 € par mois avec une augmentation de 2 centimes tous les ans.

• *Desn'y* : 5,89 € par mois avec une augmentation de 5 centimes tous les ans.

a. Montrer que si Maël choisit de s'abonner à Netflix, il dépense, sur l'année 2025, 72,12 € alors qu'avec Desn'y il dépense 71,28 €.

b. Modéliser chaque situation à l'aide d'une suite. En donner la nature et les éléments caractéristiques (premier terme et raison).

c. En utilisant la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle l'abonnement pour Netflix sera plus avantageux.

d. Finalement, Maël ne veut pas choisir, il prendra les deux abonnements. Soit w la suite telle que w_n corresponde à la somme annuelle payée par Maël pour avoir souscrit les deux abonnements, en $2024 + n$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de w .

Calculatrice L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine.

1. On considère un échantillon de 10^6 noyaux d'iode 131. Chaque jour 8,3 % de ces noyaux disparaissent.

On note u_n le nombre de noyaux d'iode 131 encore présents dans l'échantillon après n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

a. Calculer u_1 et u_2 .

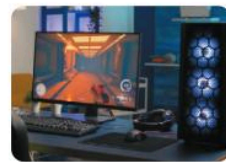
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

c. On appelle « demi-vie » d'un composé radioactif, le temps nécessaire pour que la moitié du produit ait disparu. En utilisant votre calculatrice, déterminer la demi-vie de l'iode 131.

2. Le césium 137 est un autre composé radioactif dont on trouve notamment des traces à la suite de l'accident de Tchernobyl.

Chaque année, 2,3 % des noyaux de césium 137 disparaissent. Reprendre et adapter les questions du 1. pour déterminer la demi-vie du césium 137. On prendra un échantillon de 10^8 noyaux.

Paul a acheté un ordinateur de gaming à 1 800 €. Un sinistre a lieu 5 ans plus tard. Son assurance estime que la valeur de son bien diminue de 15 % par an (on parle de vétusté).



On définit la suite u telle que, pour tout entier naturel n , u_n donne la valeur estimée de l'ordinateur après n années.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b. Que peut-on en déduire pour la suite u ?

c. Quelle somme l'assurance va-t-elle rembourser à Paul ?

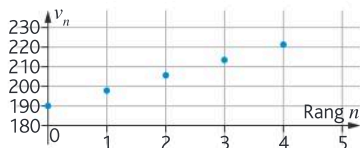
Photos de vacances **STMG**

» Modéliser • Communiquer

Lise a créé une page sur un réseau social pour partager des photos de voyage. D'après les statistiques de fréquentation des premières semaines, elle considère qu'on peut modéliser l'évolution du nombre de personnes intéressées par ses photos par une augmentation de 8 % chaque semaine. Au moment de la création de la page, le nombre de personnes intéressées était de 150. On note u_n le nombre de personnes intéressées par les photos, selon le modèle considéré par Lise, n semaines après la création de la page. Les premières valeurs, arrondies à l'unité, de la suite u ainsi définie sont données dans le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F
1	Rang de la semaine	0	1	2	3	4
2	Nombre de personnes intéressées	150	162	175	189	

- Calculer la valeur de u_4 . Arrondir à l'unité.
- Quelle formule, destinée à être recopiée vers la droite, peut-on saisir dans la cellule C2 pour obtenir les valeurs de la suite u ? Justifier.
- Quelle est la nature de la suite u ? Justifier.
- Ali a démarré en même temps que Lise le partage de photos de ses propres voyages. Pour les premières semaines, il a présenté sur le graphique ci-dessous le nombre v_n de personnes intéressées par ses photos n semaines après la création de la page. On considère que l'évolution du nombre de personnes intéressées se poursuit de la même façon.



Pourquoi peut-on conjecturer que la suite v est arithmétique ?

- On admet que v est arithmétique et on donne les deux premiers termes de la suite v dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C
1	Rang de la semaine	0	1
2	Nombre de personnes intéressées	190	198

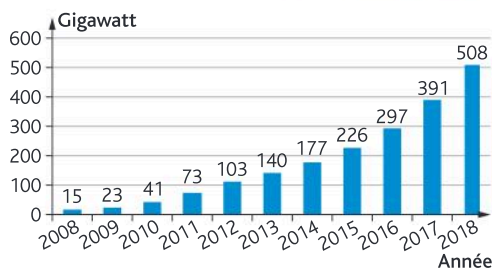
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire v_2, v_3 et v_4 . Quelle formule doit-on saisir dans la cellule C2 pour qu'en étirant vers la droite, on obtienne les termes de la suite v ?

- Est-il possible qu'à un moment donné, il y ait davantage de personnes intéressées par les photos de Lise que par celles d'Ali ?

Une énergie renouvelable de plus en plus puissante **STI2D STL**

» Calculer • Modéliser • Raisonner

L'évolution de la puissance solaire photovoltaïque dans le monde entre fin 2008 et fin 2018 est résumée dans le graphique ci-dessous :



- Montrer qu'entre fin 2008 et fin 2018, la puissance solaire photovoltaïque a augmenté d'environ 3 287 %.
- Calculer les taux d'évolution de la puissance solaire, exprimés en pourcentage, entre 2016 et 2017, ainsi qu'entre 2017 et 2018. On arrondira à l'unité.
- On se propose d'estimer la puissance solaire photovoltaïque dans le monde pour les années suivantes en faisant l'hypothèse que le taux de croissance annuel est resté constant et égal à 30 %. On note P_n la puissance solaire photovoltaïque dans le monde, en gigawatt, à la fin de l'année 2018+n. Ainsi, $P_0 = 508$.

- Compléter la fonction puissance(n) ci-contre afin qu'elle renvoie P_n lorsque n est choisi par l'utilisateur.

```
def puissance(n):
    P=...
    for i in range(n):
        P=...
    return P
```

- Un chercheur pense que si le taux de croissance se maintient à 30 %, la production dépassera les 2 400 gigawatts avant fin 2024. Afin de valider ou d'invalider son hypothèse, il utilise la liste suivante :

```
L=[round(puissance(n),2) for n in range(7)]
```

[round(x,n) permet d'arrondir avec n décimales, le nombre x . Ainsi round(2.1235,2) renvoie 2,12.]

Et il obtient :

```
>>> print(L)
[508, 660.4, 858.52, 1116.08, 1450.9, 1886.17, 2452.02]
```

Expliquer ce que contient la liste L. Que peut-on conclure pour l'hypothèse du chercheur ?

Une start-up de sacs à dos STMG Calculatrice

» Chercher • Représenter • Communiquer

Une jeune entreprise fabriquant des sacs à dos a vendu 10 000 sacs pendant l'année 2024. Elle anticipe une augmentation de ses ventes de 5 % par an pour les années suivantes. On modélise le nombre de sacs vendus annuellement à l'aide d'une suite u où u_n représente les ventes après n années, soit en 2024 + n . Ainsi $u_0 = 10\,000$.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite u ainsi que sa raison.
- Utiliser le tableau de la calculatrice pour faire apparaître les différentes valeurs de u_n . En quelle année, l'entreprise arrivera-t-elle à vendre 20 000 sacs par an ?

Comment financer sa voiture STMG Tableur

» Raisonner • Communiquer

Jo veut acheter un véhicule électrique qui coûte 25 000 €. Il ne dispose pas de la somme nécessaire pour payer comptant. Jo verse 150 € à l'achat puis ses mensualités augmentent de 3 % tous les mois.

- Soit v la suite correspondant aux mensualités versées par Jo. Ainsi v_n représente la mensualité versée le n -ième mois.

	A	B	C
1	n	v(n)	Total versé
2	0	150	150
3	1		

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , et en déduire la nature de la suite v ainsi que sa raison et son premier terme.

- Afin de calculer la somme totale versée par Jo, on décide de compléter une feuille de tableur.

1. Quelle formule faut-il saisir en B3 pour qu'en étirant la formule vers le bas, on puisse afficher les mensualités versées par Jo ?

2. Quelle formule faut-il saisir en C3 pour qu'en tirant vers le bas on puisse afficher la somme totale versée par Jo au concessionnaire ?

- Compléter la feuille de calcul. Au bout de combien de mois Jo aura-t-il remboursé sa voiture ?

Peut-on baisser sa facture d'énergie grâce au solaire ? STI2D Python Calculatrice

» Modéliser • Raisonner • Communiquer

On trouve sur une documentation donnant les recommandations d'installation de panneaux photovoltaïques : « En France, 1 m² de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kWh/an.

La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an. La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kWh. »

Au 1^{er} janvier 2025, Sandra installe 20 m² de panneaux photovoltaïques sur sa maison. On modélise la quantité d'énergie produite à l'aide d'une suite u où u_n correspond à la quantité d'énergie produite pendant l'année 2025 + n .

- Déterminer u_0 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , et en déduire la nature de la suite u ainsi que sa raison
- Compléter la fonction `suite(n)` ci-contre afin que cet algorithme permette de calculer u_n .

```
def suite(n):
    u = .....
    for i in range(n):
        u = .....
    return u
```

d. Déterminer, à l'aide de la calculatrice ou de l'algorithme, la quantité d'énergie produite en 2035.

e. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il permette d'afficher le nombre d'années à partir duquel l'installation aura perdu la moitié de son rendement.

```
n=0
while suite(n)>.....:
    n=n+1
    print(...)
```

f. Implanter l'algorithme en Python ci-contre. Quel est le résultat renvoyé ? Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

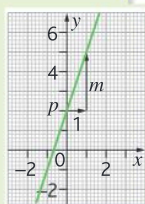
```
n=0
S=0
while S<20000:
    S=S+suite(n)
    n=n+1
    print(n)
```

Pour entrer dans le chapitre

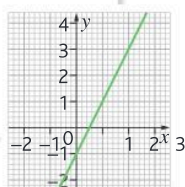
3

Reconnaître une fonction affine

On appelle fonction « **affine** » toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux réels donnés. La représentation graphique de cette fonction est une droite d dont le **coefficient directeur** (la pente) est m et l'**ordonnée à l'origine** (le point où la droite coupe l'axe des ordonnées) est p .



- 1 Dans un repère, tracer la droite d'équation $y = 2x + 3$.
- 2 Dans un repère, tracer la droite d'équation $y = -4x + 2$.
- 3 Déterminer l'équation de la droite dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



Déterminer par le calcul l'équation d'une droite passant par deux points

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite Δ d'équation $y = mx + p$.

On a alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et on trouve la valeur de p en remplaçant y et x par les coordonnées de A ou de B dans l'équation $y = mx + p$.

- 4 Déterminer l'équation de la droite passant par $A(2; 4)$ et $B(0; 1)$.
- 5 Déterminer l'équation de la droite passant par $M(-1; 6)$ et $N(0; 4)$.

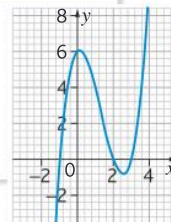
Dresser les tableaux de signes et de variations d'une fonction à partir de sa représentation graphique

Un **tableau de signes** fournit trois informations sur la fonction :

- Les réels, s'ils existent, pour lesquels la fonction s'annule
- Les intervalles, s'ils existent, sur lesquels la fonction est positive
- Les intervalles, s'ils existent, sur lesquels la fonction est négative

Le **tableau de variations** fournit les informations concernant la croissance ou la décroissance de la fonction et la présence d'éventuels maximum et minimum.

- 6 Dresser le tableau de **signes** et celui de **variations** de la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



Fonctions : généralités



Focus métiers

Économie **Logistique**
Design **Santé** Ingénierie

Les fonctions servent au calcul des forces en physique, à la programmation d'algorithmes, à l'analyse des coûts, ou aux traitements des maladies.



 Découvrez le métier de biostatisticien

hachette-clic.fr/25mf1008

Automatismes du chapitre

- D19** Déterminer graphiquement des images et des antécédents 19
- D20** Résoudre graphiquement une équation, une inéquation du type :
 $f(x) = k, f(x) < k$ 19
- D21** Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variations 20
- D25** Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points 22

Activités de découverte

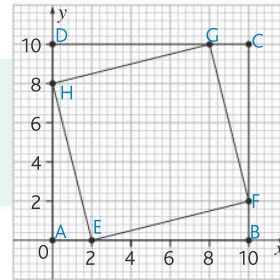
ACTIVITÉ 1

Calculer une aire, c'est carré !

Calculatrice

Objectif Se réapproprier la notion de fonction

Soit ABCD un carré de côté 10, les points E, F, G et H sont respectivement les points des segments [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que $AE = BF = CG = DH$. On pose $AE = x$. On admet que EFGH est un carré.



1 Faire la figure pour $x = 4$ et $x = 6$. Calculer l'aire de EFGH dans ces deux cas.

2 Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

3 Exprimer l'aire du carré EFGH en fonction de x .

4 On note $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$. Calculer $f(4)$ et $f(6)$. Que constate-t-on ?

5 À l'aide de votre calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f ; en déduire le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.

6 Pour quelle valeur de x l'aire de EFGH est-elle minimale ?

» Cours p. 76

ACTIVITÉ 2

Toujours moins de CO₂

Objectif Modéliser et revoir les fonctions affines

En France continentale, de 1990 à 2016, EDF a diminué par trois ses émissions de CO₂, qui sont passées de 24 millions de tonnes (24 Mt) à 7 Mt environ. La tendance à la baisse se poursuit et les émissions s'élevaient à 5,3 millions de tonnes de CO₂ en 2022. Le graphique ci-contre représente la quantité de CO₂ émis en Mt en fonction de l'année (Source : edf.fr).



» Cours p. 76



1 Pour approcher l'ensemble des points présents sur le graphique, on a tracé une droite entre le point obtenu pour 1990 et celui obtenu pour 2020. Ces points ont pour coordonnées : (1990 ; 28) et (2020 ; 6). Cette droite est la représentation graphique d'une fonction f . Montrer que l'expression de cette fonction est

$$f(x) = -\frac{11}{15}x + 1487.$$

2 En 2010, les émissions moyennes de CO₂ étaient de 15,6 Mt. Comparer ce résultat à celui obtenu en utilisant le modèle.

3 Selon ce modèle, quelle serait la valeur des émissions en 2025 ?

Fonctions, tu as la ref ?

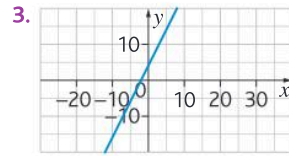
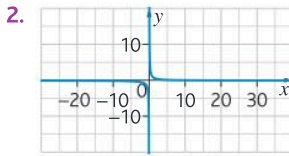
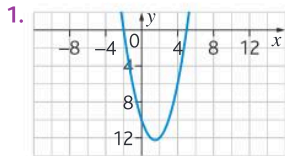
Objectif Différencier les fonctions de référence par leur représentation graphique et leurs tableaux de signes et variations

1 À chaque fonction f, g, h , associer son graphique

a. $f(x) = (x + 2)(x - 5)$

b. $g(x) = 2x + 4$

c. $h(x) = \frac{1}{x}$



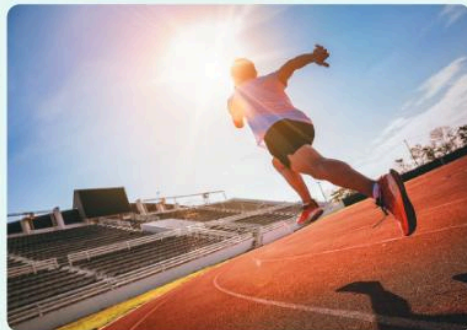
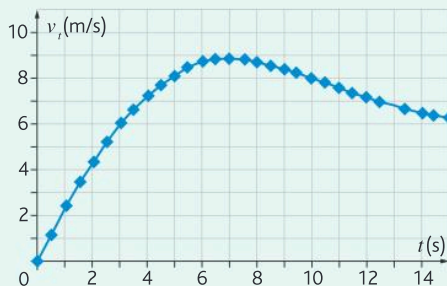
2 Dresser le tableau de signes et le tableau de variations de chaque fonction.

» Cours p. 80

Une vraie flèche aux 100 mètres

Objectif Calculer un taux de variation

Tom court un 100 mètres en cours d'EPS. On relève sa vitesse dans le graphique ci-dessous :



1 Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

- a. Quand la vitesse est-elle maximale ?
- b. Pendant combien de secondes, le coureur dépasse-t-il les 7m/s ?

2 On souhaite calculer l'accélération moyenne de Tom à divers moments entre le début de sa course et le moment où il atteint sa vitesse maximale.

» Cours p. 80

L'accélération moyenne a entre deux instants notés t_1 et t_2 se calcule grâce à la formule :

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

On dit que a est le « taux de variation » de la vitesse entre les deux instants t_1 et t_2 .

Calculer l'accélération moyenne entre les instants $t=1$ et $t=2$; entre $t=3$ et $t=5$.

À quoi sert une fonction ?

Définition

Une fonction f est un procédé qui associe à tout nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$.
On note également : $x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

EXEMPLE

On considère la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 4 et x .
Une expression littérale de f est donc : $f(x) = 4x$.

Définitions

Pour un nombre x appartenant à un intervalle donné, si $f(x) = y$, on dit que :

- y est l'**image** de x par la fonction f
- x est un **antécédent** de y par la fonction f

EXEMPLE

Écrire : $f(2) = 5$ signifie que :

- l'**image** de 2 par la fonction f est 5
- un **antécédent** de 5 par f est 2

Remarque

Un nombre possède une **unique image** par une fonction.
Cependant, une même image peut posséder **plusieurs antécédents**.

Modes de représentation d'une fonction

Définitions

- Une fonction peut être donnée par son **expression littérale**, un **algorithme**, un **graphique** ou un **tableau de valeurs**.
- Dans un repère du plan, la **représentation graphique** d'une fonction f est une **courbe**, notée \mathcal{C}_f , et constituée de tous les points de **coordonnées** $x; f(x)$. L'**équation** de cette courbe se note $y = f(x)$.

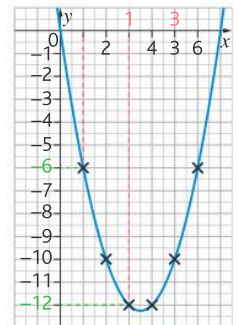
EXEMPLE

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 7x$.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	2	3	4
$f(x)$	-6	-10	-12	-12

- On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve **en abscisse les valeurs de x** et **en ordonnée les valeurs de $f(x)$** correspondantes. En reliant les points, on obtient une **courbe**.
- Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 7x$ peut se noter $y = x^2 - 7x$.



1 Rappel : modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction

EXO

- Pour gagner de l'argent de poche, Léo tond la pelouse d'amis. Il se fait payer 15 € de l'heure mais doit dépenser 3 € de tickets de bus pour faire l'aller-retour chez eux. Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction afin de savoir combien Léo peut gagner.

Méthode

- 1 Déterminer les données qui interviennent dans le calcul : que cherche-t-on et à quoi correspond x ?
- 2 Trouver la formule permettant d'exprimer ce que l'on cherche en fonction de x .



Réponse

- 1 x représente le temps que Léo passe à tondre la pelouse en heure. On cherche à savoir combien Léo va être payé en fonction du temps qu'il y passe.
- 2 Sachant qu'en 1h de travail, Léo est payé 15 €, mais qu'il dépense 3 € pour son trajet, on peut modéliser sa situation avec la fonction : $f(x) = 15x - 3$.

2 Calculer l'image et un ou des antécédents d'un nombre par une fonction

EXO

- Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 4$.
1. Calculer l'image de 6 par la fonction g .
 2. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction g .

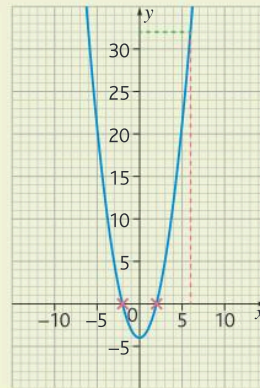
Méthode

- 1 Pour calculer une image, on remplace x par la valeur donnée dans l'expression de la fonction.
- 2 Chercher les antécédents de 0 signifie que 0 est une image et que nous devons résoudre l'équation $g(x) = 0$.



Réponse

- 1 $g(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow g(6) = 6^2 - 4$
 $\Leftrightarrow g(6) = 36 - 4 \Leftrightarrow g(6) = 32$
 L'image de 6 par la fonction g est 32.
- 2 On résout ainsi l'équation :
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$
 ou $x = -2$
 Les antécédents de 0 par g sont 2 et -2 .



On considère deux fonctions f et g de courbes représentatives respectives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

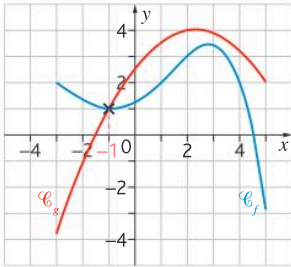
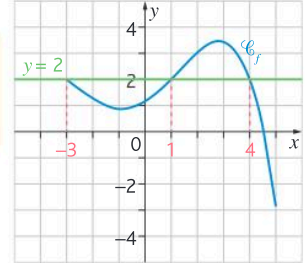
Résolution graphique d'équations $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

Savoir-faire

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à trouver toutes les abscisses éventuelles des points de la courbe \mathcal{C}_f ayant pour ordonnée le nombre réel k .

EXEMPLE

L'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions sur l'intervalle $[-3; 5]$: -3 , 1 et 4 .



Savoir-faire

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à trouver toutes les abscisses éventuelles des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

EXEMPLE

L'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution sur l'intervalle $[-3; 5]$: -1 .

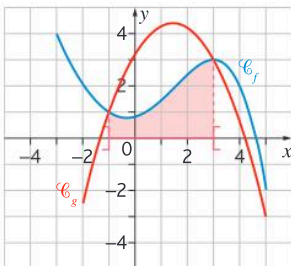
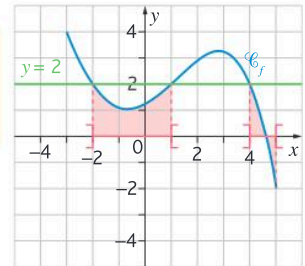
Résolution graphique d'inéquations $f(x) < k$ et $f(x) < g(x)$

Savoir-faire

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ revient à trouver toutes les abscisses éventuelles des points de la courbe \mathcal{C}_f ayant une ordonnée strictement inférieure au nombre réel k .

EXEMPLE

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ est : $] -2; 1[\cup] 4; 5[$



Savoir-faire

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ revient à trouver toutes les abscisses éventuelles des points de la courbe \mathcal{C}_f qui se situent strictement en dessous de la courbe \mathcal{C}_g .

EXEMPLE

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'intervalle $] -1; 3[$.

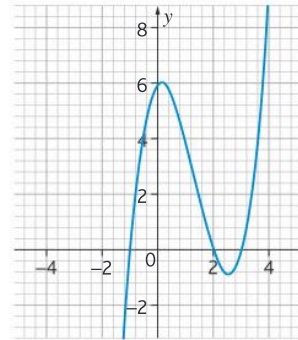
3 Résoudre graphiquement une équation de type $f(x) = k$

EXO

➤ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Résoudre, avec la précision permise par le graphique, les équations suivantes :

- $f(x) = 0$
- $f(x) = -2$



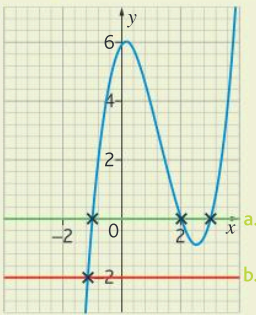
Méthode

- On trace les droites d'équation $y = 0$ et $y = -2$.
- On lit les **abscisses** des points d'intersection de ces droites avec la courbe de la fonction.



Réponse

1



- Il y a 3 solutions : -1 ; 2 et 3 .
 - Il y a 1 solution : environ $-1,2$.

➤ Exercices 32 à 35 p. 85-86

4

Résoudre graphiquement une inéquation de type $f(x) \geq k$

EXO

➤ En utilisant le graphique de l'exercice résolu précédent, résoudre $f(x) \geq 0$.

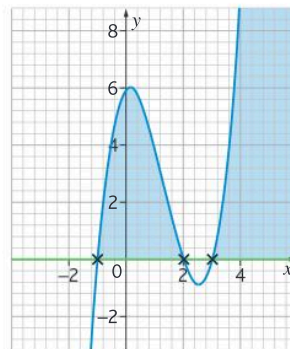
Méthode

- On trace la droite d'équation $y = 0$.
- On regarde l'intervalle pour lequel la courbe est située **au-dessus** de cette droite.



Réponse

- L'intervalle solution est $[-1; 2] \cup [3; +\infty[$



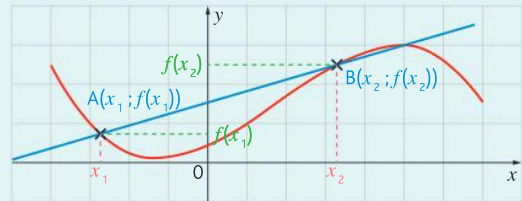
➤ Exercices 32 à 35 p. 85-86

Définition

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et deux nombres réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \neq x_2$.

On appelle **taux de variation** de f entre x_1 et x_2 le nombre : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Ce taux de variation correspond au **coefficient directeur** de la droite (aussi appelée « sécante ») passant par les points de coordonnées $x_1; f(x_1)$ et $x_2; f(x_2)$. Il permet de savoir **comment la fonction varie** entre 2 points du graphique.



Propriété

On considère une fonction f définie sur un intervalle I .

- Si, pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I , le taux de variation $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est **positif**, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si, pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I , le taux de variation $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est **négatif**, alors la fonction f est **décroissante** sur I .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - 6$.

a. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le sens de variation de la fonction sur $[0; +\infty[$.

» La fonction f semble croissante sur $[0; +\infty[$.

b. Vérifier que $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = x_2^2 - x_1^2$.

» $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = x_2^2 + x_2 \times x_1 - x_2 \times x_1 - x_1^2 = x_2^2 - x_1^2$.

c. Calculer le taux de variation entre x_1 et x_2 et en déduire le sens de variation de la fonction sur $[0; +\infty[$.

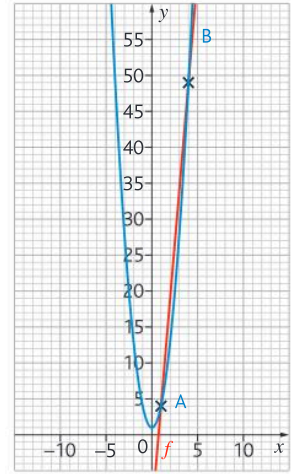
$$\begin{aligned} \gg \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{3x_2^2 - 6 - (3x_1^2 - 6)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3x_2^2 - 6 - 3x_1^2 + 6}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = 3(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

Comme x_1 et x_2 sont tous les deux supérieurs ou égaux à 0 alors $x_2 + x_1$ est forcément positif ou nul.

Le taux de variation étant positif pour deux réels distincts de l'intervalle $[0; +\infty[$, on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

5 Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 + 1$.
- Déterminer le taux de variation entre 1 et 4.
 - Interpréter géométriquement ce taux de variation.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction et en déduire le minimum.



Méthode

- On remplace les valeurs x_1 et x_2 par les valeurs souhaitées dans la formule du taux de variation pour le calculer.
- On interprète le résultat obtenu à l'étape précédente.
- On dresse le tableau de variations en observant les valeurs pour lesquelles la courbe « monte » ou « descend ».



Réponse

- Si $f(x) = 3x^2 + 1$, alors le taux de variation de f entre 1 et 4 est égal à :

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 \times 4^2 + 1 - (3 \times 1^2 + 1)}{3} = \frac{49 - 4}{3} = 15$$

- Le taux de variation de f entre 1 et 4 est égal à 15 donc la pente de la droite passant par les

points de la courbe de f d'abscisses 1 et 4 est égale à 15.

3

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 1$$

Le minimum de f est 1 atteint en 0.

» Exercice 50 p. 88

6 Étudier les variations d'une fonction à l'aide d'un taux de variation

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 7x - 4$.
Démontrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Méthode

- On calcule le taux de variation avec des inconnues x_1 et x_2 selon la formule.
- On interprète le résultat obtenu selon la propriété.



Réponse

- On considère deux nombres quelconques x_1 et x_2 appartenant à \mathbb{R} .

Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est égal à :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{7x_2 - 4 - (7x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = \frac{7x_2 - 7x_1}{x_2 - x_1} = \frac{7(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 7$$

- Or, $7 > 0$ donc $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ et donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

» Exercices 44 à 47 p. 87

Je retiens

1. Modélisation et représentation des fonctions

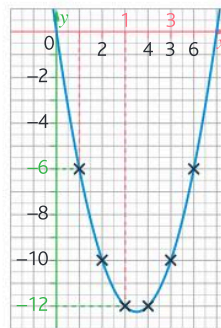
Dans de nombreux domaines (économie, physique, biologie, etc.) il existe une **relation de dépendance** entre des grandeurs. Cette relation de dépendance peut être modélisée à l'aide d'une **fonction**.

Expression littérale

Lorsque la relation entre les deux grandeurs s'exprime à l'aide d'une formule de calcul :

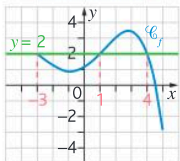
- on note $y = f(x)$ ou $x \mapsto f(x)$ ou $f : x \mapsto y$
- y est l'**image** de x par la fonction f
- x est un **antécédent** de y par la fonction f

Représentation graphique

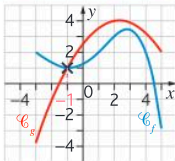


2. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

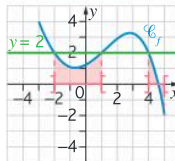
$$f(x) = k$$



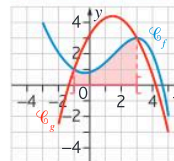
$$f(x) = g(x)$$



$$f(x) < k$$



$$f(x) < g(x)$$

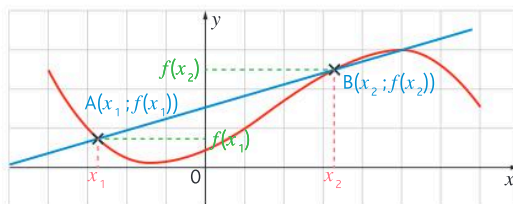


3. Taux de variation

Le **taux de variation** d'une fonction f entre deux réels x_1 et x_2 est le quotient :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

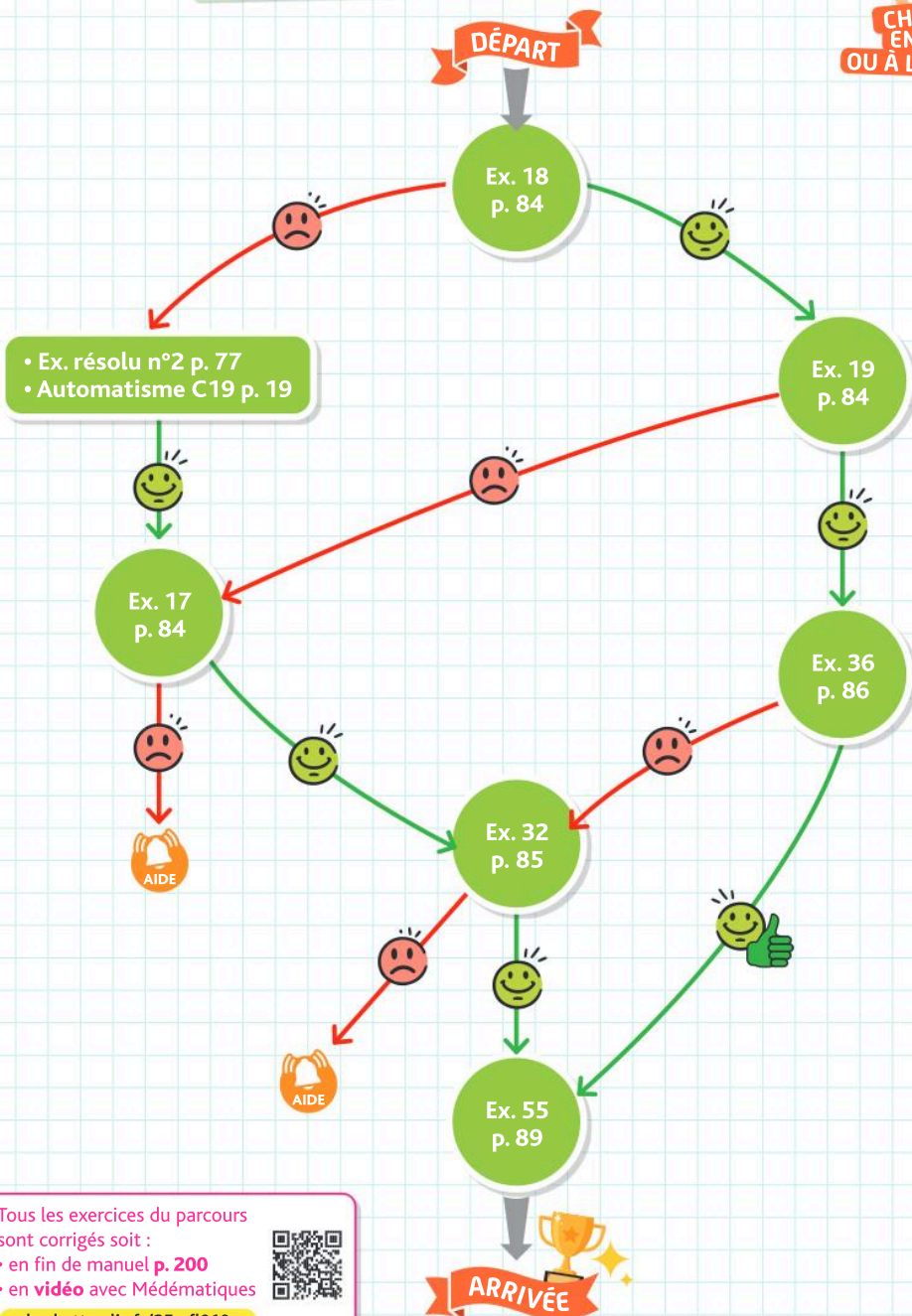
- Si, le taux de variation est **positif**, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si, le taux de variation est **négatif**, alors la fonction f est **décroissante** sur I .





Je me prépare à une évaluation

Je maîtrise les fonctions, leur représentation graphique
et le taux de variation



- Ex. résolu n°2 p. 77
- Automatisation C19 p. 19

Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl010



1 Modélisation et représentation des fonctions

Questions flash

Pour les exercices 1 à 8 on utilise la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 1$.

- 1 Quelle est l'image de 0 ?
- 2 Quelle est l'image de 2 ?
- 3 Calculer $f(-2)$.
- 4 Calculer $f(8)$.
- 5 Quel est l'antécédent de 6 ?
- 6 Quel est l'antécédent de 10 ?
- 7 Résoudre $f(x) = 0$.
- 8 Résoudre $f(x) = -8$.

► Pour calculer une image, on remplace x par sa valeur dans l'expression de $f(x)$.
 Pour calculer un antécédent, on résout une équation.

Résoudre les équations suivantes :

- a. $2x + 3 = 0$
- b. $4x - 1 = 7$
- c. $3x + 7 = -2$

Résoudre les équations suivantes :

- a. $4x - 1 = 7x + 8$
- b. $3x + 7 = -2x - 9$

► Si un produit de facteurs est nul, alors au moins l'un des facteurs est nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Résoudre les équations suivantes :

- a. $(2x + 3)(x - 3) = 0$
- b. $4x(x - 1) = 0$
- c. $4x^2 - 7x = 0$

Résoudre les équations suivantes :

- a. $x^2 = 4$
- b. $x^2 = 6$
- c. $4x^2 = 16$
- d. $x^2 = -5$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 7$.

- a. Calculer l'image de 3 par f .
- b. Calculer l'image de 4 par f .
- c. Calculer l'image de -2 par f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 7$.

- a. Calculer l'image de 1 par f .

b. Calculer l'image de 6 par f .

c. Calculer l'image de -2 par f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 3$.

- a. Calculer l'antécédent de 6 par f .
- b. Calculer l'antécédent de 1 par f .
- c. Calculer l'antécédent de -3 par f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 4$.

- a. Calculer l'antécédent de 9 par f .
- b. Calculer l'antécédent de 4 par f .
- c. Calculer l'antécédent de -2 par f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 5$.

- a. Calculer l'image de 6 par f .
- b. Calculer l'image de -2 par f .
- c. Calculer l'antécédent de 4 par f .
- d. Calculer l'antécédent de -9 par f .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

- a. Calculer l'image de 4 par f .
- b. Calculer l'image de -2 par f .
- c. Calculer le ou les antécédent(s) de 9 par f .
- d. Calculer le ou les antécédent(s) de -3 par f .

Une étudiante décide de lancer sa propre marque de bijoux. Elle peut fabriquer jusqu'à 50 bracelets par mois. Le coût de production, en euros, est donné par la fonction $C(x) = 0,01x^3 - 0,2x^2 + 38x + 150$ pour x bracelets fabriqués.

- a. Calculer $C(0)$, interpréter dans le contexte.
- b. Combien coûte la fabrication de 10 bracelets ?

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{3}{2}x - 7$.

Déterminer par le calcul, l'image de -2 et l'antécédent de 4 par g .

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 4$. Déterminer par le calcul, l'image de 3 et les antécédents de 6 par f .

On considère la fonction $f(t) = 45t^2 - t^3$ qui représente la concentration en microgrammes par millilitres d'un médicament dans le sang après t minutes.

- a. Calculer $f(0)$, pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
- b. Calculer $f(20)$, interpréter ce résultat.
- c. Quelle est la concentration du médicament au bout de 30 minutes ?



Une fonction $f(x)$ est représentée graphiquement par une courbe dont les points ont pour coordonnées $x; f(x)$.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan. Le point $M(-2; -1)$ appartient-il à \mathcal{C} ? Justifier par un calcul.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 7x - 4$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan. Le point $N(-1; -12)$ appartient-il à \mathcal{C} ? Justifier par un calcul.

En physique, lorsqu'on réalise un circuit avec deux résistances (R_A et R_B) en parallèles, la résistance équivalente est donnée par la formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$. On suppose ici R_A fixée à 3Ω (Ohms).

- Si $R_B = 8 \Omega$, calculer R .
- Exprimer R en fonction de R_B .
- On note $f(x) = \frac{3x}{3+x}$. Calculer $f(8)$ que constate-t-on?

Python Le nombre d'or, aussi appelé « proportion dorée » ou « divine proportion », est une proportion définie initialement en géométrie comme un rapport de longueurs. Il est souvent désigné par la lettre grecque ϕ . Ce nombre est l'unique solution positive de l'équation $\phi^2 = \phi + 1$.



Nous allons en chercher une valeur approchée selon un algorithme de balayage.

a. On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$ définie sur $[0; 3]$.

Recopier ce script écrit en Python :

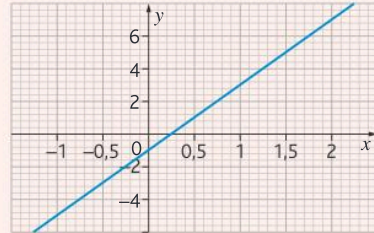
```
def f(x) :
    return x**2-x-1
def balayage(pas) :
    x=1
    k=0
    while f(x)<0 :
        x=x+pas
        k=k+1
    return (k, x-pas, x)
```

b. Tester ce script avec $\text{pas}=0,1$; puis $\text{pas}=0,01$; puis $\text{pas}=0,001$. Interpréter ces résultats.

2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Questions flash

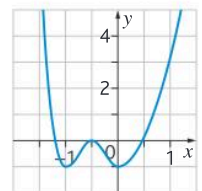
Pour les exercices 27 à 30 on utilise le graphique ci-dessous :



- Quelle est l'image de 0?
- Quelle est l'image de 2?
- Quel est l'antécédent de 6?
- Quel est l'antécédent de -3?

Graphiquement, l'image de a par f est l'ordonnée du point de la courbe représentative de f d'abscisse a . Graphiquement, le (ou les) antécédent(s) de b par f sont les abscisse(s) du (ou des) point(s) de la courbe représentative de f d'ordonnée b .

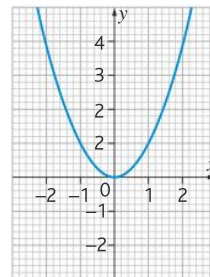
Soit f la fonction représentée par la courbe ci-contre. Donner, par lecture graphique :



- $f(1)$.
- L'image de 1 et l'image de 0,5.
- Les antécédents de 4 et de 2.

On considère la fonction f représentée ci-dessous :

Vidéo



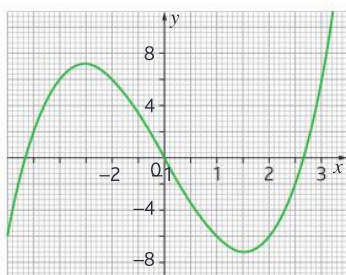
- Résoudre graphiquement les équations suivantes :
 - $f(x) = -1$
 - $f(x) = 2$
 - $f(x) = 0$
- Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
 - $f(x) \leq 0$
 - $f(x) \geq -2$
 - $f(x) < 1$

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl010



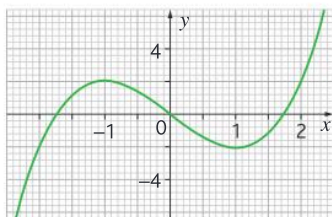
On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Pour chaque question, répondre en utilisant le graphique :

- Déterminer les antécédents de -2 .
- Résoudre les équations $f(x) = 8$ et $f(x) = -3$.
- Résoudre les inéquations $f(x) > 0$; $f(x) \leq 6$ et $f(x) \geq -8$.

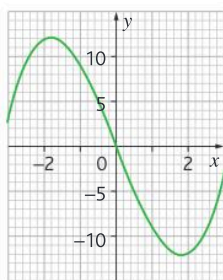
On considère la fonction f définie sur $[-2;2]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- $f(x) = 4$; $f(x) = 2$; $f(x) = 0$
- $f(x) < 4$; $f(x) \geq 0$; $f(x) < 2$

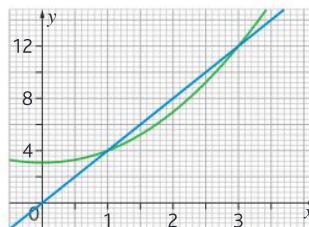
On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

- $f(x) = 10$; $f(x) = 5$; $f(x) = -5$
- $f(x) < -5$; $f(x) \geq 0$; $f(x) < 10$

Une entreprise fabrique et vend des coques de téléphone. Le coût de fabrication, en euros, est donné par la fonction $C(x) = x^2 + 3$ et la recette par $R(x) = 4x$ pour x dizaines de coques vendues. On donne les graphiques ci-dessous :

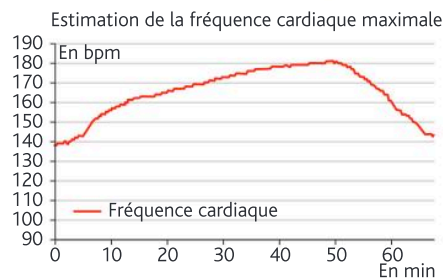


- Associer à chaque courbe la fonction correspondante.
- Graphiquement, déterminer le nombre de coques vendues pour que les deux fonctions soient égales.
- Sachant que le bénéfice est la différence entre la recette et le coût, déterminer le nombre de coques à vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

Calculatrice On considère la fonction g définie sur $I = [-2; 2]$ par $g(x) = x^2$ et la fonction h définie sur I par $h(x) = -x + 1$.

- Représenter ces deux fonctions sur votre calculatrice.
- Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ puis en déduire celles de l'équation $g(x) - h(x) = 0$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < h(x)$ puis en déduire le signe de $g(x) - h(x)$ sur I .
- En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + x - 1 < 0$.

Arthur, âgé de 40 ans, s'entraîne pour le marathon de Paris. Il mesure sa fréquence cardiaque tout au long de l'entraînement et obtient le graphique suivant :



- Déterminer, en bpm (battements par minute), la fréquence cardiaque maximale d'Arthur. On la notera FCM.

b. On considère que, pour un homme d'âge mûr, la FCM correspond à $220 - \text{son âge}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente ?

c. En vous servant du résultat de la question b et du tableau ci-dessous, déterminer l'intervalle de temps pendant lequel Arthur est en zone 3, puis en zone 4.

Zones	FCM (en %)
Z1 : échauffement	60 à 65 %
Z2 : zone de confort	65 à 75 %
Z3 : endurance active	75 à 85 %
Z4 : seuil anaérobie	85 à 95 %
Z5 : zone rouge	> 95 %

Une entreprise imaginaire fixe à chacun de ses employés le mode de rémunération mensuel suivant : un salaire mensuel net fixe de 1 400 € accompagné d'une prime ou d'une pénalité.



Si x est le chiffre d'affaires en milliers d'euros réalisé par un employé dans le mois, sa prime ou pénalité exprimée en milliers d'euros est de $f(x) = 0,01(x^2 - 3x)$. Par exemple, si un employé réalise un chiffre d'affaires mensuel de 1 000 €, alors $x = 1$ et

$f(x) = f(1) = -0,02$. Dans ce cas, l'employé est pénalisé de 0,02 millier d'euros, c'est-à-dire 20 €. Son salaire net mensuel est alors de $1\,400 - 20 = 1\,380$ €.

De même, si un employé réalise un chiffre d'affaires mensuel de 10 000 €, alors $x = 10$ et $f(x) = f(10) = 0,7$. Dans ce cas, l'employé perçoit une prime de 0,7 millier d'euros, c'est-à-dire 700 €. Son salaire net mensuel est alors de $1\,400 + 700 = 2\,100$ €.

1. a. Si l'employé réalise un chiffre d'affaires mensuel de 1 500 €, aura-t-il une prime ou une pénalité ? De quel montant ? Quel sera alors son salaire net mensuel ?

b. Mêmes questions avec un chiffre d'affaires mensuel de 20 000 €.

2. La courbe \mathcal{C}_f ci-dessous représente la fonction f dans un repère du plan :



a. Montrer que $f(x) = 0,01x(x - 3)$.

b. Donner les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

c. À partir du graphique, estimer le chiffre d'affaires mensuel à réaliser afin d'obtenir un salaire net mensuel de 1 480 €.

3 Calcul et interprétation du taux de variation

Questions flash

Dans les exercices 40 à 43, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 5$.

40 Calculer $f(3 + h)$.

41 Calculer $f(2) - f(h)$.

42 Calculer $\frac{f(4)}{h}$.

43 Calculer $f(-4 + h)$.

On appelle taux de variation de f entre x_1 et x_2 le nombre $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

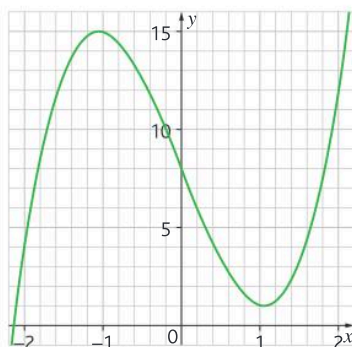
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3$. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 7.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 + 3$. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 6.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 - 1$. Calculer le taux de variation de f entre -1 et 0.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + \frac{1}{3}$. Calculer le taux de variation de f entre -2 et -1.

On considère la fonction f définie sur $[-2; 2]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl010



Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses. Justifier.

- L'équation $f(x) = 10$ admet 2 solutions.
- f est positive sur $[-2; 2]$.
- Le taux de variation de f entre -1 et 1 est positif.
- Le taux de variation de f entre 1 et 2 est positif.

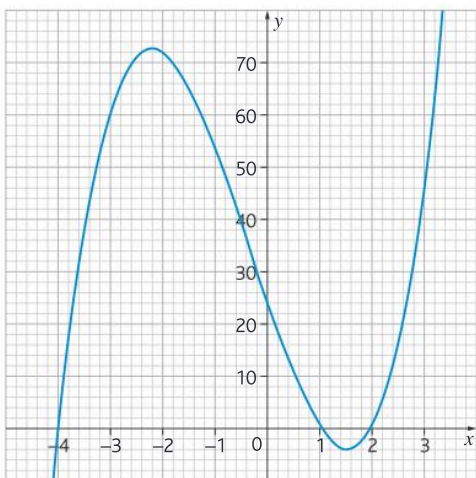
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction u qui est définie sur l'intervalle $[-7; 8]$:

x	-7	-4	3	4	8
$u(x)$	4	8	0	-8	-6

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse :

- u est croissante sur :
 - $[-7; 8]$
 - $[2; 8]$
 - $[-6; -4, 5]$
- u est négative sur :
 - $[-7; -4]$
 - $[-4; 5]$
 - $[5; 8]$
- Le taux de variation de u entre 0 et 1 est :
 - Positif
 - Négatif
- Le taux de variation de u entre -7 et -4 est :
 - Positif
 - Négatif
 - Constant

Soit f la fonction définie sur $I = [-4; 3]$ par le graphique ci-dessous :

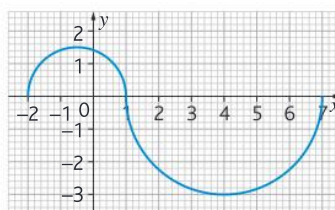


Répondre aux questions suivantes en s'aidant du graphique :

- Résoudre $f(x) = 0$.
- Dresser le tableau de signes de f sur I .
- Dresser le tableau de variations de f sur I .

Si toutes les valeurs de $f(x)$ sont supérieures à la valeur $f(a)$ alors $f(a)$ est le **minimum** de la fonction. Si toutes les valeurs de $f(x)$ sont inférieures à la valeur $f(b)$, alors $f(b)$ est le **maximum** de la fonction.

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 7]$ dont on donne la courbe représentative sur la figure ci-dessous :



- Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-2; 7]$.
- Quels sont :
 - Le minimum de f sur $[-2; 7]$.
 - Le maximum de f sur $[-2; 2]$.

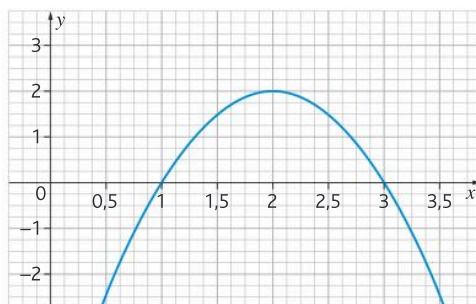
Soit f la fonction définie sur $I = [-5; 6]$ par $f(x) = 2(x - 5)(x + 4)(x - 1)$.

a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-5	-4	-2	0	1	2	3	5	6
$f(x)$									

- Dans un repère, tracer la représentation graphique de f sur I .
- En déduire le tableau de signes de f sur I .
- En déduire le tableau de variations de f sur I .

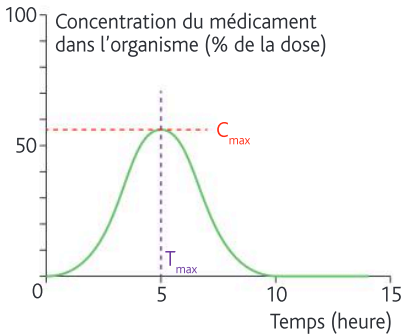
On considère la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



- Graphiquement déterminer les valeurs de : $f(1)$; $f(1,5)$; $f(2)$; $f(2,5)$; $f(3)$.
- Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$ et $f(x) = 2$.
- Déterminer le tableau de signes de f sur $I = [0, 5; 3, 5]$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 1$ sur I .

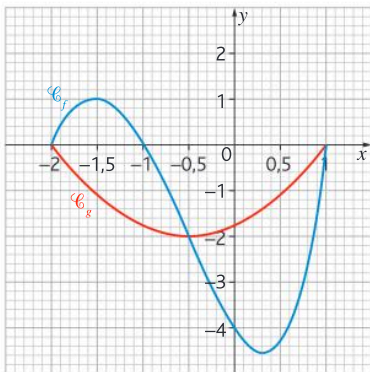
- e. Donner le tableau de variations de f sur I .
 f. Pour quelle valeur de l , f admet-elle un maximum ?

Madame Dubois a mal à la tête et prend un médicament à 10 h. On observe, grâce à la représentation graphique ci-dessous, la concentration du médicament dans son organisme en fonction du temps écoulé.



- a. À quelle heure le médicament aura-t-il quitté l'organisme de Madame Dubois ?
 b. Pendant combien de temps le médicament sera-t-il efficace ?
 c. À quelle heure le médicament sera-t-il au maximum de son efficacité dans l'organisme ?
 d. Dresser le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0;15]$.
 e. À partir du graphique, peut-on estimer le signe du taux de variation de cette fonction entre 2 h et 4 h ? Justifier votre réponse.

Corrigé



Soient \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-2; 1]$ dans le plan rapporté à un repère.

1. Représenter le tableau de variations de la fonction f .
 2. Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

3. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

- a. $f(x) < 0$ b. $g(x) \geq 0$
 c. $f(x) < g(x)$ d. $f(x) \leq g(x)$

4. Sans les calculer, donner le signe :
 – du taux de variation de g entre $-1,5$ et -1 .
 – du taux de variation de f entre $0,5$ et 1 .

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-12; 20]$:

x	-12	-5	7	20
Variations de $f(x)$	↘ -4		↘ -6	

Choisir la bonne réponse pour chaque question :

1. On peut dire que :
 a. f est positive sur l'intervalle $[-12; -5]$.
 b. f est positive sur l'intervalle $[7; 20]$.
 c. f est négative sur l'intervalle $[-5; 20]$.
 2. L'équation $f(x) = 2$ possède :
 a. Une unique solution.
 b. Aucune solution.
 c. On ne peut pas répondre.
 3. On cherche à comparer $f(-10)$ et $f(-5)$:
 a. $f(-10) < f(-5)$.
 b. $f(-10) > f(-5)$.
 c. On ne peut pas répondre.
 4. On cherche à comparer $f(-3)$ et $f(4)$:
 a. $f(-3) < f(4)$.
 b. $f(-3) > f(4)$.
 c. On ne peut pas répondre.
 5. On cherche à comparer $f(0)$ et $f(8)$:
 a. $f(0) < f(8)$.
 b. $f(0) > f(8)$.
 c. On ne peut pas répondre.

Vidéo

Calculatrice En 2024, une entreprise compte produire au plus 60 000 téléphones portables pour la France et les vendre 800 € l'unité. On suppose que tous les téléphones produits sont vendus.

Le coût de production, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur $[0; 60\,000]$ par :

$$C(x) = 0,01x^2 + 250x + 2\,000\,000$$

où x représente le nombre de téléphones fabriqués et vendus.

- a. Calculer $C(6\,000)$. Interpréter le résultat obtenu.
 b. Calculer le montant de la recette, en euros, que rapporte la vente de 6 000 téléphones. En déduire le montant du bénéfice, en euros, pour 6 000 téléphones vendus.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl010



c. Montrer que, pour tout $x \in [0; 60\ 000]$, le bénéfice, en euros, est défini par :

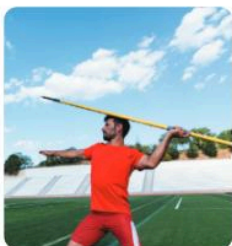
$$B(x) = -0,01x^2 + 550x - 2\ 000\ 000$$

où x représente le nombre de téléphones fabriqués et vendus.

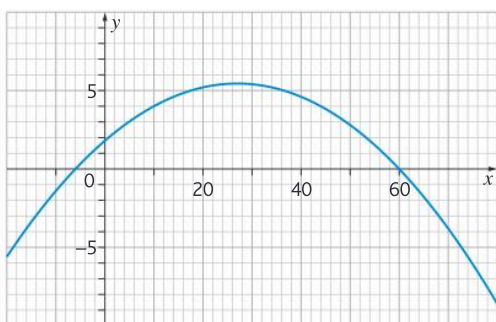
d. À l'aide de la calculatrice, donner les variations de la fonction B sur $[0; 60\ 000]$.

e. En déduire le nombre de téléphones que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice maximal. Donner la valeur ce bénéfice en euros.

Un athlète s'entraîne au lancer de javelot. Au moment du lancer, le lanceur tient le javelot de telle manière que la pointe se trouve à la hauteur du sommet de son crâne. Pendant sa course, on considère que les frottements qui s'exercent sur la pointe du javelot sont négligeables, et que le javelot n'est soumis qu'à son poids. La trajectoire de la pointe du javelot est donc modélisée par une parabole.



Lors du premier essai de l'athlète, la trajectoire de la pointe du javelot est donnée par la fonction f telle que : $f(x) = -0,005x^2 + 0,27x + 1,8$, où x est la distance au sol en mètres parcourue par la pointe du javelot et $f(x)$ l'altitude, en mètres, de la pointe du javelot quand celle-ci se trouve à une distance au sol de x mètres du lanceur. On donne ci-dessous la représentation graphique de f .

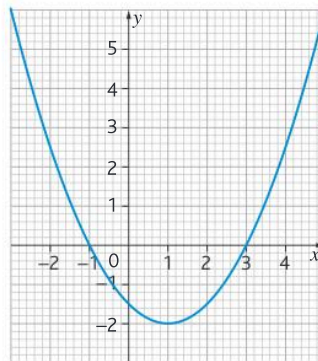


- Calculer $f(0)$ et vérifier la cohérence à l'aide du graphique. Quelle est la taille de l'athlète ?
- Vérifier que : $f(x) = -0,005(x + 6)(x - 60)$.
- Quelle est la distance au sol totale parcourue par le javelot (par le calcul puis par lecture graphique) ?
- D'après le graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0; 60]$, la hauteur maximale atteinte par le javelot dépasse-t-elle 10 m ? Justifier.

Python Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 0,5(x + 1)(x - 3)$.

a. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction g .



b. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 2$.

c. On appelle x_1 la solution de l'équation $g(x) = 2$ appartenant à l'intervalle $[-2; -1]$ et x_2 la solution appartenant à l'intervalle $[3; 4]$. On cherche à déterminer un encadrement (balayage) de x_2 d'amplitude 10^{-n} .

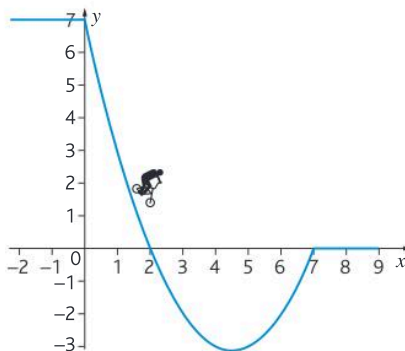
Pour cela on a écrit l'algorithme ci-contre en langage Python :

```
def g(x):
    return 0.5*(x+1)*(x-3)

def balayage(n):
    x=3
    pas=10**(-n)
    while g(x)<2:
        x=x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que faut-il taper dans la console pour obtenir un encadrement de x_2 d'amplitude 0,001 ? Que retourne alors le script ?

Un rider se lance sur une rampe de BMX. On assimile le rider à un point et on note $x; h(x)$ les coordonnées du rider sur la rampe dans le repère ci-dessous :



La fonction h est définie sur l'intervalle $[0; 7]$ par $h(x) = 0,5x^2 - 4,5x + 7$, où x et $h(x)$ sont exprimés en mètres.

1. Graphiquement, à quelle hauteur le rider se lance-t-il sur la rampe ? Vérifier par le calcul.

2. a. Sans justification, par lecture graphique, donner la valeur de $h(2)$.

b. Calculer $h(7)$.

c. Montrer que : $h(x) = 0,5(x - 2)(x - 7)$ et dresser le tableau de signes de la fonction sur l'intervalle $[0; 7]$.

3. En déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le rider est en dessous de son point d'arrivée.

Calculatrice Une entreprise produit des tablettes numériques. Une étude de marché permet d'estimer les ventes pour le mois à venir : entre 1500 et 3000 tablettes.

On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise, exprimé en euros, par la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 85x - 350$ où x est le nombre de tablettes exprimé en centaines.

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de la fonction f entre 15 et 30.

b. Calculer le taux de variation entre 21,25 et 30. Votre résultat est-il cohérent avec la question précédente ?

c. Pour combien de tablettes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Quel sera alors ce bénéfice ?

Une agence de publicité charge un influenceur de faire une publicité pour un produit. L'étude des données prouve que la fréquence $f(t)$ d'abonnés connaissant le produit après t semaines de publicités est donnée par $f(t) = \frac{t}{t+3}$ avec t réel positif.

a. Montrer que 50 % des abonnés connaissent le produit au bout de 3 semaines de publicité.

b. Calculer $f(0)$ et donner une interprétation de ce résultat.

c. Montrer que le taux de variation entre a et b est donné par $\frac{3}{(b+3)(a+3)}$.

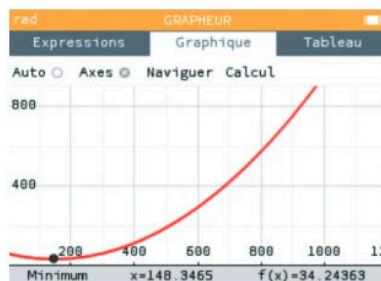
d. En déduire le signe de ce taux de variation puis le sens de variation de la fonction et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Calculatrice Un site de jeux vidéo sur internet constate que la durée de chargement des jeux vidéo dépend du nombre de joueurs connectés en même temps. Le tableau ci-dessous représente les valeurs recueillies par le site :



Nombre de joueurs connectés	50	105	240	300	400	510	605	800
Durée de chargement du jeu (en centièmes de secondes)	30	40	60	80	120	190	271	590

a. À l'aide de la calculatrice, on obtient le nuage de points correspondant à ces données et on approche ce nuage par la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 0,00127x^2 - 0,3768x + 62,1921$



b. Calculer $f(510)$ et comparer aux résultats du tableau, est-ce cohérent ?

c. Calculer le taux de variation entre 400 et 600. Est-ce cohérent avec le graphique ?

d. Graphiquement déterminer pour combien de joueurs connectés simultanément la durée de chargement des jeux est minimale ? Est-ce que ce choix de modèle est pertinent ?

Tous les ans, un groupe de lycéens se réunit en haut d'un pont pour réaliser des plongeurs et rejoindre l'autre côté de la rive. On étudie le plongeur du vainqueur de ce concours. On appelle x la distance horizontale séparant le vainqueur du bas du pont et $h(x)$ la hauteur du vainqueur par rapport au niveau de la rivière (x et $h(x)$ sont exprimés en mètres). On donne $h(x) = x^2 - 9x + 5$.

a. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(x)$									

b. Dans un repère, représenter, en vous aidant du tableau ci-dessus, la fonction h .

c. À quelle hauteur le vainqueur commence-t-il son plongeon ?

d. Graphiquement résoudre $h(x) < 0$. Interpréter dans le cadre de l'exercice.

e. Graphiquement, déterminer le minimum de cette fonction. En quelle valeur est-il atteint ?

f. Graphiquement, déterminer combien de mètres le vainqueur doit parcourir sous l'eau.

g. Calculer le taux de variation entre 2 et 4. Le résultat est-il cohérent avec le graphique ?

Une fonction pour calculer son métabolisme **ST2S**

» **Modéliser • Représenter • Calculer**

Le métabolisme basal d'un organisme correspond aux besoins énergétiques indispensables pour la survie de l'organisme, il dépend du poids, de la taille, de l'âge et du sexe de la personne

Il est donné par la formule ci-dessous pour une femme :
 Métabolisme = $10 \times \text{poids} + 6,25 \times \text{taille} - 5 \times \text{âge} - 161$
 Le poids est exprimé en kg, la taille en cm, l'âge en années et le métabolisme en kcal (kilocalories).

- Déterminer l'expression de la fonction $f(x)$ représentant le métabolisme d'une femme mesurant 1,65 m et pesant 50 kg en fonction de son âge appelé x .
- Compléter le tableau de valeurs ci-dessous (en arrondissant à l'unité) :

Âge en années (x)	20	25	30	35	40	45
Métabolisme en kcal ($f(x)$)						

- Construire dans un repère la représentation graphique de f à partir du tableau de valeurs.
- À partir de la question **a**, calculer le taux de variation de la fonction f entre 20 et 25 ; est-ce cohérent avec le graphique de la question précédente ?
- À quel âge le métabolisme est-il de 1250 kcal ?

1 trait danger, 2 traits sécurité ?

Calculatrice

» **Modéliser • Représenter • Calculer**

La prévention routière prévoit une campagne d'information à la suite de l'augmentation du nombre de décès sur les routes. Le but est de rappeler l'importance des distances de sécurité. La distance de sécurité dépend de la vitesse à laquelle on conduit. On l'exprime à l'aide de la fonction $f(v) = 0,003v^2 + 0,2v + 8$ où v est en km/h et f en mètres.



- Calculer $f(50)$ et interpréter ce résultat.
- Quelle est la distance de sécurité si la vitesse du véhicule est de 110 km/h ?
- Représenter graphiquement cette fonction sur $[0; 130]$.
- Graphiquement, déterminer la vitesse à ne pas dépasser si on suit une voiture à 70 mètres.

e. Sachant que sur l'autoroute un trait correspond à 38 m et qu'entre deux traits la distance est de 14 m, la phrase de sensibilisation « 1 trait danger, 2 traits sécurité » est-elle pertinente pour une voiture roulant à 130 km/h ?

Préparer l'épidémie de grippe

ST2S STL Calculatrice

» **Modéliser • Représenter • Calculer**

Partie 1 : étude d'une fonction

On considère la fonction définie sur $I = [-3; 7]$ par $h(t) = -(t+2)^2(t-7)$.

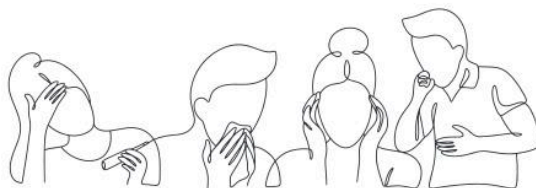
- Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère.
- Déterminer, par le calcul, les solutions de $h(t) = 0$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer si la fonction admet un maximum sur I ; un minimum sur I .
- Dresser le tableau de variations de la fonction sur I .

Partie 2 : application

Une épidémie de grippe s'est déclarée dans une ville. Les services municipaux relèvent son évolution en fonction du temps et présentent leurs résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombre de jours écoulés depuis le début de l'épidémie	0	1	3	4	6
Nombre de cas de grippe	27	51	99	109	63

- Placer les points sur la figure tracée dans la partie 1.
- Pourquoi peut-on modéliser la situation avec la fonction de la partie 1 ?
- En utilisant la fonction de la partie 1 comme modélisation, déterminer par lecture graphique :
 - le nombre de personnes atteintes de la grippe au bout de 7 jours ;
 - la période durant laquelle le nombre de cas de grippe est supérieur à 90 ;
 - au bout de combien de jours il n'y aura plus de malades atteints de la grippe.



Un algo pour optimiser ses impôts **STMG** Python

» Raisonner • Modéliser

Tous les ans les Français déclarent leurs revenus pour calculer l'impôt sur le revenu. Pour ce calcul, on a besoin de connaître le revenu brut imposable : plus celui-ci est élevé, plus l'impôt sur le revenu est élevé. Il existe deux manières de calculer le revenu brut imposable :

- l'**abattement de 10 %** : il faut retirer 10 % à son revenu total ;
- ou le **principe des frais réels** : il faut retirer les frais de repas, de transport, etc. au revenu total.

Vous souhaitez écrire un programme Python afin de choisir laquelle de ces deux méthodes est la plus avantageuse en fonction de vos revenus.

a. Compléter le script suivant qui permet les deux types de calcul (on considère que « `revenu_total` » correspond au revenu total initial et « `frais` » au montant des frais réels) :

```
def brut_si_abattement(revenu_total) :
    return(revenu_total *... )
def brut_si_frais_reels(revenu_total, frais) :
    return(revenu_total-...)
```

b. Tester ce script pour un revenu total initial de 22 000 euros et des frais réels de 4 500 euros, et indiquer quel calcul est le plus avantageux.

c. On désire maintenant compléter le script afin que l'on sache directement quelle méthode de calcul utiliser. Compléter la suite du script :

```
def methode(revenu_total, frais) :
    if brut_si_abattement (revenu_total)< ... :
        return (« mieux vaut calculer avec ... »)
    else :
        return (« mieux vaut calculer avec ... »)
```

d. Tester ces scripts avec un revenu total initial de 22 000 euros et des frais réels de 4 500 euros, et vérifier votre réponse de la question b.

Des sneakers de luxe **STMG** Tableur

» Modéliser • Calculer

Une entreprise fabrique des sneakers de luxe. Pour des raisons matérielles, l'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 20 sneakers par mois. On suppose que l'entreprise parvient à vendre toute sa production chaque mois. Pour x sneakers fabriquées et vendues, la recette r totale et le coût c de production sont donnés, en centaine d'euros, par les fonctions r et c définies sur $[0; 20]$.

a. Sachant qu'une paire de sneakers est vendue 800 euros, déterminer $r(x)$.

b. On donne $c(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$.

On souhaite construire sur un tableur la feuille de calcul ci-contre. Créer la colonne A, avec les quantités de 0 à 20.

c. Quelles sont les formules qui, entrées en B2 et C2, peuvent être recopiées vers le bas ? Compléter les colonnes B et C en calculant les recettes et le coût pour chaque quantité.

d. Entrer en cellule D2 la formule $=C2/A2$. Expliquer l'affichage du tableur dans cette cellule.

e. Recopier la formule entrée en D2 vers le bas en colonne D. Que signifie l'expression « coût unitaire » ?

f. Montrer que la fonction B , donnant le bénéfice en centaines d'euros selon la quantité x de sneakers

	A	B	C	D	E
1	Quantité	Recette	Coût	Coût unitaire	Bénéfice
2	0	0	8,16	#DIV/0!	-8,16
3	1	8	9,26	9,26	-1,26
4	2	16	11,36	5,68	4,64
5	3	24	14,46	4,82	9,54
6	4	32	18,56	4,64	13,44
7	5	40	23,66	4,73	16,34
8	6	48	29,76	4,96	18,24
9	7	56	36,86	5,27	19,14
10	8	64	44,96	5,62	19,04
11	9	72	54,06	6,01	17,94
12	10	80	64,16	6,42	15,84
13	11	88	75,26	6,84	12,74
14	12	96	87,36	7,28	8,64
15	13	104	100,46	7,73	3,54
16	14	112	114,56	8,18	-2,56
17	15	120	129,66	8,64	-9,66
18	16	128	145,76	9,11	-17,76
19	17	136	162,86	9,58	-26,86
20	18	144	180,96	10,05	-36,96
21	19	152	200,06	10,53	-48,06
22	20	160	220,16	11,01	-60,16

fabriquées et vendues, est définie sur $[0; 20]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$.

g. Représenter la fonction B sur le tableur. D'après ce graphique, pour quelle valeur de x l'entreprise réalisera-t-elle le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

h. Vérifier la réponse à la question précédente à l'aide de la feuille de calcul.

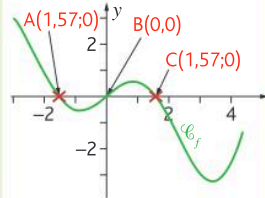
i. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « pour que le bénéfice soit maximal, il suffit que le coût unitaire soit le plus bas possible » ?

Pour entrer dans le chapitre

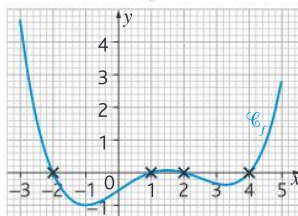
Résoudre graphiquement une équation

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , dont la représentation graphique est donnée dans un repère. Les points d'**intersection** de la **courbe représentative** de f et de l'**axe des abscisses** ont des coordonnées de la forme $(\alpha; 0)$ où α est une solution de l'**équation** $f(x) = 0$.

Points d'intersection avec l'axe des abscisses



1 Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée dans un repère. Avec la précision permise par le graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f et de l'axe des abscisses, puis en déduire les solutions sur $[-3; 5]$ de l'équation $f(x) = 0$.



Déterminer le signe d'une fonction affine

Signe de $mx + p$ où m et p sont des réels avec $m \neq 0$

$m > 0$		$m < 0$	
x	$-\infty \quad -\frac{p}{m} \quad +\infty$	x	$-\infty \quad -\frac{p}{m} \quad +\infty$
Signe de $mx + p$	$- \quad 0 \quad +$	Signe de $mx + p$	$+ \quad 0 \quad -$

2 f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f_1(x) = x - 4$, $f_2(x) = -2x + 3$ et $f_3(x) = x + 0,5$.

- Dresser le tableau de signes de $f_1(x)$, $f_2(x)$ puis $f_3(x)$.
- En déduire le tableau de signes de $-3f_1(x)$.
- En déduire le tableau de signes de $\frac{2}{3}f_3(x)$.

Étudier le signe d'un produit de fonctions affines

Étudier le signe d'un **produit de deux fonctions** revient à construire un tableau conjoint dans lequel intervient le signe des deux fonctions. Le signe de leur produit est déterminé en utilisant la **règle des signes**.

3 g_1 et g_2 sont des fonctions affines définies sur \mathbb{R} par $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$ et $g_2(x) = x + 3$.

- Dresser le tableau de signes de $g_1(x) \times g_2(x)$.
- En déduire le signe de $\frac{3}{7} \times g_1(x) \times g_2(x)$.
- En déduire le signe de $-5 \times g_1(x) \times g_2(x)$.

4

Fonctions polynômes de degré 2 et 3



Automatismes du chapitre

- C15** Déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré 17
- D20** Déterminer graphiquement le signe d'une fonction ou son tableau de variation..... 19



Focus métiers

Sécurité Économie
Informatique IA Astronomie
Santé Ingénierie
Environnement

Les fonctions polynômes de degré 2 et 3 permettent de modéliser des trajectoires, d'optimiser des processus industriels et de prévoir des évolutions en économie ou en ingénierie.



📁 Découvrir le métier de chef de projet IA

hachette-clic.fr/25mf1011

Activités de découverte

ACTIVITÉ 1

Vers le haut ou vers le bas ?

Logiciel de géométrie

Objectif Déterminer l'orientation d'une parabole

1 À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique des fonctions f_1 et f_2 définies sur \mathbb{R} par $f_1(x) = 2x^2 + x - 1$ et $f_2(x) = -3x^2 - 2x + 5$.

Les représentations graphiques des deux fonctions sont des paraboles, celle de f_1 est dite « orientée vers le haut », celle de f_2 est dite « orientée vers le bas ».

2 Créer trois curseurs, a , b et c prenant leurs valeurs dans $[-5; 5]$ avec un pas (incrément) de 1.

» Cours p. 98

Créer la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - b)(x - c)$.

a. Faire varier le curseur a . A-t-il une influence sur l'orientation de la parabole ?

b. Même question en faisant varier le curseur b puis le curseur c .

3 Quelle propriété pouvez-vous conjecturer, liant les différentes valeurs de a , b ou c avec l'orientation de la parabole ?

ACTIVITÉ 2

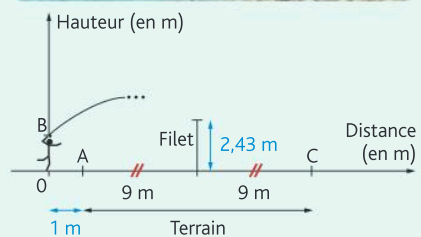
Un smash pour la médaille

Calculatrice

Objectif Factoriser un polynôme de degré 2

Un joueur de volley-ball fait un service smashé. La situation a été modélisée dans le repère d'origine O , ci-dessous.

Le terrain est représenté par le segment $[AC]$ qui fait 18 m. Le filet est, pour les hommes, à une hauteur de 2,43 m. Pour effectuer un service smashé, le joueur se place après la limite du terrain, lance très haut le ballon, effectue une course d'élan puis saute pour le frapper avant d'entrer sur le terrain. Dans la modélisation choisie, le joueur frappe le ballon à une hauteur représentée par le segment $[OB]$, à 1 m derrière la ligne de délimitation du terrain. La fonction f modélise la hauteur $f(x)$, en mètres, du ballon avant qu'il ne retombe au sol en fonction de son abscisse x , en mètres. $f(x) = -0,04x^2 + 0,31x + 3,5$. Le service est valable si le ballon passe au-dessus du filet et retombe dans la partie adverse du terrain.



1 Calculer la hauteur OB du ballon au départ de sa trajectoire.

2 Calculer $f(10)$. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de la situation.

3 Tracer la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

» Cours p. 100

a. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ et interpréter le résultat positif dans le cadre de la situation.

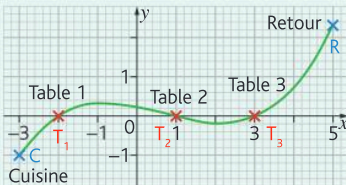
b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient : $f(x) = -0,04(x + 6,25)(x - 14)$. Résoudre $f(x) = 0$.

4 Peut-on conjecturer la forme factorisée de f à l'aide d'une simple lecture graphique ?

À table : les polynômes sur des rails

Objectif Déterminer la forme factorisée d'un polynôme de degré 3

Le restaurant Triple Loops est un restaurant dans lequel les plats arrivent à table via un système complexe de rails. Le rail est modélisé sur le graphique ci-dessous où l'axe des abscisses représente la distance entre les tables (avec les tables 1, 2 et 3 représentées par les points T_1, T_2 et T_3) et l'axe des ordonnées représente la hauteur du rail. Les longueurs sont toutes exprimées en mètres.



Les plats partent de la cuisine représentée par le point C. Les clients, une fois qu'ils ont fini de manger, les remettent sur les rails pour que les assiettes soient lavées au point de retour modélisé par la lettre R.

- 1 Avec la précision permise par le graphique, déterminer les coordonnées des trois tables. En déduire les valeurs de x_1, x_2 et x_3 tels que l'expression de la fonction f modélisant le rail soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
- 2 Avec la précision permise par le graphique, lire les coordonnées de C. En déduire la valeur de a .

» Cours p. 104

Rappel Un point $(x; y)$ appartient à la courbe représentative d'une fonction f si ses coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$.

- 3 Pour que les assiettes arrivent dans de bonnes conditions, il est nécessaire que le point de sortie soit à moins de 2,5 m de hauteur. La modélisation proposée respecte-t-elle cette contrainte sachant que le point de sortie est à 7 m de la première table ?

Le bénéfice des jeux vidéo

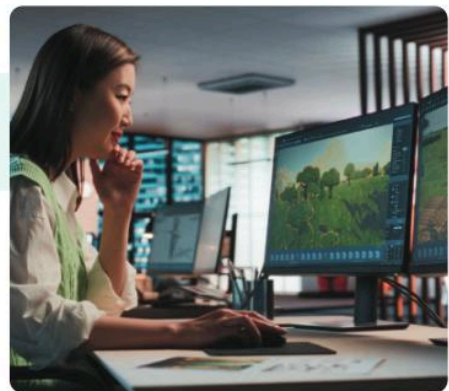
Objectif Étudier le signe d'une fonction polynôme de degré 3

Le bénéfice (en centaines d'euros) réalisé par une entreprise pour la production et la vente de x milliers de jeux vidéo est donné par : $B(x) = -0,01x^3 + 0,845x^2 + 5,055x - 9,45$.

- 1 La résolution de l'équation $B(x) = 0$ à l'aide de la calculatrice donne trois solutions, $x_1 = -7, x_2 = 1,5$ et $x_3 = 90$. En déduire une forme factorisée de $B(x)$.
- 2 Recopier et compléter le tableau de signes suivant :

x	
Signe de $-0,01(x - 7)(x - 1,5)$	
Signe de $(x - 90)$	
Signe de $B(x)$	

» Cours p. 104



Rappel Voir automatisme C15 p. 17 pour le signe d'un polynôme de degré 2.

- 3 En déduire la quantité de jeux vidéo que doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice.

Définition

Les fonctions polynômes de degré 2 sont définies sur \mathbb{R} par les écritures suivantes (où a est un réel non nul et b, c, x_1 et x_2 des réels) :

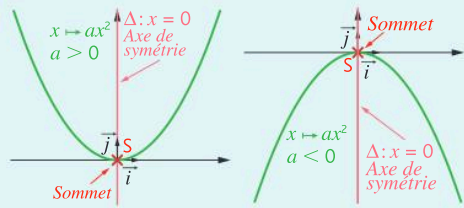
- $x \mapsto ax^2$
- $x \mapsto ax^2 + b$
- $x \mapsto ax^2 + bx + c$: forme développée, ou $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$: forme factorisée

Dans un repère orthogonal, $(O; \vec{i}, \vec{j})$, leur représentation graphique est une **parabole**.

Fonctions polynômes du type $x \mapsto ax^2$

Propriétés

- La fonction $x \mapsto ax^2$ possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Le sommet de la parabole est l'origine du repère, $S(0; 0)$.
- L'allure de la parabole dépend du signe de a :
 - si $a > 0$ elle est tournée vers le haut,
 - si $a < 0$ elle est tournée vers le bas.



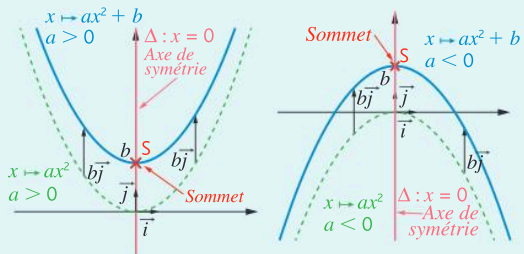
Remarque

La fonction $x \mapsto ax^2$ est un cas particulier de la fonction $x \mapsto ax^2 + b$.

Fonctions polynômes du type $x \mapsto ax^2 + b$

Propriétés

- La fonction $x \mapsto ax^2 + b$ possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $S(0; b)$.
- L'allure de la parabole dépend du signe de a :
 - si $a > 0$ elle est tournée vers le haut
 - si $a < 0$ elle est tournée vers le bas.



Propriété

La parabole associée à la fonction $x \mapsto ax^2 + b$ s'obtient comme image de la parabole associée à la fonction $x \mapsto ax^2$, par la translation de vecteur $b\vec{j}$.

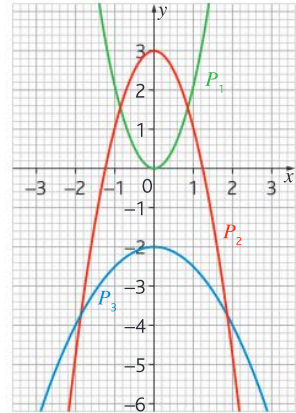
Propriétés

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + b$ où a et b sont des réels avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Si $a < 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

1 Déterminer l'équation d'une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées

➤ Dans un repère orthonormé, les représentations graphiques de trois fonctions, f_1, f_2 et f_3 sont respectivement les paraboles $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 . Avec la précision permise par le graphique, déterminer les expressions de $f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$.



Méthode

Les paraboles ont pour **axe de symétrie l'axe des ordonnées**, donc leurs équations sont de la forme $y = f(x)$ avec $f(x) = ax^2 + b$ où a et b sont des réels avec $a \neq 0$.

- 1 La valeur de b s'obtient en lisant l'**ordonnée du sommet** de la parabole.
- 2 La valeur de a s'obtient en utilisant les **coordonnées d'un point** de la parabole.

Réponse

- 1 Pour \mathcal{P}_1 le sommet a pour coordonnées $(0; 0)$ donc $b_1 = 0$, $f_1(x) = ax^2$.
Pour \mathcal{P}_2 le sommet a pour coordonnées $(0; 3)$ donc $b_2 = 3$, $f_2(x) = ax^2 + 3$.
Pour \mathcal{P}_3 le sommet a pour coordonnées $(0; -2)$ donc $b_3 = -2$, $f_3(x) = ax^2 - 2$.
- 2 $(1; 2)$ appartient à \mathcal{P}_1 donc $f_1(1) = 2 \Leftrightarrow a_1 = 2$, d'où $f_1(x) = 2x^2$.
 $(1; 1)$ appartient à \mathcal{P}_2 donc $f_2(1) = 1 \Leftrightarrow a_2 + 3 = 1 \Leftrightarrow a_2 = -2$, d'où $f_2(x) = -2x^2 + 3$.
 $(2; -4)$ appartient à \mathcal{P}_3 donc $f_3(2) = -4 \Leftrightarrow a_3 \times 2^2 - 2 = -4 \Leftrightarrow 4a_3 = -2 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{2}$,
d'où $f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$.

➤ Exercices 13 p.110 et 16 p. 111

2 Déterminer l'expression et les variations d'une fonction polynôme de degré 2 du type $x \mapsto ax^2 + b$ en connaissant un tableau de valeurs

- Le tableau de valeurs d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + b$ est donné ci-contre.
- a. Déterminer a et b .
 - b. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

rad GRAPHEUR		
Expressions	Graphique	Tableau
Résultats exacts <input type="radio"/> Régler l'intervalle		
x	f(x)	
-3	-1.5	
-2	1	
-1	2.5	
0	3	
1	2.5	
2	1	
3	-1.5	
4	-5	

Méthode

- 1 Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(0; b)$ donc $b = f(0)$.
- 2 La valeur de a s'obtient en résolvant une équation obtenue en utilisant un nombre non nul et son image.
- 3 Les variations de $x \mapsto ax^2 + b$ dépendent du signe de a .

➤ Exercices 17 et 21 p. 111

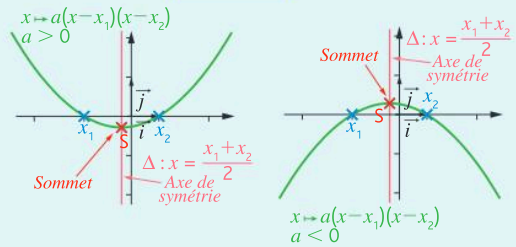
Réponses

- a.
 - 1 On lit $f(0) = 3$ donc $b = 3$, $f(x) = ax^2 + 3$.
 - 2 On lit $f(1) = 2,5$. Comme $f(1) = a \times 1^2 + 3 = a + 3$ alors $a + 3 = 2,5 \Leftrightarrow a = -0,5$.
Donc $f(x) = -0,5x^2 + 3$.
- b.
 - 3 Comme $a = -0,5$, f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

Fonctions polynômes du type $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Propriétés

- La fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ possède la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ comme axe de symétrie.
- Le **sommet** de la parabole est le point de coordonnées $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$.
- $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$ sont les points d'intersection de l'axe des abscisses et de la parabole.
- L'allure de la parabole dépend du signe de a :
 - si $a > 0$ elle est **tournée vers le haut**,
 - si $a < 0$ elle est **tournée vers le bas**.



Propriétés

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où a, x_1 et x_2 sont des réels et $a \neq 0$.

- Si $a > 0$: f est strictement **décroissante** sur $]-\infty; \frac{x_1 + x_2}{2}[$ et strictement **croissante** sur $]\frac{x_1 + x_2}{2}; +\infty[$.
- Si $a < 0$: f est strictement **croissante** sur $]-\infty; \frac{x_1 + x_2}{2}[$ et strictement **décroissante** sur $]\frac{x_1 + x_2}{2}; +\infty[$.

Signe et racines des fonctions polynômes du type $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Définition

Une **racine** d'un polynôme de degré 2 est un nombre réel x_1 tel que $f(x_1) = 0$.
C'est une solution (si elle existe) de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque

Dans un repère, les **racines** d'un polynôme de degré 2 (si elle(s) existe(nt)) sont les **abscisses** des **points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses**.

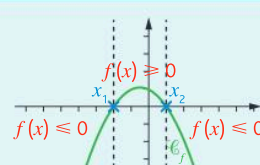
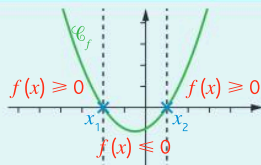
Propriétés

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 des réels tels que $a \neq 0$ et $x_1 \leq x_2$.

- f possède **deux racines** x_1 et x_2 si $x_1 \neq x_2$ et une seule racine, x_1 , si $x_1 = x_2$, cette racine s'appelle une racine double.
- Le **signe** de $f(x)$ dépend du signe de a et de la position de x par rapport à x_1 et x_2 .

		$a > 0$				
x		$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+

		$a < 0$				
x		$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-



3 Déterminer les éléments caractéristiques de $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

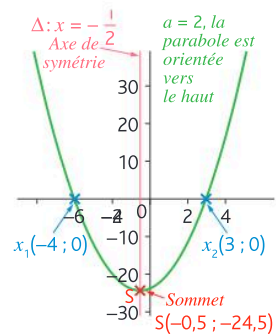
- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2(x + 4)(x - 3)$.
Déterminer l'équation de son axe de symétrie, les coordonnées de son sommet et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère.

Méthode

- 1 Identifier les valeurs de x_1 et x_2 pour trouver l'**axe de symétrie** qui a pour équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- 2 Le **sommet** de la parabole a pour abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$, pour déterminer son ordonnée, calculer l'image de $\frac{x_1 + x_2}{2}$ par f , c'est-à-dire $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.
- 3 Si $a > 0$, la parabole est **orientée** vers le haut, si $a < 0$ elle est orientée vers le bas.
Les points $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$ appartiennent à la parabole.

Réponse

- 1 $f(x) = 2(x + 4)(x - 3) = 2x^2 - (-4 + 3)x - 12$
donc $x_1 = -4$ et $x_2 = 3$.
L'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{-4 + 3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
- 2 Le sommet S a pour abscisse $-\frac{1}{2}$ son ordonnée est
 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + 4\right)\left(-\frac{1}{2} - 3\right) = -24,5$ donc $S\left(-\frac{1}{2}; -24,5\right)$.
- 1 $a = 2$ donc la parabole est orientée vers le haut. L'allure de sa représentation graphique est représentée ci-contre.



» Exercices 5 et 6 p. 110

4 Vérifier qu'une valeur est racine d'un polynôme de degré 2 et en déduire une forme factorisée

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.
Démontrer que 1 est une racine de f et en déduire l'écriture de f sous la forme factorisée :
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Méthode

- 1 Prouver qu'un réel x_1 est **racine** d'un polynôme f revient à montrer que $f(x_1) = 0$.
- 2 Supposons que x_1 soit une racine de f , alors f est factorisable par $(x - x_1)$. C'est-à-dire qu'il existe un réel x_2 tel que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où a est le coefficient de x^2 dans la forme développée de $f(x)$.
La **valeur de $f(0)$** , calculée avec les 2 expressions, permet de déterminer la valeur de x_2 .

Réponse

- 1 $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 - 1 = 0$. Donc 1 est bien une racine de f .
- 2 Pour tout réel x on peut écrire :
 $f(x) = a(x - 1)(x - x_2)$ où $a = 2$ car 2 est le coefficient de x^2 dans l'expression développée de $f(x)$. Donc $f(x) = 2(x - 1)(x - x_2)$
En particulier, $f(0) = 2 \times (-1) \times (-x_2) = 2x_2$. Or, en utilisant l'expression développée de $f(x)$, on trouve $f(0) = -1$ donc $2x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$.
Donc $f(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

» Exercices 7 p. 110 et 30 p. 112

Définition

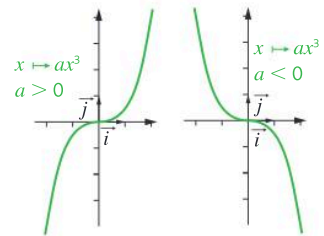
Les fonctions polynômes de degré 3 sont définies sur \mathbb{R} par les écritures suivantes (où a est un réel non nul et b, c, d, x_1, x_2 et x_3 des réels) :

- $x \mapsto ax^3$
- $x \mapsto ax^3 + b$
- $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$: forme développée ou $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$: forme factorisée

Fonctions polynômes du type $x \mapsto ax^3$

Propriétés

- La variation de la fonction $f : x \mapsto ax^3$ dépend du signe de a .
- La courbe représentative de f passe par l'origine du repère.



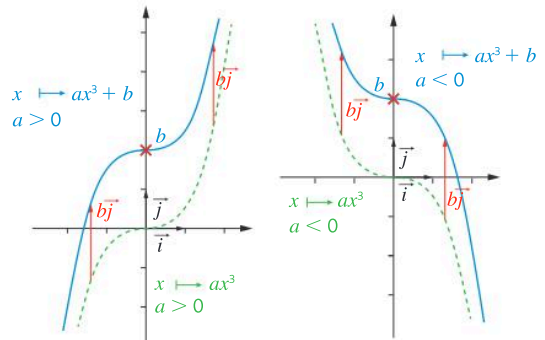
Remarque

La fonction $x \mapsto ax^3$ est un cas particulier de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$.

Fonctions polynômes du type $x \mapsto ax^3 + b$

Propriétés

- La variation de la fonction $f : x \mapsto ax^3 + b$ dépend du signe de a .
- La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; b)$.
- La courbe représentative de f ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses.



Propriété

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$ s'obtient comme image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^3$, par la translation de vecteur $b\vec{j}$.

Propriété

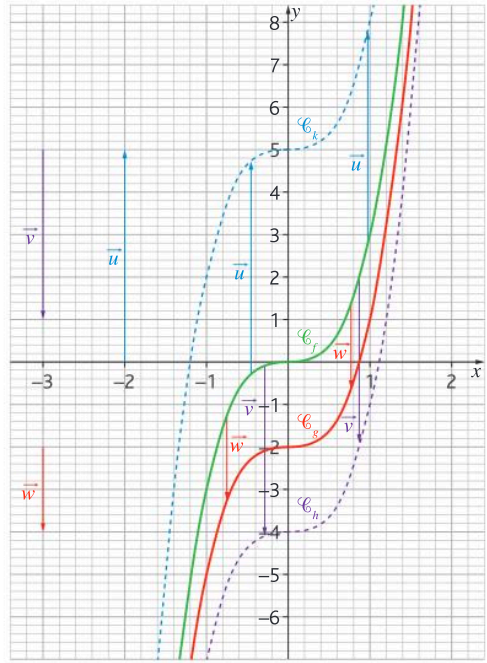
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + b$ où a et b sont des réels avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$: f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$: f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

5 Utiliser les translations pour passer d'une courbe à l'autre Logiciel de géométrie

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique on a tracé la courbe représentative de deux fonctions polynômes de degré 3, les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^3$ et $g(x) = 3x^3 - 2$.

- Déterminer la translation qui permet de passer de \mathcal{C}_f à \mathcal{C}_g .
- Construire la courbe représentative de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3x^3 + 5$ en utilisant l'outil translation.
- Déterminer l'expression de la fonction k dont la représentation graphique est obtenue comme image de la courbe \mathcal{C}_f par la translation de vecteur $(0; -4)$.



Méthode

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction $x \mapsto ax^3 + b$ se déduit de la courbe de la fonction $x \mapsto ax^3$ par la **translation** de vecteur $b\vec{j}$ c'est-à-dire le vecteur de **coordonnées** $(0; b)$.

Réponse

- $g(x) = 3x^3 - 2$ donc $b = -2$. \mathcal{C}_g se déduit de \mathcal{C}_f par la translation de vecteur $\vec{w}(0; -2)$.
- $h(x) = 3x^3 + 5$ donc $b = 5$. On crée le vecteur \vec{u} de coordonnées $(0; 5)$ puis on construit l'image de \mathcal{C}_f par la translation de vecteur \vec{u} .
- La translation de vecteur $\vec{v}(0; -4)$ correspond à $b = -4$ donc $k(x) = 3x^3 - 4$.

» Exercice 19 p. 111

6 Déterminer l'expression et les variations d'une fonction polynôme de degré 3 du type $x \mapsto ax^3 + b$ en connaissant un tableau de valeurs

Le tableau de valeurs d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + b$ est donné ci-dessous.

- Déterminer a et b .
- En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

Résultats exacts		Régler l'intervalle	
x	f(x)	x	f(x)
-3	72	-3	72
-2	15	-2	15
-1	-6	-1	-6
0	-9	0	-9
1	-12	1	-12
2	-33	2	-33
3	-90	3	-90
4	-201	4	-201

Méthode

- La courbe représentative de f passe par le point $(0; b)$.
- La valeur de a s'obtient en résolvant une équation obtenue en utilisant un nombre non nul et son image.
- Les variations de $x \mapsto ax^3 + b$ dépendent du signe de a .

Réponses

- $f(0) = -9$ donc $b = -9$ d'où $f(x) = ax^3 - 9$.
 - $f(1) = -12$ et $f(1) = a \times 1^3 - 9 = a - 9$ donc $a - 9 = -12 \Leftrightarrow a = -3$. Donc $f(x) = -3x^3 - 9$.
- Comme $a = -3$ donc $a < 0$, f est décroissante sur \mathbb{R} .

» Exercice 70 p. 115 et 78 p. 116

Signe et racines des fonctions polynômes du type $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Définition

Une **racine** d'un polynôme de degré 3 est un nombre réel x_1 tel que $f(x_1) = 0$.
C'est une solution (si elle existe) de l'équation $f(x) = 0$.

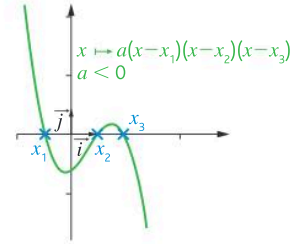
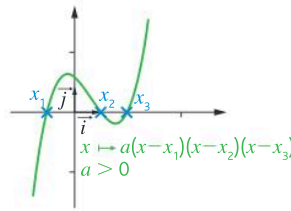
Remarque

Dans un repère, les **racines** d'un polynôme de degré 3 (si elle(s) existe(nt)) sont les **abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses**.

Propriété

Avec $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

- Le **signe de a** modifie l'allure de la représentation graphique.
- La courbe représentative de f **coupe 3 fois l'axe des abscisses** aux points de coordonnées $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.



Propriété

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$. Pour tout réel positif c , $f(x) = c$ possède une unique solution, appelée **racine cubique** de c et notée $\sqrt[3]{c}$ ou $c^{\frac{1}{3}}$.

Propriétés

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ avec $a \neq 0$ et $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

- f possède **trois racines**, x_1 , x_2 et x_3 si les trois valeurs sont distinctes. Si deux ou trois valeurs sont identiques il n'y aura plus que deux (une racine double et une racine simple) ou une racine (une racine triple).
- Le signe de $f(x)$ s'obtient à l'aide d'un **tableau de signes** après avoir étudié le signe de $a(x-x_1)(x-x_2)$ et celui de $(x-x_3)$.

EXEMPLE

Déterminer le signe de $f(x) = 3(x+2)(x-3)(x-0,5)$.

Les racines sont -2 ; 3 et $0,5$.

$f(x)$ est le produit du polynôme de degré 2 : $3(x+2)(x-3)$ par le réel $(x-0,5)$.

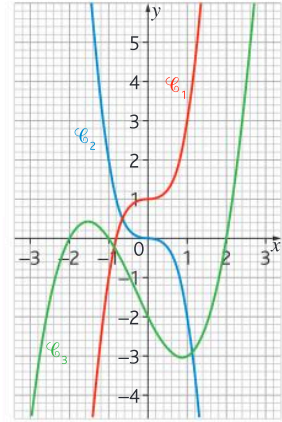
Les racines de $3(x+2)(x-3)$ sont -2 et 3 , $a = 2$ donc $a > 0$.

x	$-\infty$	-2	$0,5$	3	$+\infty$		
Signe de $3(x+2)(x-3)$	+	0	-	-	0	+	
Signe de $x-0,5$	-	-	0	+	+	+	
Signe de $f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

7 Déterminer l'expression d'une fonction polynôme de degré 3 connaissant sa représentation graphique

EXO

- Dans un repère orthonormé, les représentations graphiques de trois fonctions polynômes de degré 3, f_1 , f_2 et f_3 sont respectivement les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 . Avec la précision permise par le graphique, déterminer les expressions de $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$.



Méthode

- 1 Regarder où la courbe coupe l'axe des abscisses pour identifier l'**expression générale de la fonction** :
 - $x \mapsto ax^3 + b$: la courbe ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses et l'**ordonnée à l'origine** donne la valeur de b .
 - $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$: la courbe coupe trois fois l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.
- 2 La valeur de a s'obtient en utilisant les **coordonnées d'un point** de la courbe.

Réponse

- 1 $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont de la forme $ax^3 + b$ car \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ne coupent qu'une seule fois l'axe des abscisses. $(0; 1) \in \mathcal{C}_1$ donc $f_1(x) = a_1x^3 + 1$; $(0; 0) \in \mathcal{C}_2$ donc $f_2(x) = a_2x^3$.
 $(0; -2)$, $(0; -1)$ et $(0; 2)$ sont des points de \mathcal{C}_3 donc $f_3(x) = a_3(x+2)(x+1)(x-2)$.
- 2 $f_1(1) = 3 \Leftrightarrow a_1 + 1 = 3 \Leftrightarrow a_1 = 2$ d'où $f_1(x) = 2x^3 + 1$
 $f_2(1) = -2 \Leftrightarrow a_2 = -2$, d'où $f_2(x) = -2x^3$
 $f_3(0) = -2 \Leftrightarrow a_3 \times 2 \times 1 \times (-2) = -2 \Leftrightarrow -4a_3 = -2 \Leftrightarrow a_3 = 0,5$, d'où $f_3(x) = 0,5(x+2)(x+1)(x-2)$

➤ Exercices 69 p. 115 et 72 p. 116

8 Déterminer le signe d'une fonction polynôme de degré 3

EXO

- Déterminer le signe de $f(x) = -3(x+1)(x-0,5)(x+4)$.

Méthode

- 1 On sépare la fonction en deux morceaux afin d'étudier d'abord le signe des trois premiers facteurs qui forment une **fonction polynôme de degré 2**. Pour cela, on identifie les **racines** et le **signe de a** , puis on applique la propriété des signes d'une fonction polynôme de degré 2 vue p. 100.
- 2 On dresse un **tableau de signes** dans lequel apparaît le signe du produit des trois premiers facteurs, le signe du dernier facteur et on complète la ligne du signe de $f(x)$ en utilisant la **règle des signes**. Les **racines** seront placées dans l'**ordre croissant** dans la première ligne du tableau.

Réponse

- 1 $g(x) = -3(x+1)(x-0,5)$, les racines sont -1 et $0,5$, $a = -3$ qui est négatif.

Le tableau de signe de $g(x)$ est :

x	$-\infty$	-1	$0,5$	$+\infty$	
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- 2 Les racines de f sont -1 ; $0,5$ et -4

x	$-\infty$	-4	-1	$0,5$	$+\infty$		
Signe de $g(x) = -3(x+1)(x-0,5)$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$
Signe de $(x+4)$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

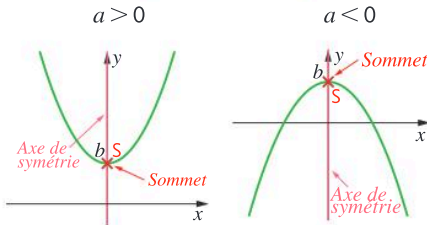
➤ Exercices 84 et 86 p. 117

Je retiens

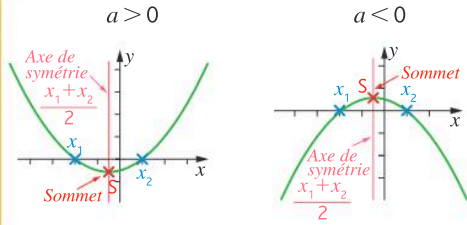
a, b sont des réels avec $a \neq 0$. x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

1. Fonctions polynôme de degré 2

$$x \mapsto ax^2 + b$$



$$x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2) \text{ ou } x \mapsto ax^2 + bx + c$$



• La représentation d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

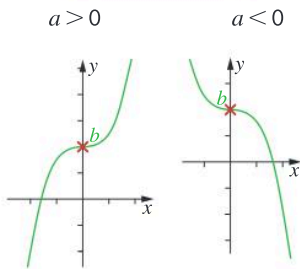
• x_1 et x_2 sont les racines de la fonction : $P(x_1) = P(x_2) = 0$.

• Tableau de signes

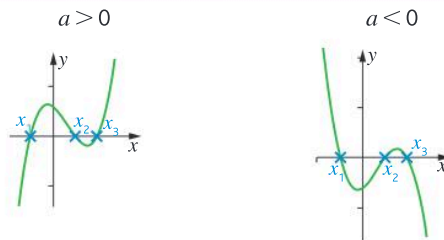
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a

2. Fonctions polynôme de degré 3

$$x \mapsto ax^3 + b$$



$$x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \text{ ou } x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$



• x_1, x_2 et x_3 sont les **racines** de la fonction : $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = 0$

• Tableau de signes

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$		
Signe de $P(x)$	Signe de $-a$	0	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

3. Solutions d'équations

$x^2 = c$ possède :

- deux solutions : \sqrt{c} et $-\sqrt{c}$ lorsque $c > 0$
- 0 comme unique solution lorsque $c = 0$
- Aucune solution réelle lorsque $c < 0$

$x^3 = c$ possède une unique solution appelée

racine cubique de c qui se note $\sqrt[3]{c}$ ou $c^{\frac{1}{3}}$.

Je me teste

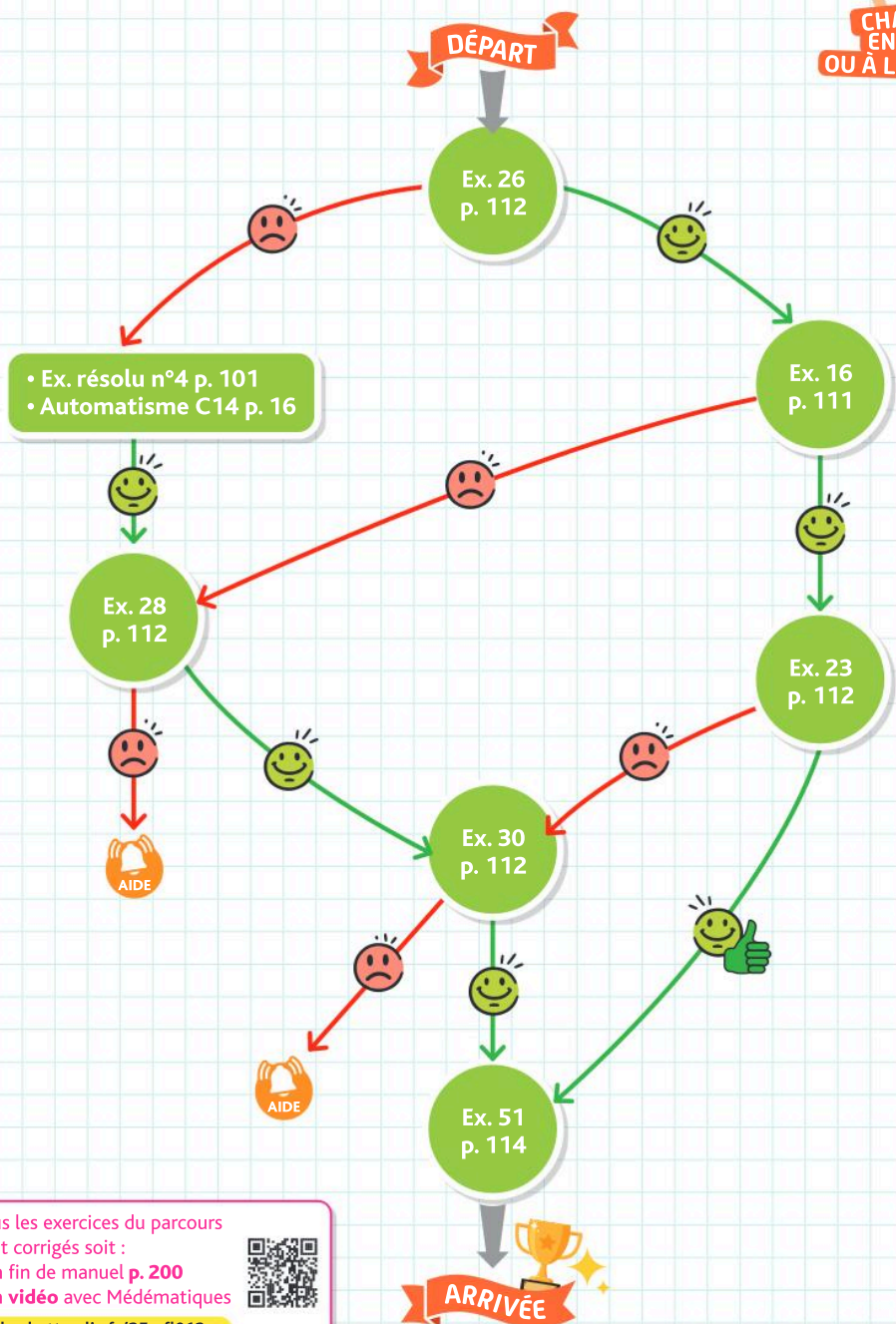


QCM interactif
et auto-corrige

hachette-clic.fr/25mfl012

Je me prépare à une évaluation

Je maîtrise les fonctions polynômes de degré 2



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

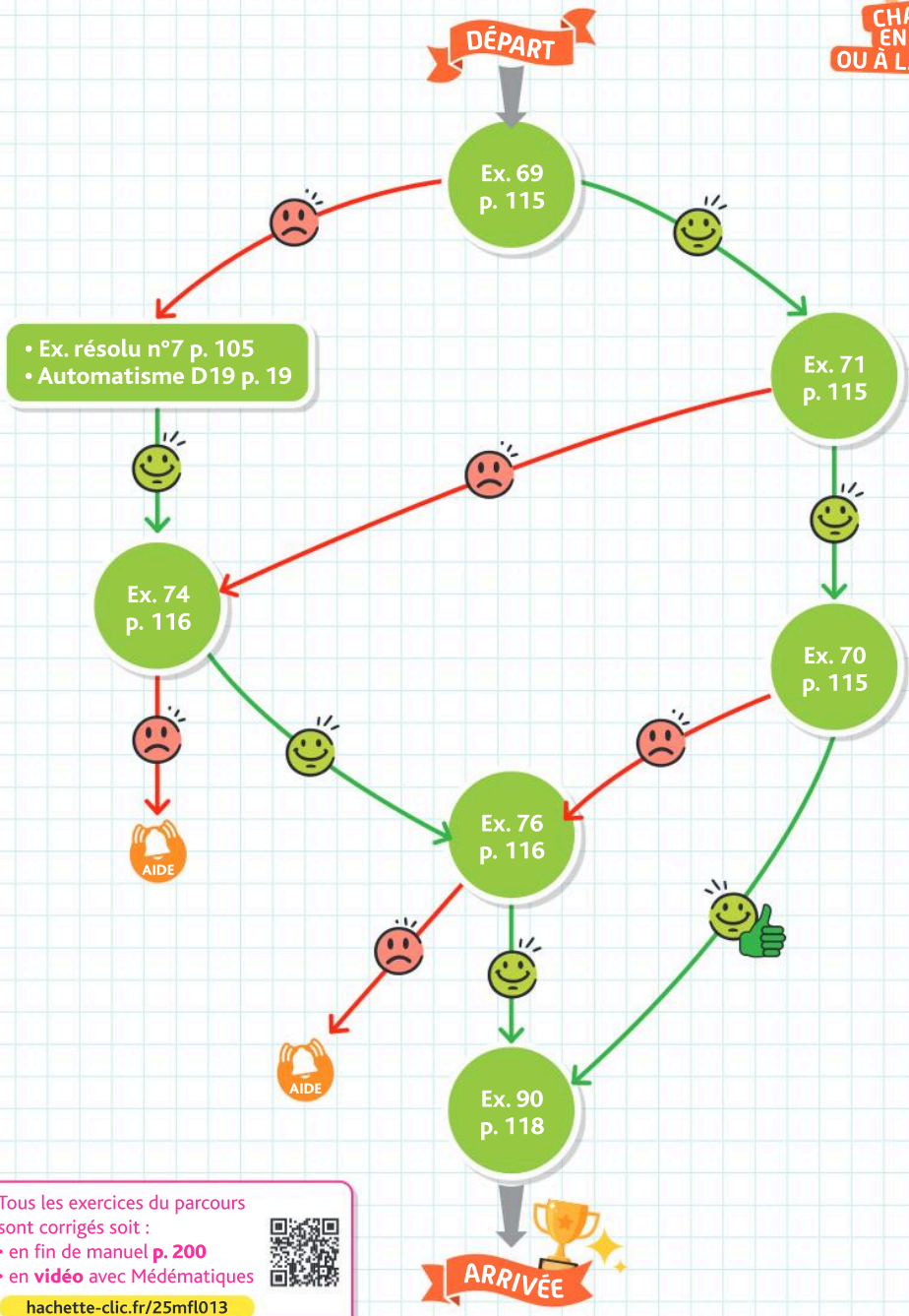
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl013

Je me prépare à une évaluation

Je maîtrise les fonctions polynômes de degré 3



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

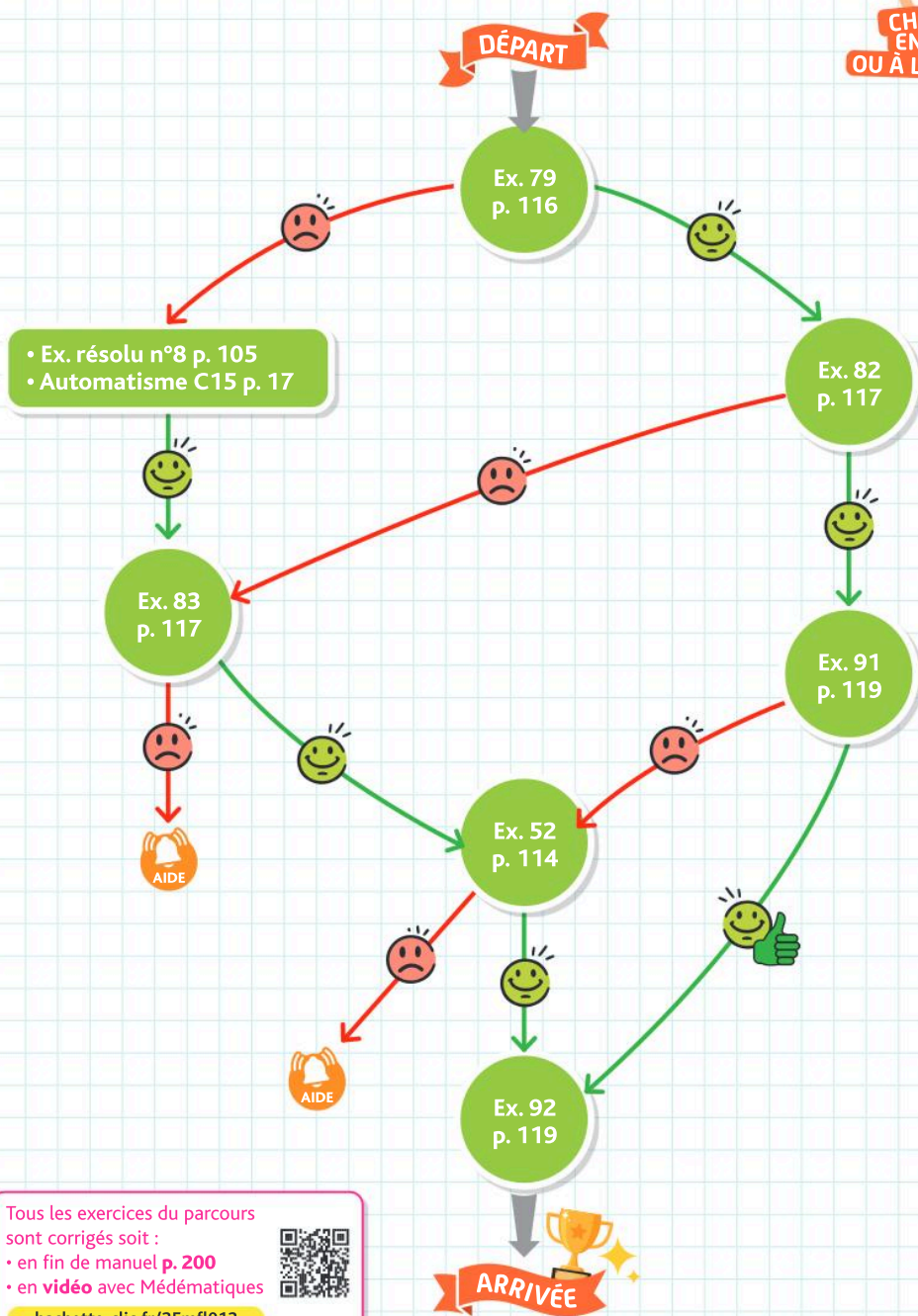
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mf1013

Je me prépare à une évaluation

Je sais déterminer le signe des fonctions polynômes



Exercices

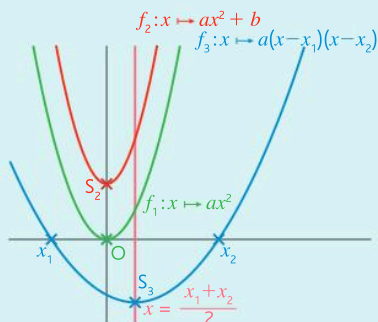
Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl013



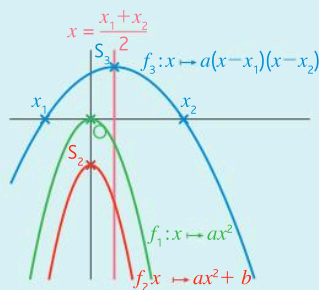
1 Fonctions polynômes de degré 2

Questions flash

- Déterminer l'allure de la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par :
 $f_1(x) = -4x^2 + 7$.
- Quelles sont les racines de la fonction f_2 définie sur \mathbb{R} par : $f_2(x) = 5(x-3)(x-2)$?
- Quelle est l'équation de l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f_3 définie sur \mathbb{R} par : $f_3(x) = 1,5x^2 + 3$?
- Quelles sont les coordonnées du sommet de la courbe représentative de la fonction f_4 définie sur \mathbb{R} par : $f_4(x) = -2(x+1)(x-4)$?
- Donner les éléments caractéristiques (variations, racines, axe de symétrie) de la fonction f_5 définie sur \mathbb{R} par : $f_5(x) = -0,5(x+2,5)(x-1,5)$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f_6 définie sur \mathbb{R} par :
 $f_6(x) = 3(x+2)(x-5)$.
- Vérifier que 10 est une racine de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = 2t^2 - 14t - 60$.
- 2 est-il une racine de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -5x^2 - 4x - 4$?
- Quelles sont les racines de la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(p) = 4(p-8)(p+2)$?
- Quel est le signe de la fonction f_7 définie sur \mathbb{R} par : $f_7(x) = -0,5x^2$?
- Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f_8 définie sur \mathbb{R} par $f_8(x) = -2,5(x-2)(x+9)$ est-elle positive ?
- Dresser le tableau de signes la fonction f_9 définie sur \mathbb{R} par : $f_9(x) = -3x(x+1)(x-4)$.



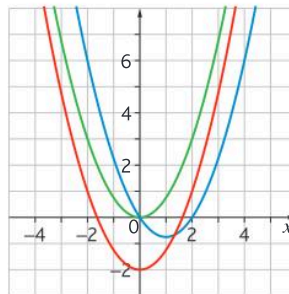
$a > 0$: la parabole est tournée vers le haut.



$a < 0$: la parabole est tournée vers le bas.

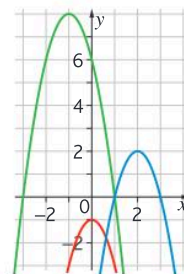
Avec la précision permise par le graphique, associer chaque fonction à sa représentation graphique :

- $f_1(x) = 0,75x^2$
- $f_2(x) = 0,75x^2 - 2$
- $f_3(x) = 0,75x(x-2)$

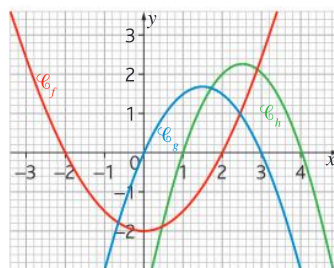


Avec la précision permise par le graphique, associer chaque fonction à sa représentation graphique.

- $f_1(x) = -2x^2 - 1$
- $f_2(x) = -2(x-1)(x+3)$
- $f_3(x) = -2(x-1)(x-3)$



f, g et h sont trois fonctions polynômes de degré 2, définies sur \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

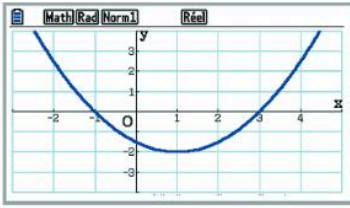


Avec la précision permise par le graphique, donner leurs racines.

Corrigé

f est une fonction polynôme de degré 2 dont la courbe représentative est donnée ci-dessous, sur la copie d'écran d'une calculatrice.

a. Avec la précision permise par le graphique, lire les racines et les coordonnées du sommet.



b. En déduire l'expression de la fonction f .

Le tableau ci-dessous est un tableau de valeurs de f , une fonction polynôme de degré 2.

a. Déterminer les valeurs des racines de ce polynôme ainsi que les coordonnées du sommet.

X	Y1
-5	-35
-4	0
-3	25
-2	40
-1	45
0	40
1	25
2	0
3	-35
4	-80
5	-135

b. En déduire l'expression de la fonction f .

Le tableau de valeurs d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + b$ est donné ci-contre.

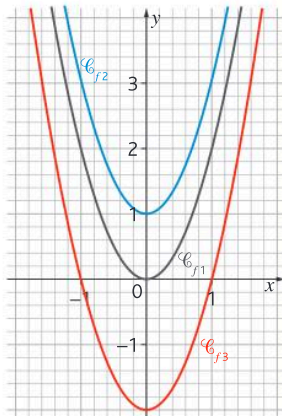
a. Déterminer a et b .

b. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .

x	f(x)
-4	76
-3	41
-2	16
-1	1
0	-4
1	1
2	16

f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions polynômes de degré 2 dont les courbes représentatives, $\mathcal{C}_{f_1}, \mathcal{C}_{f_2}$ et \mathcal{C}_{f_3} sont données ci-contre.

Déterminer la translation qui permet de transformer \mathcal{C}_{f_1} en \mathcal{C}_{f_2} puis celle qui permet de transformer \mathcal{C}_{f_1} en \mathcal{C}_{f_3} .



Dans chaque cas, associer l'expression de la fonction à l'équation de l'axe de symétrie de sa représentation graphique.

Fonction	Axe de symétrie
a. $P_1(x) = 2x^2 + 3,5$	① $x = -2$
b. $P_2(x) = -3(x+1)(x+3)$	② $x = 0$
c. $P_3(x) = (x-5)(x-2)$	③ $x = 2$
d. $P_4(x) = -2(x-0,5)(x-3,5)$	④ $x = 3,5$

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} .

$S\left(\frac{x_1+x_2}{2}; f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ est le sommet de la parabole qui représente f .

• Si $a > 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$		

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ est le **minimum** de f sur \mathbb{R} , il est atteint en $\frac{x_1+x_2}{2}$.

• Si $a < 0$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$		

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ est le **maximum** de f sur \mathbb{R} , il est atteint en $\frac{x_1+x_2}{2}$.

a. À l'aide du tableur ci-contre, déterminer l'expression de la fonction polynôme de degré 2, f .

b. Cette fonction admet-elle des racines ? Si oui, donner leurs valeurs.

c. Cette fonction admet-elle un extremum ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum et quelle est sa valeur ?

d. Cette fonction admet-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner son équation.

	A	B
1	x	f(x)
2	-5	53
3	-4	35
4	-3	21
5	-2	11
6	-1	5
7	0	3
8	1	5
9	2	11
10	3	21
11	4	35
12	5	53

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl013



- Soit p la fonction définie sur \mathbb{R} par :
- $$p(t) = 1,5(t - 5)(t + 7).$$
- La fonction p admet-elle un maximum ou un minimum ? Justifier.
 - En quelle valeur cet extremum est-il atteint ?
 - Combien vaut-il ?

- Corrigé** a. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin qu'il permette de déterminer les racines entières de la fonction g polynôme de degré 2 définie sur $[-4; 4]$ par $g(x) = 5x^2 + 5x - 30$.

```
L=[]
n=-4
while n<=4:
    if 5*n**2+5*n-30.....:
        L.append(...)
    n=...
print(...)
```

- b. Dans la console, on lit : `[-3, 2]`
 >>>
 En déduire l'expression factorisée de $g(x)$.

- Dresser le tableau de variations de la fonction l définie sur \mathbb{R} par :

$$l(m) = -\frac{8}{13} \left(m - \frac{5}{2} \right) \left(m + \frac{3}{4} \right).$$

- a. Vérifier que :
 $0,75x^2 + 1,5x - 18 = 0,75(x - 4)(x + 6)$
 b. En déduire le tableau de variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 0,75x^2 + 1,5x - 18$.

Lorsqu'une fonction polynôme de degré 2, admet une racine x_1 , c'est-à-dire si $f(x_1) = 0$, alors $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée :
 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_2 est à déterminer après avoir développé $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Corrigé** a. Vérifier que 3 est une racine de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.
 b. En déduire une factorisation de $f(x)$.

- Soit P la fonction définie sur \mathbb{R} par :
- $$P(x) = 4x^2 - 8x - 60.$$
- Déterminer son expression factorisée sachant que $P(5) = 0$.

- Vidéo** Soit C la fonction définie sur \mathbb{R} par :
- $$C(q) = -2q^2 + 5q - 2.$$

- Calculer $C(2)$.
- En déduire la forme factorisée de $C(q)$.

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
- $$f(x) = 0,3x^2 + 1,1x - 13.$$

- Calculer $f(5)$.
- En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

- Chercher une racine évidente revient à tester les entiers de -2 à 2 comme racine d'une fonction polynôme.

- Corrigé** a. Trouver une racine évidente de la fonction polynôme de degré 2, f , définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{7}x^2 + x - \frac{8}{7}.$$

- Vérifier que $f(-8) = 0$.
- En déduire l'expression factorisée de f .

- a. Trouver une racine évidente de $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$.
 b. En déduire la forme factorisée de $P(x)$.

- f est une fonction polynôme de degré 2 telle que $f(2) = 0$, dont la courbe représentative admet la droite d'équation $x = 3$ comme axe de symétrie et le point de coordonnées $(3; 2)$ comme sommet. En déduire les expressions factorisée et développée de $f(x)$.

- L'équation $x^2 = c$ admet :

- 2 solutions si $c > 0$: $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$
- 1 solution si $c = 0$: $x = 0$
- aucune solution réelle si $c < 0$

Pour les exercices 33 à 36, résoudre dans \mathbb{R} les équations proposées.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $x^2 = 81$ | b. $x^2 = 54$ |
| a. $x^2 = 20$ | b. $x^2 = -9$ |
| a. $3x^2 = 21$ | b. $-5x^2 = 120$ |
| a. $4x^2 + 60 = 0$ | b. $64 - 8x^2 = 0$ |

- Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 32$.
- Résoudre $f(x) = 0$.
 - Déterminer l'équation de l'axe de symétrie ainsi que les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de f .

Une fonction polynôme de degré 2 de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et de $-a$ sur $]x_1; x_2[$ si elle admet 2 racines x_1 et x_2 .

Pour les exercices 38 à 40 dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur \mathbb{R} .

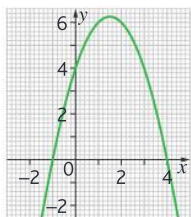
- Corrigé** $f(x) = -3(x - 7)(x + 4)$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

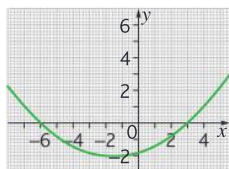
$$f(x) = 0,5(x-2)\left(x - \frac{7}{3}\right)$$

Avec la précision permise par le graphique, donner le tableau de signes des fonctions polynômes de degré 2 dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

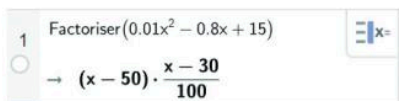
a.



b.



À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :



a. En déduire la factorisation de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 0,01x^2 - 0,8x + 15$ sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b. En déduire la solution de $f(x) \geq 0$.

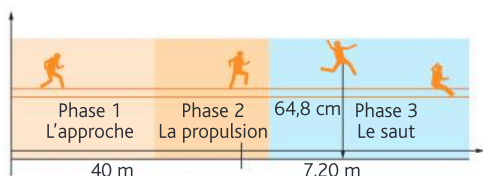
Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction polynôme de degré 2 connaissant le tableau des variations et le tableau de signes.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de p		↗ 5 ↘	

x	$-\infty$	-6	10	$+\infty$	
Signe de $p(x)$	-	0	+	0	-

Donner le plus grand nombre entier solution de l'inéquation $9\left(x - \frac{22}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq 0$.

Une athlète pratique le saut en longueur. Donner l'expression de la fonction polynôme de degré 2 qui modélise son saut sachant que sa course d'élan est de 40 mètres et que son saut a une longueur de 7,20 mètres et une hauteur maximale de 64,8 cm.



Calculatrice Lors d'une compétition de tir à l'arc, on modélise le trajet de la flèche en fonction de la distance à la cible (en m) par :

$$t(m) = -\frac{1}{10\,000}m^2 + \frac{1}{200}m + 1,5.$$

On veut savoir si la personne qui tire la flèche à 70 m de la cible atteint son centre, 1,30 m au-dessus du sol.

La représentation ci-dessous n'est pas à l'échelle



a. Justifier pourquoi, dans ce contexte, $t(0) \neq 0$.

b. À l'aide d'un calcul, vérifier que la flèche n'atteint pas le centre de la cible.

c. À l'aide de la table de la calculatrice, déterminer à quelle distance aurait dû se placer le tireur (arrondir au cm près) pour toucher la cible.

d. Vérifier que : $t(m) = -\frac{1}{10\,000}(t - 150)(t + 100)$.

e. En déduire à quelle distance du tireur devrait retomber la flèche si elle ne touchait pas la cible.



Mathéo fait du camping sauvage. Il installe sa tente de douche solaire. Afin d'avoir plus de place en hauteur, il pose les deux arceaux de façon qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.

On modélise un arceau par la représentation graphique de la fonction A telle que :

$$A(x) = -1,85(x - 1)(x - 2,76)$$

Sachant qu'il mesure 1m85, Mathéo pourra-t-il tenir debout dans la tente ?

Le plus grand observatoire astronomique du monde se trouve dans le désert chilien d'Atacama. On y trouve un radiotélescope composé d'une soixantaine de paraboles blanches de 7 à 12 mètres de diamètre.



On pourrait modéliser la coupe verticale des plus grandes antennes, qui ont un diamètre de 12 mètres, par la fonction P polynôme de degré 2 telle que :

$$P(x) = \frac{1}{8}(x - 6)(x + 6).$$

a. Quelle serait alors leur profondeur ?

b. Sachant que ces paraboles s'enfoncent de 1 mètre dans leur socle cylindrique, quel doit être le diamètre de ce cylindre ?

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :

• en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématicques
p. 200 hachette-clic.fr/25mfl013



Inès et Paco jouent à « la balle au panier ». Ils ont aligné 7 gobelets qui ont chacun 10 cm de diamètre. Le premier est posé à 1,60 m des joueurs. Le dernier est à 2,20 m.



Le premier qui atteint le gobelet jaune a gagné. Si la balle tombe dans un des deux gobelets bleus, le joueur doit faire deux tours de la pièce en courant. Si elle tombe dans un gobelet rouge, il doit faire quatre tours. Et si la balle atterrit dans un gobelet vert ou au-delà, il faut faire 8 tours.

Le premier lancer d'Inès est modélisé par la fonction I telle que : $I(x) = -2x^2 - 0,06x + 7,88$; et celui de Paco par la fonction P telle que : $P(x) = -x^2 - 0,95x + 5,85$, où x est la distance, en mètres, séparant les joueurs du centre du gobelet visé.

- Vérifier que le tir d'Inès n'atterrit pas dans le gobelet jaune.
- Paco a-t-il gagné avec son tir ? Si non, combien de tours de table doit-il faire ?
- Donner une expression sous forme factorisée d'un tir qui obligerait l'un des joueurs à faire 8 tours.

Calculatrice La fréquentation d'un magasin ouvert de 9h à 19h est modélisée par la fonction F définie sur $[9; 19]$ par $F(x) = -1,5x^2 + 41,25x - 242,25$; où x représente l'heure et $F(x)$ le nombre de clients présents.

- Combien de personnes sont-elles présentes à l'ouverture du magasin ?
- Vérifier que $F(x) = -1,5(x - 8,5)(x - 19)$.
- À quel moment la fréquentation de ce magasin est-elle maximale ? La réponse sera donnée en heures et minutes.
- Combien de personnes sont-elles présentes dans le magasin à ce moment-là ?
- À l'aide de la calculatrice, déterminer, au quart d'heure près, sur quels créneaux horaires moins de 20 personnes sont présentes dans le magasin.

Corrigé Grande lectrice, Haïzeia a acheté n livres de poche pour 120 euros, sachant qu'ils étaient tous au même prix unitaire p . Si chaque livre de poche avait coûté 3 euros de moins, elle aurait pu en acheter deux supplémentaires.

- Traduire chacune ces deux informations par une équation.
- Exprimer n en fonction de p dans la première équation.

- Montrer que chercher le prix d'un livre de poche revient à résoudre l'équation $p^2 - 3p - 180 = 0$.
- Vérifier que : $p^2 - 3p - 180 = (p + 12)(p - 15)$.
- En déduire combien coûte chaque livre de poche et combien de livres de poche a achetés Haïzeia.

Corrigé Un viticulteur vend son vin 100 € l'hectolitre. Le coût en euros de production de q hectolitres est $C(q) = 0,1q^2 + 50q + 4\,000$.

- Déterminer le bénéfice, $B(q)$, réalisé pour la production et la vente de q hectolitres de vin.
- Calculer $B(400)$ et en déduire une forme factorisée de $B(q)$.
- Quelles doivent être les quantités vendues et produites pour réaliser un profit ?

Bernar Venet, plasticien français, a exposé place Vendôme, une installation intitulée « la parabole de l'histoire »



Les dimensions de l'un des arcs sont 18,2 mètres d'écart sur 2 mètres de hauteur.

- Déterminer l'expression de la parabole sachant que l'on situe l'origine du repère au milieu des deux extrémités.
- Quelle serait cette expression si l'une des deux extrémités correspondait à l'origine du repère ?

2 Fonctions polynômes de degré 3

Questions flash

Pour les exercices 54 à 59 on considère la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par : $f_1(x) = -0,75x^3 + 2,5$.

- Donner les variations de la fonction f_1 .
- Donner les coordonnées du vecteur de la translation permettant d'obtenir la représentation graphique de la fonction f_1 à partir de celle de la fonction f_2 définie sur \mathbb{R} par : $f_2(x) = -0,75x^3$.
- La fonction f_3 définie sur \mathbb{R} par : $f_3(x) = 5x^3 - 4$ admet-elle un axe de symétrie ? Si oui, donner son expression.
- Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction f_4 définie sur \mathbb{R} par : $f_4(x) = 3(x + 7)(x - 4)(x - 10)$.
- Quel est le signe de la fonction f_2 définie sur \mathbb{R} par : $f_2(x) = -0,5x^3$?
- Donner les éléments caractéristiques (racines, signes, variations) de la fonction f_5 définie sur \mathbb{R} par : $f_5(x) = 2(x + 1)(x - 3)(x - 4)$.

► L'équation $x^3 = c$ avec $c \geq 0$ admet une unique solution $\sqrt[3]{c}$ aussi notée $c^{\frac{1}{3}}$.

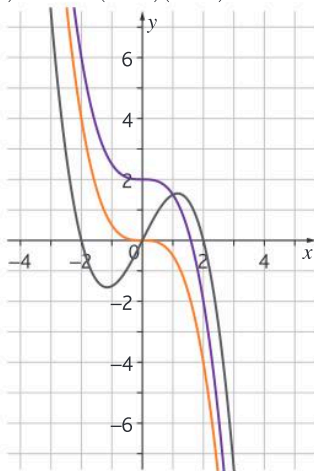
Pour les exercices 60 à 62, résoudre les équations dans \mathbb{R} .

- a. $x^3 = 125$ b. $x^3 = 1331$
- a. $x^3 = 15$ b. $x^3 = 64$
- a. $2x^3 - 5 = 49$ b. $5x^3 + 12 = 47$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = 3x^3 - 120$.

Donner l'allure de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f , en précisant l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses.

- a. Avec la précision permise par le graphique, associer chaque fonction à sa courbe représentative.
 - $f_1(x) = -0,5x^3$
 - $f_2(x) = -0,5x^3 + 2$
 - $f_3(x) = -0,5x(x-2)(x+2)$



b. Quelle translation permet de transformer la courbe représentative de f_2 en la courbe représentative de f_1 ?

Pour les exercices 65 à 66, déterminer les racines des polynômes de degré 3 définies sur \mathbb{R} .

- a. $f(x) = 4,5(x-2)(x+3)(x-1,5)$
- b. $g(a) = -3a\left(a - \frac{1}{5}\right)\left(a - \frac{7}{3}\right)$
- a. $h(t) = (2t-4)(t-0,5)(t+3)$
- b. $k(p) = 2(p^2+16)(p-12)$

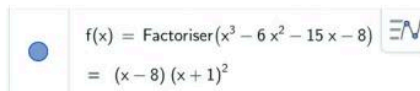
Calculatrice Soit la fonction l définie sur \mathbb{R} par :
 $l(x) = -3x^3 - 9x^2 + 180x + 672$.

a. À l'aide de la table de calculatrice, déterminer les trois racines entières de ce polynôme, sachant qu'elles sont comprises entre -10 et 10 (inclus).

b. Une forme factorisée de l est :

- ① $3(x-4)(x+8)(x-7)$
- ② $-3(x-4)(x+8)(x-7)$
- ③ $-3(x+4)(x-8)(x+7)$
- ④ $3(x+4)(x-8)(x+7)$

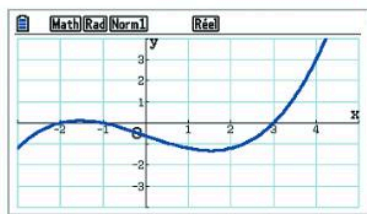
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient la copie d'écran ci-dessous :



En déduire les racines de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$.

► Pour déterminer l'expression factorisée d'une fonction polynôme de degré 3 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ à l'aide de la représentation graphique, on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On obtient ainsi les racines x_1, x_2 et x_3 . On détermine ensuite a grâce aux coordonnées d'un point, $0, f(0)$ (pa) exemple. On résout alors l'équation : $-ax_1x_2x_3 = f(0)$.

- a. Avec la précision permise par le graphique, déterminer les racines de la fonction polynôme de degré 3, f , représentée sur l'écran de la calculatrice.
- b. En s'aidant d'un point de la courbe à coordonnées entières, en déduire l'expression factorisée de f .



Le tableau ci-dessous est un tableau de valeurs d'une fonction polynôme de degré 3, f . Déterminer l'expression factorisée de $f(x)$.

X	Y1			
-5	0			
-4	112			
-3	168			
-2	180			
-1	160			
0	120			
1	72			
2	28			
3	0			
4	0			
5	40			

Donner les racines de la fonction polynôme de degré 3, D , définie sur \mathbb{R} par :

$$D(q) = \frac{5}{6}\left(q^2 + \frac{9}{4}\right)\left(q - \frac{3}{2}\right).$$

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel **ou** • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl013



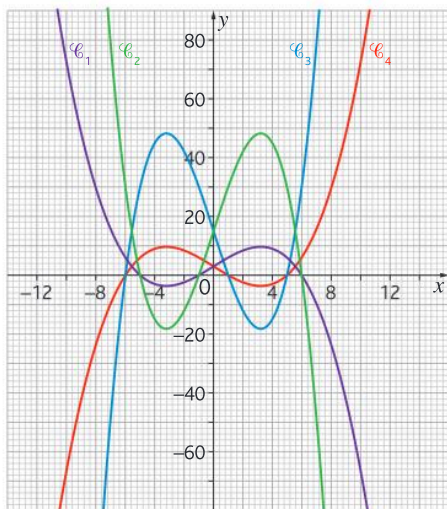
Dans chaque cas, associer les représentations graphiques à la fonction correspondante :

$$f_1(x) = 0,5(x-5)(x-1)(x+6)$$

$$f_2(x) = 0,1(x-5)(x-1)(x+6)$$

$$f_3(x) = -0,1(x+5)(x+1)(x-6)$$

$$f_4(x) = -0,5(x+5)(x+1)(x-6)$$



a. Développer et réduire l'expression :

$$-4(x-0,25)(x+3)(x-5)$$

b. En déduire les racines de la fonction B définie sur \mathbb{R} par : $B(x) = -4x^3 + 9x^2 + 58x - 15$.

Vidéo

a. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme de degré 3, f , définie sur \mathbb{R} par :

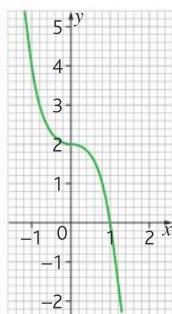
$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 61,75x + 87,5$$

b. Vérifier que $f(-12,5) = 0$.

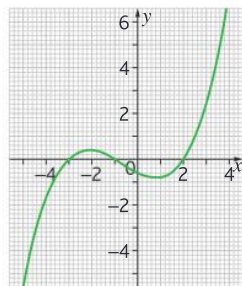
c. En déduire l'expression factorisée de f .

Avec la précision permise par le graphique, donner le tableau de signes des fonctions polynômes de degré 3 dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

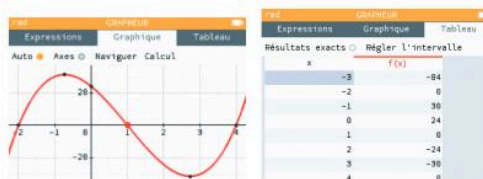
a.



b.



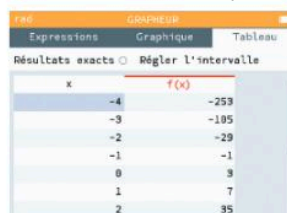
Corrigé À l'aide des informations données par le graphique et la table, déterminer l'expression factorisée de f , fonction polynôme de degré 3.



Le tableau de valeurs d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + b$ est donné ci-contre.

a. Déterminer a et b

b. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .



Déterminer les variations de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax^3 + b$ l'aide du tableau de valeurs ci-dessous :



► Pour déterminer le **signe** d'une fonction polynôme de degré 3 exprimée sous la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ il faut étudier le signe de $a(x-x_1)(x-x_2)$ et celui de $(x-x_3)$.

Corrigé a. Dresser le tableau de signes de la fonction f telle que : $f(x) = (x-5)(x+3)$.

b. En déduire celui de la fonction g telle que :

$$g(x) = (x-7)(x-5)(x+3)$$

a. Dresser le tableau de signes de la fonction h telle que : $h(t) = (t-8)^2$.

b. En déduire celui de la fonction k telle que :

$$k(t) = -0,5(t+3,5)(t-8)^2$$

Déterminer le tableau de signes de g , définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = -0,1(x^2 + 6,25)(x-7,2)$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

Corrigé

1 Factoriser $(x^3 - 13x^2 - 10x + 400)$ $\Rightarrow x =$
 $\rightarrow (x - 10)(x - 8)(x + 5)$

En déduire le tableau de signe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 13x^2 - 10x + 400$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

Vidéo

1 Factoriser $(-72x^3 - 107x^2 - 38x - 3)$ $\Rightarrow x =$
 $\rightarrow -(x + 1)(8x + 3)(9x + 1)$

a. En déduire la forme factorisée, sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, de l'expression de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -72x^3 - 107x^2 - 38x - 3.$$

b. En déduire le tableau de signes de $f(x)$.

Pour les exercices 84 et 85, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations proposées.

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \geq 0$$

$$-0,5x(x + 1,2)(x - 0,8) < 0$$

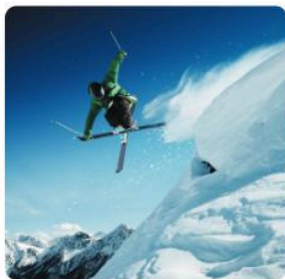
Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction polynôme de degré 3, v , en connaissant son tableau de variations et son tableau de signes.

t	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
Variations de t		$\nearrow \frac{100}{27}$	$\searrow -4$	\nearrow

t	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $v(t)$	-	0	+

Calculatrice

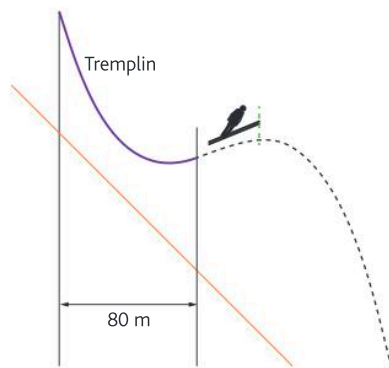
Yasmina s'entraîne au saut à ski en vue d'une compétition. Pour avoir une chance de pouvoir se qualifier dans l'équipe, son saut doit avoir une longueur d'au moins 95 mètres.



On peut modéliser son saut par la fonction S définie sur $[0; 15]$ par :

$S(m) = -0,06m^3 + 0,82m^2 - 3,38m + 7,74$, où m représente la distance par rapport à la verticale du point de départ en dizaine de mètres.

Yasmina s'élance sur le tremplin puis saute.



On admet que la forme factorisée est :

$$S(m) = -0,06(m - 9)\left(m^2 - \frac{14}{3}m + \frac{43}{3}\right)$$

- Déterminer le nombre de racines de cette fonction et leur valeur.
- En déduire la longueur du saut de Yasmina.
- Ce saut lui permettrait-il d'être qualifiée ?
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au cm près la hauteur de son saut.

D'après le Ministère de la Santé, la qualité des eaux de baignade (eau douce) selon la teneur en bactéries d'entérocoques intestinaux est classée comme suit :

Paramètre	Excellente qualité	Bonne qualité	Qualité suffisante
Entérocoque intestinal (UFC/100ml)	200*	400*	> 400*

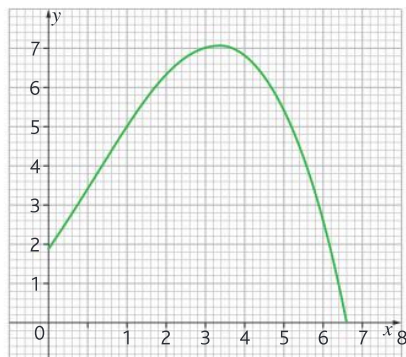
*Source : baignades.sante.gov.fr

On s'intéresse à l'évolution de cette bactérie dans un lac situé dans une base de loisir.

PARTIE A :

Le diagramme ci-dessous représente l'évolution de ce taux (en centaine/100 ml) relevé tous les jours dans ce lac.

- Expliquer pourquoi, dans ce contexte, on peut limiter la représentation graphique comme proposé ci-dessous :





2. Avec la précision permise par le graphique :
- Au bout de combien de temps les bactéries semblent-elles avoir été éliminées ?
 - Déterminer les périodes durant lesquelles l'eau est de qualité satisfaisante, de bonne qualité et enfin de qualité excellente.

PARTIE B

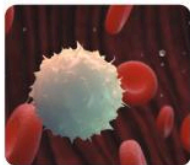
On considère la fonction q définie sur $[0 ; 8]$ par $q(t) = -0,05t^3 + 0,155t^2 + 1,46t + 1,9$ qui traduit l'évolution du nombre de bactéries (en UFC/100 ml) en fonction du temps (en heures).

- Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il permette de savoir au bout de combien de jours il ne restera plus que des traces de bactéries dans ce lac.

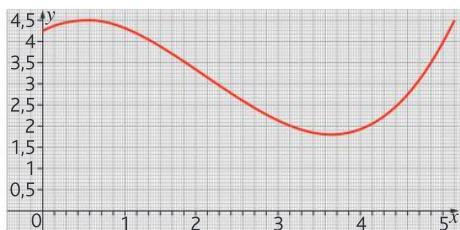
```
n=0
while -0.05*n**3+0.155*n**2+1.46*n+1.9 > 0:
    n+=1
print(n)
```

- Vérifier que la fonction peut aussi s'écrire sous la forme $-\frac{1}{20}\left(t - \frac{38}{5}\right)\left(t + \frac{5}{2}\right)(t + 2)$.
- En déduire le jour et l'heure à partir desquels on ne décèlera plus de présence de ces bactéries dans l'eau du lac.

Calculatrice Devant subir un traitement, Idir doit surveiller quotidiennement son taux de globules blancs (leucocytes) dans le sang pendant 5 semaines.



PARTIE A : Aspect graphique (les réponses seront données avec la précision permise par le graphique)
 Le graphique ci-dessous représente l'évolution du taux de leucocytes (en milliers par mm^3) en fonction du nombre de semaines de suivi.



- Le taux normal de leucocytes doit être compris entre 4 000 et 11 000/ mm^3 . À partir de combien de jours, Idir doit-il s'inquiéter de cette évolution ?
- Le traitement ne peut être modifié. Pour limiter son impact, Idir doit changer son alimentation et consommer des aliments riches en magnésium et pratiquer une activité physique plus importante. Il débute ce régime le 11^e jour.

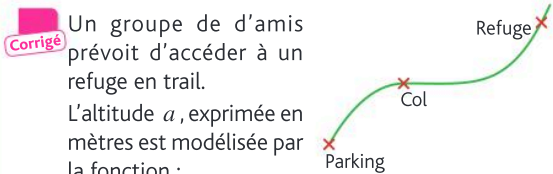
- Au bout de combien de jours peut-il estimer que l'on commence à voir les effets de ce régime ?
- A-t-il retrouvé le taux de leucocytes initial à la fin de la période d'observation ?

PARTIE B : Étude algébrique

On peut modéliser le taux de leucocytes par mm^3 en fonction de la semaine x de prélèvement par la fonction T définie sur $[0 ; 5]$ par :

$$T(x) = 0,2x^3 - 1,2x^2 + 1,05x + 4,25$$

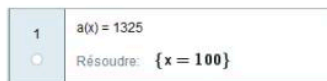
- Quel est le taux de leucocytes initial d'Idir ?
 - Quel est, à l'unité près, son taux au bout de 25 jours ?
 - On parle de leucopénie lorsque le taux de globules blancs est en dessous de 3 500/ mm^3 .
 À l'aide de la calculatrice, déterminer sur quelle période Idir est en leucopénie.
- On admet que : $T(x) = 0,2(x + 1,38)(x^2 + px + s)$, avec p et s tels que $x^2 + px + s$ ne peut être factorisée.
- Selon cette modélisation, le taux de globules blanc d'Idir peut-il être nul ?
 - Est-ce cohérent dans ce contexte ?



$a(t) = 0,005t^3 - 0,75t^2 + 36,5t + 175$, où t est la durée du trajet en minutes.

- À quelle altitude se situe le départ ?
- Le groupe atteint le col au bout de 35 minutes. À quelle altitude se situe-t-il ? On donnera le résultat arrondi au mètre près.
- Le dénivelé est de 1 250 mètres.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient la copie d'écran ci-dessous :



- En déduire le temps mis par ce groupe pour arriver au refuge.
- En déduire la vitesse ascensionnelle moyenne de ce groupe en mètres par heure.
- Kilian Jornet, spécialiste de la course en montagne, a, lorsqu'il court en ultratrail, une vitesse ascensionnelle moyenne d'environ 1 000 mètres par heure. Combien de temps en moins aurait-il mis pour atteindre ce refuge dans ces conditions ?

Corrigé

Le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par une entreprise est modélisé par la fonction B définie sur $[0; 30]$ par :

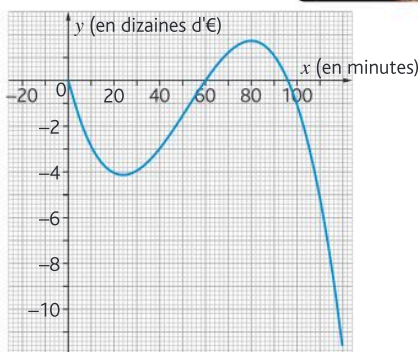
$B(x) = -x^3 + 29x^2 - 70x - 1\,200$, où x représente le nombre de milliers d'articles vendus.

- Vérifier que $B(10) = B(24) = 0$.
- En déduire l'expression factorisée de $B(x)$.
- Dresser le tableau de signes de $B(x)$.
- En déduire pour quels nombres d'articles vendus cette entreprise est déficitaire.

Vidéo

Nao part jouer au casino avec ses amis.

La fonction ci-dessous modélise ses gains (positifs ou négatifs) en dizaine d'euros en fonction du temps passé en minutes dans cet établissement.



Partie A : Étude graphique (les réponses seront données avec la précision permise par le graphique)

- Quelle a été la somme maximale qu'il a perdue durant la première demi-heure ?
- Au bout de combien de temps son budget est-il revenu au point de départ ?
- Au bout de combien de temps aurait-il dû arrêter de jouer pour gagner le plus possible ? Quelle aurait été cette somme ?

Partie B : Étude algébrique

Les gains de Nao peuvent être modélisés par la fonction G définie sur $[0; 120]$ par :

$$G(x) = -\frac{1}{15\,000}x^3 + \frac{13}{1\,250}x^2 - \frac{48}{125}x,$$

où x représente le temps passé dans le casino en minutes et $G(x)$ le gain en dizaines d'euros.

- Quelle somme a-t-il gagnée ou perdue au bout d'un quart d'heure ?
- Vérifier que 60 est une racine de G .
- En déduire la forme factorisée de $G(x)$.
- Dresser le tableau de signes de $G(x)$.
- Interpréter dans le contexte la période où $G(x)$ est strictement négative.

Conclusion : D'après vous, pourquoi dit-on que « le casino gagne toujours »

D'après Bac/Annales ST2S Calculatrice

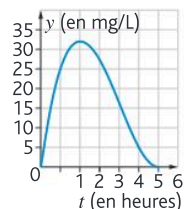
Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicamenteuse au temps $t=0$ (où t est exprimé en heures). Le produit actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé. Le médicament est efficace lorsque la concentration du produit actif dans le sang est supérieure ou égale à 25 mg/L.

La concentration maximale du produit actif dans le sang ne peut dépasser 40 mg/L pour éviter les effets secondaires.

PARTIE A : Étude graphique

(les réponses seront données avec la précision permise par le graphique)

La courbe donnée ci-contre représente la concentration en mg/L du produit actif dans le sang du malade en fonction du temps écoulé depuis l'injection du médicament.



Pour les questions a) à e), les réponses seront données en tenant compte de la précision permise par le graphique.

- Déterminer la concentration du produit actif (en mg/L) du produit actif au bout de 5 heures.
- Le médecin a-t-il respecté la dose à ne pas dépasser ? Justifier la réponse.
- Déterminer les temps en heures et minutes pour lesquels la quantité de produit actif est de 15 mg/L.
- Pendant quelle durée le médicament est-il resté efficace ?
- Au bout de quelle durée le médicament est-il complètement éliminé ?

PARTIE B : Étude algébrique

On modélise l'évolution de la concentration, exprimée en mg/L, du produit actif dans le sang du malade en fonction du temps t , exprimé en heures, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par :

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t.$$

On cherche sur quel intervalle de temps la concentration du produit actif est supérieure ou égale à 25 mg/L.

Pour cela, on définit la fonction g sur $[0; 6]$ par :

$$g(t) = f(t) - 25.$$

- Vérifier que :

$$g(t) = (t-1)\left(t - \frac{11-\sqrt{21}}{2}\right)\left(t - \frac{11+\sqrt{21}}{2}\right).$$

- Étudier le signe de la fonction g .
- En déduire l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

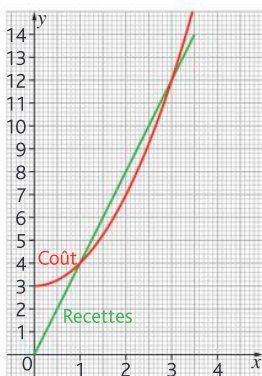
Des casquettes rentables ? **STMG**

» Chercher • Communiquer

Une usine fabrique au maximum 3 500 casquettes par jour. Le coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour fabriquer x milliers de casquettes est noté $C(x)$.



La recette, exprimée en milliers d'euros, obtenue pour x milliers de casquettes vendues est notée $R(x)$. Le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, obtenu pour x milliers de casquettes fabriquées et vendues est noté $B(x)$.



1. Partie graphique

Dans le repère ci-contre, la courbe **rouge** représente la fonction C , et la courbe **verte** représente la fonction R .

Avec la précision permise par le graphique répondre aux questions suivantes :

- Quel est le montant en euros de la recette si l'usine fabrique et vend 500 casquettes ?
- Dans ce cas, réalise-t-elle un bénéfice ?
- Pour quelle(s) quantité(s) de casquettes fabriquées et vendues l'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ?

2. Partie algébrique

Dans cette partie, on admet que pour tout x de $[0; 3,5]$: $B(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- Déterminer une racine évidente de $B(x)$.

En déduire la forme factorisée de $B(x)$.

- Dresser le tableau de signes de B .

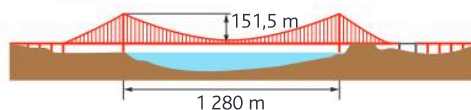
Pour quelle quantité de casquettes fabriquées et vendues, l'entreprise est-elle déficitaire ?

- Dresser le tableau de variations de B .

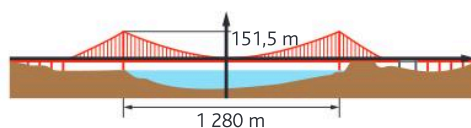
En déduire le nombre de casquettes à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

Le Golden Gate **ST12D**

» Modéliser



Le Golden Gate est un pont suspendu qui relie la baie de San Francisco à l'océan Pacifique. La distance qui sépare les deux supports principaux du pont est de 1 280 m, ses piliers font 151,5 m de hauteur au-dessus du niveau de la route, comme symbolisé sur le schéma ci-dessus. Le câble principal est modélisé par une parabole \mathcal{P} , passant par le milieu du tablier du pont. On choisit un repère orthonormé dont l'origine O est le milieu du tablier, avec 1 m pour unité. Le tablier est supposé horizontal.



- Déterminer, à l'aide des données et du schéma les coordonnées de trois points qui appartiennent à la parabole \mathcal{P} .
- Déterminer l'expression de P , fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique est \mathcal{P} . Si besoin, les coefficients seront arrondis à 10^{-5} près.

Les polynômes à la rescousse de la bronchiolite **ST2S** **Calculatrice**

» Chercher • Raisonner

Une épidémie de bronchiolite se diffuse dans une crèche. La fonction E définie sur $[0; 30]$ par :

$E(j) = -0,01j^3 + 0,3j^2$ modélise le nombre d'enfants malades en fonction du nombre j de jours écoulés.

- Combien la crèche compte-t-elle d'enfants malades le 4^e jour ? le 8^e jour ?

- Calculer le taux d'évolution, en pourcentage, d'enfants malades entre le 4^e et le 8^e jour.

Peut-on dire que ce taux d'évolution correspond à une augmentation de 150 % ?

- Représenter E sur l'écran de la calculatrice et en déduire le tableau des variations de E .

Au bout de combien de jours le nombre d'enfant malades semble-t-il être maximal ? Quel est alors le nombre d'enfants malades ?

- Factoriser E et en déduire le nombre de jours nécessaire pour qu'il n'y ait plus d'enfants malades.

« SOS amitié » **STMG** Tableau

» Représenter • Modéliser

Le centre « SOS amitié » a relevé le nombre d'appels de détresse reçus chaque mois en 2023, afin de savoir quelle politique d'accompagnement mettre en place à l'avenir.

Mois	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Nombre d'appels	3 000	3 002	3 004	3 006	3 008	3 012	3 016	3 020	3 a	3 028	3 032	3 036

a. Ouvrir un tableur et reporter le tableau précédent en mettant les numéros des mois dans la colonne A et le nombre d'appels dans la colonne B.

Insérer un graphique sous la forme d'un nuage de points où les numéros des mois seront notés en abscisse et le nombre d'appels en ordonnée.

b. Sélectionner le nuage de points et insérer une courbe de tendance polynomiale de degré 2, en affichant l'équation sur le graphique. Donner l'expression de la fonction P_2 ainsi obtenue.

En utilisant cette estimation, donner le nombre prévisible d'appels en mai 2024 puis en décembre 2024.

c. Sélectionner le nuage de points et insérer une courbe de tendance polynomiale de degré 3, en affichant l'équation sur le graphique. Donner l'expression de la fonction P_3 ainsi obtenue.

En utilisant cette estimation, donner le nombre prévisible d'appels en mai 2024 puis en décembre 2024.

d. En observant le graphique quel est l'ajustement qui semble le plus adapté ?

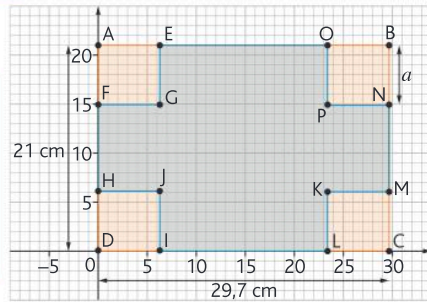
e. En mai 2024 il y a eu 3 055 appels. Quel est le meilleur des deux ajustements ?

La plus grande boîte **STI2D** Logiciel de géométrie Python

» Chercher • Communiquer • Modéliser

On veut construire une boîte ayant le plus grand volume possible à partir d'une feuille de format A4 (soit 21 cm sur 29,7 cm).

Pour ce faire, on réalise un patron comme ci-contre. On enlève des carrés de mêmes dimensions de côté a à chaque coin de la feuille.



```
def V(a):
    return .....
```

PARTIE A

- Sur quel intervalle varie a ?
- À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter la situation en créant un curseur a dont les bornes seront celles trouvées au a., représentant la longueur de la partie à enlever. D sera positionné à l'origine du repère.

La boîte aura pour base le rectangle GPKJ et pour hauteur a . Nommer \mathcal{P} l'aire du rectangle GPKJ, dans l'affichage choisir graphique 2 et faire afficher le point S donnant le volume de la boîte en fonction de a . Faire afficher la courbe donnant le volume de la boîte en fonction de a , pour cela, utiliser la commande « Lieu ».

c. Faire varier le curseur afin de déterminer la valeur de a rendant le volume de la boîte maximale. Quel est ce volume maximal ?

PARTIE B

- Déterminer l'expression de $V(a)$, le volume de la boîte en fonction de a . Ouvrir un éditeur Python et compléter l'expression de la fonction $V(a)$.
- La liste L est définie par $L=\text{range}(1, 11)$. Que contient la liste L ?

Saisir dans l'éditeur : `for i in L : print(i, V(i))`.

À quoi correspond l'affichage obtenu ? En déduire la valeur approchée de a , à l'unité, qui rend le volume de la boîte maximal.

c. Reprendre la question précédente en utilisant la liste $L=[4.01, 4.02, 4.03, 4.04, 4.05, 4.06]$. En déduire une valeur approchée de a , au centième, qui rend le volume de la boîte maximal.

d. En s'inspirant de la question c., déterminer une valeur approchée de a au millièmme qui rend le volume de la boîte maximale.

Pour entrer dans le chapitre

5

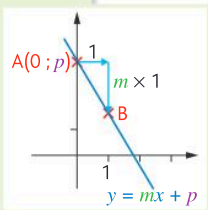
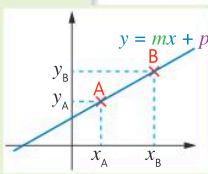
Représenter graphiquement une droite grâce à son équation réduite

L'équation réduite d'une droite est :

- $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$, si la droite est verticale ;
- $y = mx + p$ où $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$, si la droite n'est pas verticale. m est le coefficient directeur, p est l'ordonnée à l'origine.

Tracer la représentation graphique d'une droite non verticale quand on connaît son équation réduite :

- **Méthode 1** : on détermine les coordonnées de deux points appartenant à la droite en choisissant deux abscisses et en calculant leurs ordonnées respectives grâce à l'équation réduite de la droite. Puis on trace la droite passant par ces deux points.
- **Méthode 2** : on place d'abord l'ordonnée à l'origine $A(0; p)$, puis on utilise le coefficient directeur pour placer un second point. Pour cela, on avance de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses et on se déplace de m unités parallèlement à l'axe des ordonnées (vers le haut si $m > 0$ et vers le bas si $m < 0$).



- 1 Tracer la droite d'équation $y = 2x - 1$ avec la méthode 1.
- 2 Tracer la droite d'équation $y = -3x + 8$ avec la méthode 2.

Déterminer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points

On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La droite passant par A et B a pour coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. **Si le coefficient directeur est positif la droite est croissante, s'il est négatif la droite est décroissante.**

- 3 Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(2; 3)$ et $(-4; 5)$.
- 4 La droite passant par les points de coordonnées $(1; -4)$ et $(-3; 6)$ est-elle croissante ou décroissante ?

Dresser le tableau de signes d'une fonction affine

Signe d'une fonction affine : $f(x) = mx + p$

		Si $m > 0$		
x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$	
Signe de $f(x)$		-	0	+

		Si $m < 0$		
x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$	
Signe de $f(x)$		+	0	-

- 5 Dresser le tableau de signes de la fonction $f(x) = 2x - 3$.

Dérivation

Automatismes du chapitre

C15 Déterminer le signe d'une expression du premier degré, d'une expression factorisée du second degré..... 17

D19 à D25 Fonctions et représentations 19 à 22



Focus métiers

Finance Comptabilité
Ingénierie Gestion
Biologie Mécanique

La dérivation permet d'analyser l'évolution d'un phénomène, d'optimiser des coûts en gestion ou encore de déterminer des vitesses et accélérations en ingénierie.



Découvrez le métier de contrôleur de gestion

hachette-clic.fr/25mfl014

ACTIVITÉ 1

1 Introduction au nombre dérivé

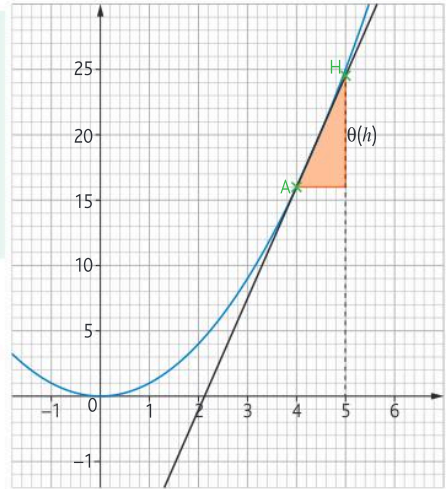
Calculatrice Logiciel de géométrie

Objectif Interpréter le nombre dérivé comme limite des coefficients directeurs des sécantes successives à une courbe

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative et on note A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse 4. Soit h un réel non nul. On appelle H le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $4 + h$.

On regarde les coefficients directeurs des droites (AH) quand h se rapproche de 0.

On note $\theta(h)$ le coefficient directeur de la droite (AH).



1 Compléter, le tableau ci-dessous :

h	-0,3	-0,1	-0,04	0,04	0,1	0,3
$\theta(h)$						

Quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, de quel point de la courbe représentative de f le point H semble-t-il se rapprocher ? De quelle valeur le coefficient $\theta(h)$ semble-t-il se rapprocher ?

2 Exprimer le coefficient directeur de la droite (AH), $\theta(h)$, en fonction de h (lorsque A et H sont distincts).

3 De quelle valeur $\theta(h)$ s'approche-t-il lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?

Rappel On dit alors que le nombre dérivé en 4 de la fonction f est 8.

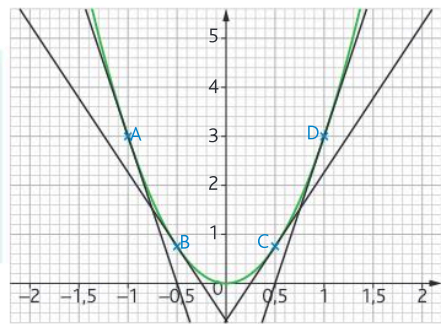
» Cours p. 126

ACTIVITÉ 2

2 Tangente et sens de variation : y aurait-il un lien ?

Objectif Établir un lien entre coefficient directeur et sens de variation

La représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2$ est représentée sur la figure ci-dessous. Cette même figure comporte une droite, notée T_A , tangente à la courbe au point A et trois autres droites tangentes T_B , T_C et T_D . Les réponses aux questions s'appuient sur des observations graphiques



1 Donner le signe du coefficient directeur de chacune de ces quatre droites.

2 Soit E un point quelconque de la parabole d'abscisse strictement positive. Donner le signe du coefficient directeur de la droite, notée T_E , tangente à la courbe au point E.

3 Même question avec un point F quelconque de la parabole d'abscisse strictement négative.

4 À l'aide des résultats des questions précédentes conjecturer un lien entre le sens de variation de la fonction et le signe du coefficient directeur de la tangente.

» Cours p. 130

Challenge entrepreneurial : lancer une gamme de compost bio !

Logiciel de géométrie

En
équipe

Objectif Étudier une fonction dans un contexte donné

Vous êtes un groupe de jeunes entrepreneurs qui décide de lancer une gamme de compost bio pour jardins.

Le coût total journalier de production pour x sacs de compost est donné sur $I = [1 ; 45]$ par la fonction :

$$C(x) = 0,5x^2 + 2x + 200,$$

où $C(x)$ est exprimé en euros.

Le prix de vente d'un sac est fixé à 23 euros.

Votre objectif est d'optimiser votre production pour maximiser vos bénéfices journaliers. Pour cela, vous vous séparez en 3 équipes : **Production**, **Vente**, et **Finance**.



Équipe Production

- 1 Quelle est l'allure de la fonction $C(x)$ (croissante, décroissante, courbe) ? Pourquoi ?
- 2 Identifiez les coûts pour différentes valeurs de x (exemple : $x = 10$ ou $x = 20$ ou $x = 30$) et tracez un graphique approximatif de $C(x)$.

Équipe Vente

- 1 Montrez que la recette $R(x)$ est donnée par : $R(x) = 23x$.
- 2 Calculez la recette pour différentes valeurs de x (exemple : $x = 10$ ou $x = 20$ ou $x = 30$) et tracez un graphique de $R(x)$.

- 3 Expliquez pourquoi $R(x)$ est une droite et interprétez sa pente dans le contexte.

Équipe Finance

- 1 Exprimez le bénéfice $B(x)$ en fonction de x , en utilisant : $B(x) = R(x) - C(x)$.
- 2 Montrez que $B'(x) = -x + 21$.
- 3 Trouvez la valeur de x pour laquelle $B'(x) = 0$. Déduisez-en la quantité optimale à produire.
- 4 Complétez un tableau de variation de $B(x)$ et présentez le bénéfice maximal.

Phase finale : Débrief en entreprise

Présentation : Chaque équipe présente ses conclusions.

Discussion inter-équipes : Débattez pour répondre aux questions :

- Que se passe-t-il si la demande dépasse la capacité de production ?
- Comment pourriez-vous améliorer encore vos bénéfices ?

» Cours p. 130

Taux d'accroissement et tangente

Définition

Soient une fonction f définie sur un intervalle I et deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.

Soient A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b .

Le **taux d'accroissement** de f entre a et b , ou **coefficient directeur** de la droite (AB), est égal à : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x$, le taux d'accroissement de f entre 4 et 6 est donné par :

$$\frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{3 \times 6 - 3 \times 4}{6 - 4} = \frac{18 - 12}{2} = 3.$$

Cela signifie que la droite passant par les points d'abscisses 4 et 6 a pour coefficient directeur 3.

Remarque

Pour une fonction affine ($f(x) = mx + p$), le **taux d'accroissement** entre les points A et B, respectivement d'abscisses a et b , est toujours égal à m , le coefficient directeur de la droite, quelles que soient les valeurs de a et b .

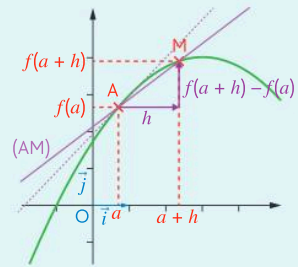
Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit un réel a appartenant à I , et h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I .

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel quand h tend vers 0.

Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en a** . On le note $f'(a)$ et on écrit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.



EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Le taux d'accroissement de f en 3 est égal à :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{h^2 + 6h}{h} = h + 6.$$

Or $h + 6$ tend vers 6 quand h tend vers 0, donc le nombre dérivé de f en 3 vaut $f'(3) = 6$.

Propriété

Le nombre dérivé de la fonction f en a est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe \mathcal{C} au point A d'abscisse a .

Tangente à une courbe

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en A est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

1 Calculer un nombre dérivé avec le taux d'accroissement

EXO

Soit la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 2$.
Calculer $f'(2)$.

Méthode

- 1 On commence par calculer $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$.
- 2 On fait tendre h vers 0 et on regarde si le résultat obtenu précédemment tend vers un unique nombre réel. Si oui, on dit que f est dérivable en $x = 2$ et on donne la valeur de $f'(2)$.

Réponse

- 1
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 2 - (2^2 + 3 \times 2 - 2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 2 - 8}{h} = h + 7$$
- 2 Donc : $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 7$ qui s'approche du réel 7 quand h tend vers 0.
On en déduit que f est dérivable en $x = 2$ et que le nombre dérivé de f en 2 vaut 7.

» Exercice 15 p. 135

2 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

EXO

On considère la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 2$ et représentée ci-contre avec sa tangente au point A d'abscisse 2.
Déterminer graphiquement $f'(2)$.

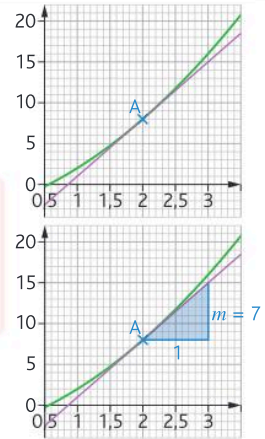
Méthode

Déterminer $f'(2)$ revient à déterminer graphiquement le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2. Pour cela, on part du point A, on se déplace d'une unité parallèlement à l'axe des abscisses, puis on compte le nombre d'unités de l'axe des ordonnées qu'il faut « monter » pour rejoindre la tangente.

Réponse

Ici $f'(2) = 7$.

» Exercices 16, 17, 18 p. 135



3 Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

EXO

On considère la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 2$. Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

Méthode

- 1 On calcule $f(2)$ puis $f'(2)$ en reprenant les exercices 1 et 2.
- 2 On applique la formule du cours pour l'équation de la tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Réponse

- 1 D'après les exercices résolus 1 et 2, on a trouvé, par le calcul ou par lecture graphique, la valeur $f'(2) = 7$. Et $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 2 = 8$.
- 2 Donc l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est de la forme : $y = 7(x - 2) + f(2)$, soit : $y = 7(x - 2) + 8$ donc $y = 7x - 6$.

» Exercices 16, 17 p. 135

Dérivées de fonctions usuelles

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel x de I .

Dans ce cas, la fonction qui, à tout réel x de I , associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

Formules de dérivation
de fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx, m \in \mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération
sur les fonctions dérivées :

$(f + g)' = f' + g'$
$(kf)' = kf', k \in \mathbb{R}$

➔ EXEMPLE

Si $f(x) = 3x + 7$ alors $f'(x) = 3$.

Fonction dérivée d'une fonction polynôme

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La fonction dérivée de f , notée f' , est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f'(x) = a \times (2x) + b$.

➔ EXEMPLE

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Alors, $f'(x) = 3 \times 2x - 5 = 6x - 5$.

Propriété

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La fonction dérivée de f , notée f' , est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f'(x) = a \times (3x^2) + b \times (2x) + c$.

➔ EXEMPLE

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 9$.

Alors, $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 3 = 6x^2 - 14x + 3$.

4 Déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3

EXO

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = 4x^2 - 9x + 4$
- b. $f(x) = x^2 + 3x - 5$
- c. $f(x) = -4x^2 - 9x - 8$
- d. $f(x) = x^3 + x^2 + 4$
- e. $f(x) = 7x^3 + 2x - 6$
- f. $f(x) = -x^3 - x$

Méthode

On applique les formules du tableau des dérivées.



Réponse

- a. $f(x) = 4x^2 - 9x + 4$ donc $f'(x) = 4 \times 2x - 9 = 8x - 9$
- b. $f(x) = x^2 + 3x - 5$ donc $f'(x) = 2x + 3$
- c. $f(x) = -4x^2 - 9x - 8$ donc $f'(x) = -4 \times 2x - 9 = -8x - 9$
- d. $f(x) = x^3 + x^2 + 4$ donc $f'(x) = 3x^2 + 2x$
- e. $f(x) = 7x^3 + 2x - 6$ donc $f'(x) = 7 \times 3x^2 + 2 = 21x^2 + 2$
- f. $f(x) = -x^3 - x$ donc $f'(x) = -1 \times 3x^2 - 1 = -3x^2 - 1$

» Exercices 35 à 38 p. 137

5 Utiliser une fonction dérivée dans le contexte d'une vitesse instantanée

EXO

Un véhicule roule en ligne droite. La distance (exprimée en mètres) parcourue par ce véhicule en fonction du temps t (exprimé en secondes) est donnée par la fonction : $d(t) = 3t^2 + 2t$.

Calculez la vitesse exacte du véhicule au bout de 3 secondes.

Méthode

- 1 La vitesse instantanée est donnée par la dérivée de la fonction distance. Il faut donc calculer la dérivée de $d(t) = 3t^2 + 2t$ grâce aux formules du cours.
- 2 On remplace t par 3 dans la formule de la fonction $d'(t)$ trouvée et on interprète le résultat dans le contexte.



Réponse

- 1 $d(t) = 3t^2 + 2t$ donc $d'(t) = 3 \times 2t + 2 = 6t + 2$.
- 2 $d'(3) = 6 \times 3 + 2 = 20$. La vitesse instantanée du véhicule au bout de 3 secondes est de 20 m/s.

» Exercice 46 p. 138

Sens de variation et extrema d'une fonction grâce à la dérivée

Propriété

- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I .
- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I .
- Si la dérivée f' s'annule en un réel x_0 en changeant de signe, alors la fonction f admet un **extremum** en x_0 .

Remarque

La dérivée permet de calculer les variations d'une fonction **quel que soit le cas** (même quand sa forme n'est pas simple ou évidente).

➔ EXEMPLE

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4x^2 + 16x + 7$.

a. Calculer la fonction dérivée de f .

➤ On a : $f'(x) = -4 \times 2x + 16 = -8x + 16$.

b. Déterminer le signe de f' en fonction de x puis dresser le tableau de variations de f .

➤ On résout d'abord l'équation $f'(x) = 0$, afin de savoir pour quelle valeur la dérivée s'annule.

Soit : $-8x + 16 = 0$

Donc $-8x = -16$ et $x = \frac{-16}{-8} = 2$.

On dresse ensuite le tableau de signes de f' puis de variations de f en appliquant la propriété ci-dessus :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Variations de f			

On calcule l'**extremum** de la fonction, qui est la valeur pour laquelle la dérivée s'annule.

Ici, $f(2) = -4 \times 2^2 + 16 \times 2 + 7 = 23$

La fonction f admet un maximum égal à 23 en $x = 2$.

Remarque

Un peu de latin !

«Extremum» vient du latin (on dit «extrema» au pluriel) et signifie «extrême». Il correspond aux valeurs extrêmes de la fonction : le minimum et le maximum.

6

Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

EXO

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 10$.

- Calculer la fonction dérivée de f .
- Démontrer que $f'(x) = 6(x+4)(x-1)$.
- Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- Dresser le tableau de variations de f .

Méthode

- 1 On calcule la dérivée de la fonction.
- 2 On vérifie que l'expression est bien égale à celle donnée dans l'énoncé (souvent on doit développer l'expression donnée dans l'énoncé).
- 3 On dresse le tableau de signes de la fonction dérivée.
- 4 On dresse en dessous celui des variations de la fonction.
- 5 On calcule les extrema de la fonction (minimum et/ou maximum) en remplaçant les valeurs de x pour lesquelles la dérivée s'annule dans la fonction $f(x)$.



Réponse

- 1 $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 9 \times 2x - 24 = 6x^2 + 18x - 24$
- 2 On développe $6(x+4)(x-1) = 6(x^2 - x + 4x - 4) = 6x^2 + 18x - 24 = f'(x)$ donc $f'(x) = 6(x+4)(x-1)$.
- 3 On résout l'équation $f'(x) = 0$.

Il s'agit d'une équation produit nul donc : $x+4=0$ ou $x-1=0$.

La dérivée s'annule donc en -4 et 1 .

On dresse le tableau de signes de la dérivée grâce au chapitre sur les polynômes de degré 2. On identifie le a de $a(x-x_1)(x-x_2)$. Ici $a=6$ donc $a>0$. La fonction est donc positive à l'extérieur des racines et négative entre les deux racines. Voir p. 100.

- 4 On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f		↗ 122	↘ -3	↗	

- 5 En effet :

- $f(-4) = 2(-4)^3 + 9 \times (-4)^2 - 24 \times (-4) + 10 = 122$
- $f(1) = 2 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 24 \times 1 + 10 = -3$

» Exercices 56 à 59 p. 139

Je retiens

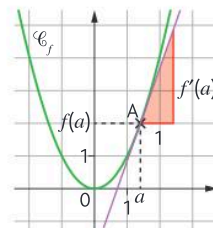
1. Nombre dérivé et tangente

Nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I . Soit h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartienne à I .
On dit que f est **dérivable** en a si le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un unique réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre limite est le **nombre dérivé** $f'(a)$.

Tangente

Soit \mathcal{C}_f la courbe d'une fonction f dérivable en a et A le point de coordonnées $a; f(a)$.
La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation est alors :



$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Savoir-faire

Pour déterminer graphiquement $f'(a)$:

- on part du point A ;
- on avance de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses ;
- on se déplace parallèlement à l'axe des ordonnées de m unités ($m = f'(a)$).

2. Fonction dérivée

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle I lorsque pour tout réel x de I , le nombre dérivé $f'(x)$ existe.

Formules de dérivation de fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx, m \in \mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(kf)' = kf', k \in \mathbb{R}$$

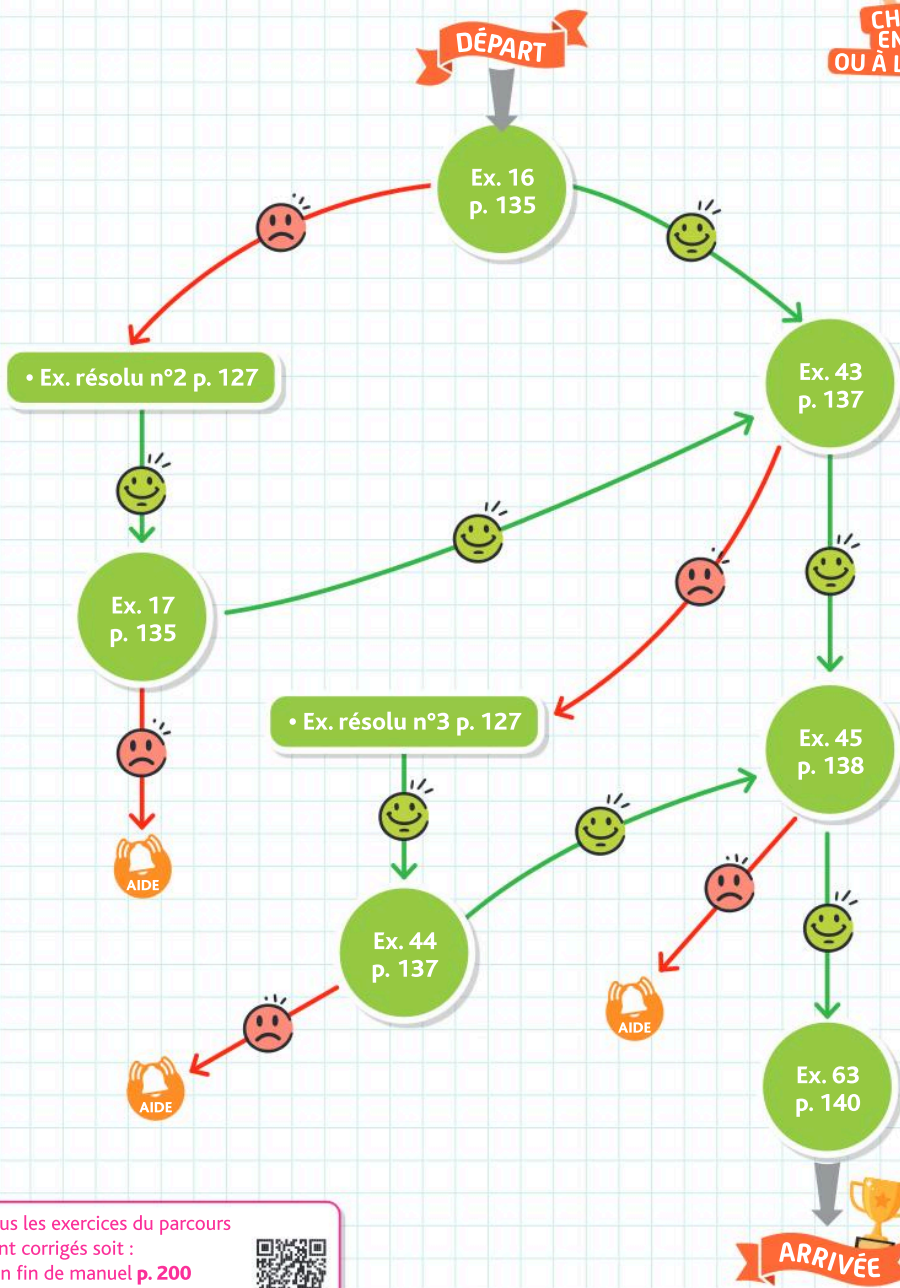
3. Sens de variation et extrema

- Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I .
- Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I .
- Si la dérivée f' s'annule en un réel x_0 en changeant de signe, alors la fonction f admet un **extremum** en x_0 .



Je me prépare à une évaluation

Je sais déterminer l'équation d'une tangente



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

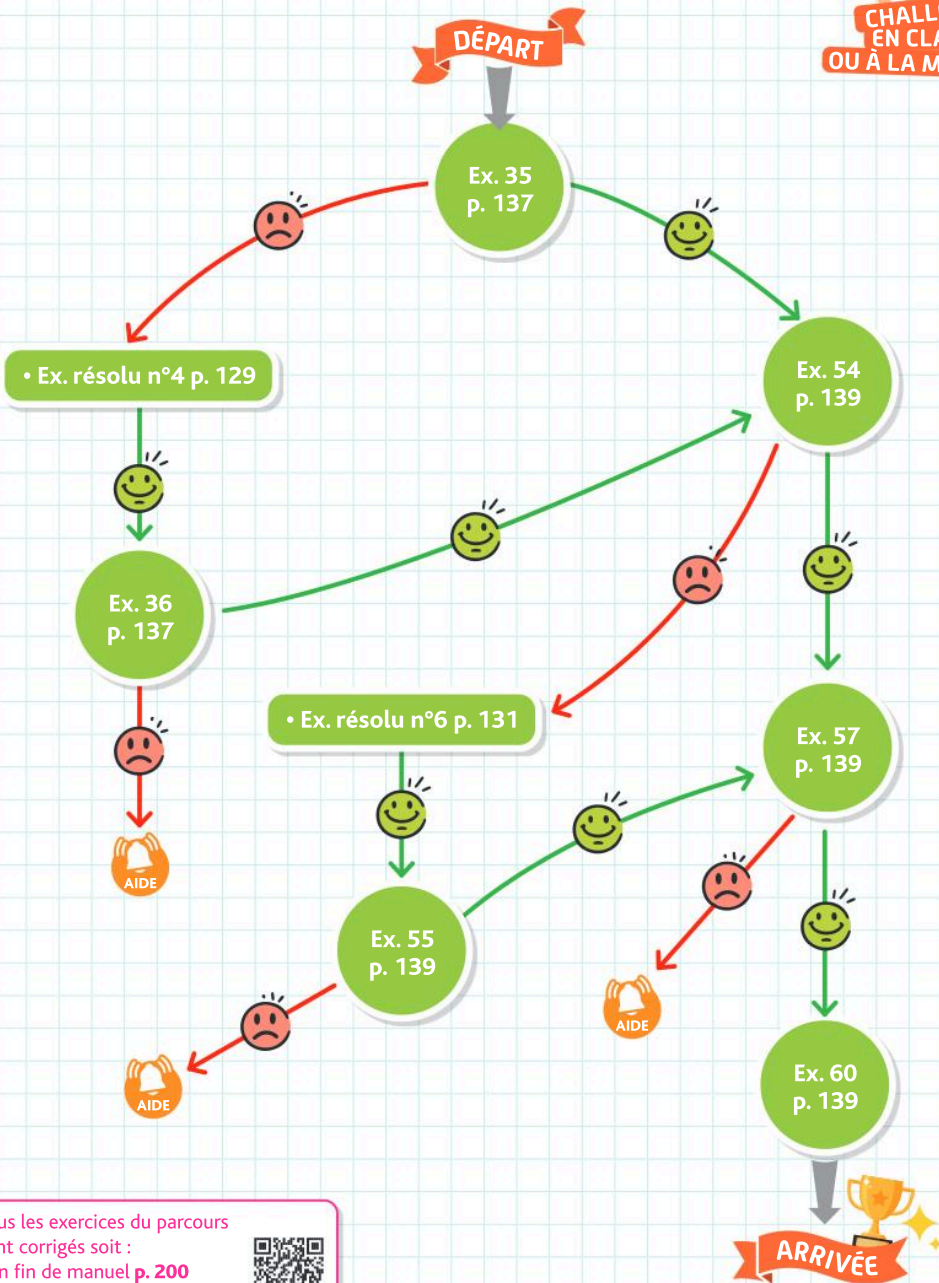
- en fin de manuel **p. 200**
- en **vidéo** avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl016

Je me prépare à une évaluation

Je sais étudier une fonction à l'aide de sa dérivée



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

- en fin de manuel **p. 200**
- en **vidéo** avec Médématiques



hachette-clic.fr/25mfl016



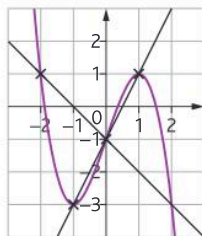
1 Nombre dérivé et tangente

Questions flash

- 1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x + 2$. Calculer $f(2)$.
- 2 Développer et réduire : $A = 2(x + 3) - x(x - 7)$.
- 3 Développer et réduire $B = (x + 7)^2 - 2x$.
- 4 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2$. Déterminer l'expression de $f(1 + h)$, avec h réel non nul.
- 5 Si $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = 2h + 7$ combien vaut $f'(3)$?
- 6 Si $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = h^2 - 6h - 1$ combien vaut $f'(2)$?
- 7 Si $\frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = 8$ combien vaut $f'(-1)$?
- 8 $f(x) = 3x$. De quelle nature est la fonction f ? En déduire $f'(1)$ sans aucun calcul.
- 9 Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = 7x + 4$.
- 10 Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = -3x + 2$.
- 11 Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = x - 8$.
- 12 Tracer dans un repère orthonormé la droite d'équation $y = -4x$.

Le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et b est égal à : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

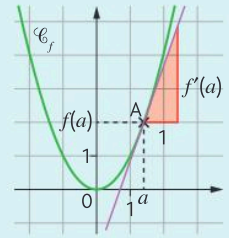
- 13 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 3$.
 - a. Déterminer le taux d'accroissement de f entre 0 et 3.
 - b. Déterminer le taux d'accroissement de f entre 1 et 5.



- 14 On a représenté ci-contre une fonction f . Déterminer graphiquement les taux de variation :
 - a. entre -2 et 0 .
 - b. entre -1 et 1 .

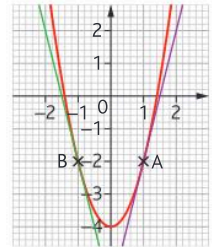
- 15 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit h un réel non nul.
 - a. Déterminer le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$.
 - b. Déterminer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$.

Le nombre dérivé, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

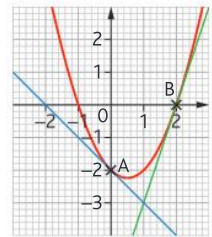


Pour 16 et 17 on a représenté la courbe d'une fonction f et deux de ses tangentes aux points A et B.

- Corrigé**
- Compléter :
- a. $f(-1) =$
et $f'(-1) =$
 - b. $f(1) =$
et $f'(1) =$

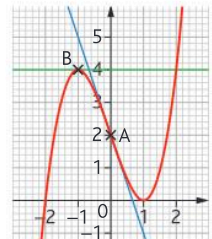


- Vidéo**
- Compléter :
- a. $f(0) =$
et $f'(0) =$
 - b. $f(2) =$
et $f'(2) =$



- 16 On a représenté la courbe d'une fonction f et deux de ses tangentes aux points A et B.

- Compléter :
- a. $f(0) =$
et $f'(0) =$
 - b. $f(-1) =$
et $f'(-1) =$



- 17 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x + 1$.
 - a. Donner l'expression du taux de variation de f entre -3 et $-3 + h$.
 - b. Que devient ce taux lorsque h tend vers 0 ?
 - c. En déduire la valeur de $f'(-3)$.

- 18 On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2x^2 + 1$.
 - a. Donner l'expression du taux de variation de f entre 1 et $1 + h$.
 - b. Que devient ce taux quand h tend vers 0 ?
 - c. En déduire la valeur de $g'(1)$.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématicques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl016

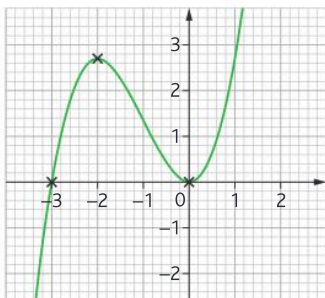


La **tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point A est la droite passant par A et de **coefficient directeur** le nombre dérivé $f'(a)$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous.

On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(0) = 0$ et $f'(-1) = -2$.

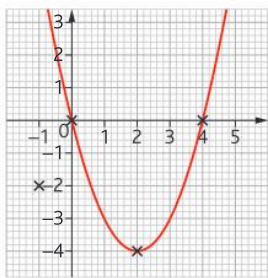
Reproduire le graphique et construire les tangentes à \mathcal{C} aux points d'abscisse -1 et 0 .



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous.

On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(2) = 0$ et $f'(0) = -4$.

Reproduire le graphique et tracer les tangentes à \mathcal{C} aux points d'abscisse -1 et 0 .



On considère une fonction f définie sur $[-3; 3]$. En utilisant les données du tableau, tracer dans un repère orthonormé une allure possible pour la courbe représentative de f .

x	-3	-1	1	2	3
$f(x)$	0	2	0	-2	-1
$f'(x)$	1	0	-2	0	1

Calculatrice On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x-1)(x-3)$.

On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et que : $f'(1) = 2$ et $f'(3) = -2$.

a. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, construire une représentation graphique de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.

b. Construire les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses 1 et 3.

Une **équation de la tangente** à la courbe représentative de la fonction f passant par le point A d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

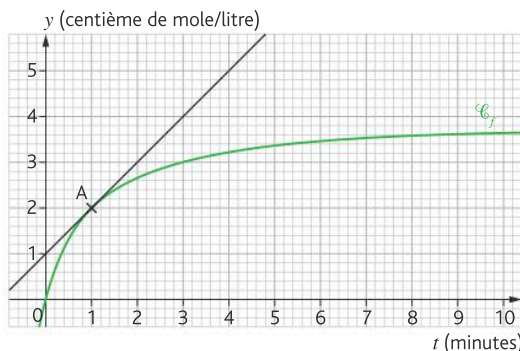
Soit f la fonction telle que $f(3) = 2$ et $f'(3) = -1$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

Soit f la fonction telle que $f(5) = -2$ et $f'(5) = 1$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 5.

Soit f la fonction telle que $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 .

L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse -2 est $y = 4x + 3$. En déduire $f'(-2)$ et $f(-2)$.

Lors d'une mesure de la dureté de l'eau, l'attaque du magnésium par une solution d'acide chlorhydrique donne des ions magnésium Mg^{2+} . La courbe ci-dessous représente la concentration d'ions Mg^{2+} (exprimée en centième de mole par litre) en fonction du temps t (exprimé en minute).



On note f la fonction représentant cette concentration.

a. On appelle « vitesse de concentration » à l'instant t le nombre dérivé $f'(t)$, exprimé en centième de mole par minute.

Lire graphiquement une estimation de la vitesse de concentration à l'instant $t = 1$.

b. Trouver graphiquement une estimation de la vitesse de concentration à l'instant $t = 5$.

2 Fonction dérivée : calculs

Questions flash

30 Soit f la fonction définie par $f(x) = 5$.

Déterminer $f'(x)$.

31 Soit f la fonction définie par $f(x) = 6x$.

Déterminer $f'(x)$.

32 Soit f la fonction définie par $f(x) = -2$.

Déterminer $f'(x)$.

33 Soit f la fonction définie par $f(x) = -9x$.

Déterminer $f'(x)$.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors $f'(x) = 2ax + b$.

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

Alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Pour 34 à 38 déterminer la fonction dérivée des fonctions définies sur \mathbb{R} par leur expression.

- a. $f(x) = 3$
- b. $g(x) = 6x$
- c. $h(x) = -2x + 5$

Corrigé
a. $f(x) = x^2 + x + 7$
b. $g(x) = 2x^2 - 3x$

Vidéo
a. $p(t) = 3t^3 - 3t^2 + 3t$
b. $m(s) = -s^3 - s^2 + 5s - 10$

- a. $f(x) = \frac{1}{3}$
- b. $g(x) = \frac{1}{2}x$
- c. $h(x) = \frac{-1}{3}x^2$
- d. $i(x) = \frac{4}{5}x^3 - 7x^2 + \frac{1}{5}x$

- a. $r(t) = -3t^2 + 2t - 5$
- b. $s(q) = -0,05q^3 + 300q^2 + 5\,000q + 40$

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} après avoir développé leur expression.

- a. $f(x) = 3(x - 5)$
- b. $g(x) = 5x(x + 3)$
- c. $h(t) = (t + 3)^2$
- d. $i(t) = t(t - 2)(t + 3)$

Vrai ou faux ?

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -2x^2 - x + 2$$

- a. $f'(0) = -1$ Vrai Faux
- b. $f'(-1) = 5$ Vrai Faux

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 2x$$

- c. $f'(0) = 2$ Vrai Faux
- d. $f'(-1) = -1$ Vrai Faux

À l'aide d'un tableur, on a voulu automatiser le calcul de nombres dérivés pour une fonction f pour des valeurs de x dans l'intervalle $[0; 5]$.

	A	B
	x	f'(x)
2	0	
3	0,5	
4	1	
5	1,5	
6	2	
7	2,5	

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 5.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Quelle formule, parmi les 3 proposées ci-dessous, doit-on saisir dans la cellule B2 pour qu'en recopiant la cellule vers le bas on puisse automatiser le calcul des différents nombres dérivés ?

- a. =2*A2+2
- b. =2*A2-3
- c. =2*B2-3

Python On donne ci-dessous le script Python qui permet de définir une fonction g :

```
def g(x):
    return 2*x**3-x**2+4*x-1
```

a. En vous aidant du script ci-dessus, écrire celui permettant de définir la fonction dérivée g' .

b. On écrit dans la console : `>>> deriveeg(2)`

Quel résultat est alors renvoyé ? Comment peut-on l'interpréter ?

Une **équation de la tangente** à la courbe représentative de la fonction f passant par le point A d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Corrigé Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = 3x^2 - 2$.

- a. Déterminer $f'(x)$.
- b. Calculer $f(1)$ puis $f'(1)$.
- c. En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

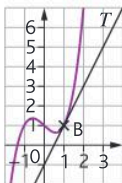
Corrigé Déterminer dans chacun des cas suivants une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a .

- a. $f(x) = x^2 + 2x$ et $a = 3$.
- b. $f(x) = -x^3 + x^2 - 5$ et $a = 2$.
- c. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 1$ et $a = -1$.

Exercices

Corrigé

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f et de sa tangente T au point d'abscisse 1.



- Déterminer, par lecture graphique, l'équation de la tangente T .
- La fonction f est en fait la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x + 1$. Retrouver l'équation de la tangente T par le calcul.

La **vitesse instantanée** est donnée par la dérivée de la fonction distance.

Une trottinette roule en ligne droite. La distance (exprimée en mètres) parcourue par cette trottinette en fonction du temps t (exprimé en heures) est donnée par la fonction $d(t) = 1,5t^2 + 10t + 1$.

- Exprimer la vitesse instantanée de la trottinette en fonction du temps en heures.
- Calculer la vitesse instantanée de la trottinette au bout de 5 secondes. On pensera à convertir 5 secondes en heures.

Une entreprise fabrique des ordinateurs. On note q la quantité d'ordinateurs produits et on admet que le coût de fabrication en milliers d'euros, de q unités est donné par :



$$C(q) = -\frac{q^2}{100000} + \frac{q}{10} + 1.$$

- Donner le coût de fabrication de 2 000 unités puis de 2 001 unités.
- En déduire le coût de fabrication de cet ordinateur supplémentaire.
- On appelle « coût marginal au rang q » la différence $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ qui représente donc le coût entraîné par la production d'un ordinateur supplémentaire lorsque q sont déjà fabriqués.

Calculer le taux d'accroissement :

$$C_m(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{(q+1) - q}$$

et vérifier que l'on retrouve bien la réponse de la question 2.

- En pratique on ne calcule pas le coût marginal comme ci-dessus mais on prend $C'(q)$ comme valeur approchée.

- Calculer $C'(q)$
- Quelle est l'erreur commise en assimilant $C_m(q)$ à $C'(q)$?
- Vérifier en calculant $C'(2000)$ que l'on retrouve le résultat de la question 2.

Les exercices roses sont corrigés :
• en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
p. 200 hachette-clic.fr/25mfl016



3 Sens de variation et extremum d'une fonction

Questions flash

- 48 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que le tableau de signes de sa dérivée est donné ci-dessous.

Dresser le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+

- 49 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que le tableau de signes de sa dérivée est donné ci-dessous.

Dresser le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-8	9	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-

- 50 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que :

- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 4[$
- $f'(4) = 0$
- $f'(x) > 0$ sur $]4; +\infty[$

Dresser le tableau de variation de f .

- 51 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que :

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -4[$
- $f'(-4) = 0$
- $f'(x) < 0$ sur $]-4; +\infty[$

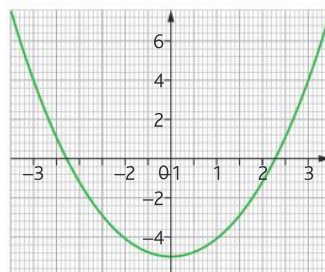
Dresser le tableau de variation de f .

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \geq 0$.

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I si et seulement si $f'(x) \leq 0$.

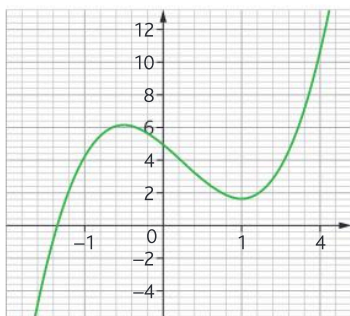
La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$.

En utilisant le graphique, recopier et compléter le tableau ci-dessous.



x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . En utilisant le graphique, recopier et compléter le tableau ci-dessous.



x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Corrigé Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 5.$$

- Déterminer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ puis recopier et compléter les deux premières lignes du tableau suivant.

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

c. En déduire le tableau de variations complet de f en complétant la troisième ligne du tableau.

Vidéo Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 5.$$

- Déterminer $f'(x)$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ puis recopier et compléter les deux premières lignes du tableau suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

c. En déduire le tableau de variations complet de f en complétant la troisième ligne du tableau.

d. Quel est le maximum de la fonction f ? En quelle valeur de x est-il atteint?

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4.$$

- Déterminer $f'(x)$.

b. Démontrer que pour tout x réel :

$$f'(x) = (x-2)(2x+3).$$

c. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

d. En déduire le tableau de variations complet de f .

Corrigé Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 42x + 1.$$

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Démontrer que pour tout x réel :

$$f'(x) = 2(x-3)(x+7).$$

c. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

d. En déduire le tableau de variations complet de f .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -4x^3 - 10x^2 + 8x - 2.$$

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Démontrer que pour tout x réel :

$$f'(x) = -4(3x-1)(x+2).$$

c. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

d. En déduire le tableau de variations complet de f .

On considère la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par

$$f(x) = x^3 + 5x^2.$$

a. Déterminer $f'(x)$.

b. Factoriser $f'(x)$.

c. Étudier le signe de $f'(x)$.

d. En déduire le tableau de variations complet de f .

Corrigé L'émission de dioxyde de carbone (gaz à effet de serre) par un véhicule est proportionnelle à la consommation de ce véhicule en carburant.



Les services techniques d'un constructeur automobile ont modélisé la consommation d'un véhicule essence en fonction de sa vitesse pour des vitesses comprises entre 20 et 150 km·h⁻¹.

Pour $x \in [20; 150]$, $f(x) = 0,001x^2 - 0,15x + 10,5$, où x désigne la vitesse en km·h⁻¹ et $f(x)$ est le nombre de litres d'essence consommés lorsque la voiture parcourt 100 km à la vitesse x (« litres au 100 »).

a. Pour $x \in [20; 150]$, déterminer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis recopier et compléter le tableau suivant.

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

c. À quelle vitesse l'émission de dioxyde de carbone sera-t-elle minimale pour ce véhicule?

Exercices

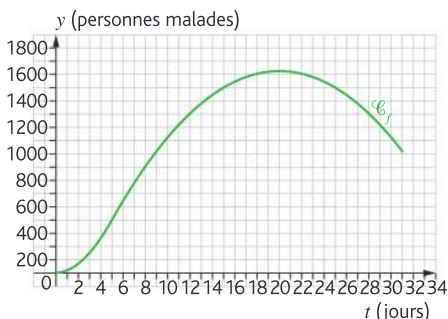
Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl016



d. La performance énergétique de ce véhicule quant aux émissions de dioxyde de carbone est-elle meilleure en milieu urbain ou sur autoroute ? Justifier brièvement.

On étudie la propagation d'une maladie dans une population sur un mois.

Après modélisation, un tracé de courbes permet d'obtenir la représentation graphique suivante.



Elle donne le nombre de personnes malades en fonction du nombre t de jours écoulés depuis le début de l'épidémie. À partir du 5^e jour depuis le début de l'épidémie, on modélise le nombre de personnes malades en fonction du nombre t de jours écoulés à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle $[5; 31]$ par :

$$f(t) = -5t^2 + 200t - 475.$$

- On appelle pic épidémique le rang du jour pour lequel le nombre de malades est maximal. Déterminer graphiquement ce pic.
- Déterminer $f'(t)$.
- En déduire le pic épidémique par le calcul. Justifier brièvement.
- On appelle vitesse de propagation de la maladie au bout de t jours le nombre dérivé $f'(t)$. La vitesse de propagation de cette maladie est-elle plus grande après 5 ou 6 jours ?

Un constructeur souhaite réaliser un toboggan pour enfants, qui se termine en pente douce. Il modélise le profil du toboggan à l'aide de la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,2; 0,38]$ par :

$$f(x) = -1,55x^3 - 0,66x^2 - 0,05x + 0,2.$$

Il se demande toutefois si de l'eau peut stagner sur le toboggan après un jour de pluie.

- Pour $x \in [-1,2; 0,38]$, déterminer $f'(x)$.
- Calculer $f'(-0,2)$.
- De l'eau peut-elle stagner sur ce toboggan ? Justifier brièvement à l'aide du calcul précédent.



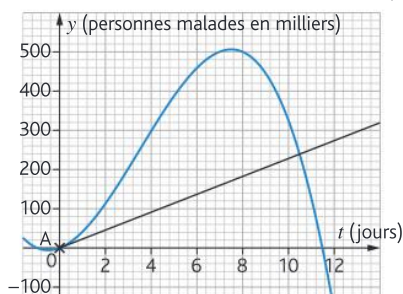
Corrigé Lors d'une épidémie observée sur une période de 11 jours, un institut de veille sanitaire a étudié l'évolution du nombre de personnes malades.

La durée, écoulée à partir du début de la période, est exprimée en jours. Elle est notée t .

On modélise le nombre de cas grâce à la fonction f , où $f(t)$ représente le nombre de personnes malades, en milliers, à l'instant t .

Soit f' la fonction dérivée de f . Le nombre $f'(t)$ représente la vitesse d'évolution de la maladie, t jours après l'apparition des premiers cas.

On donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 11]$. La droite T est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 et passe par le point A de coordonnées $(0; 0)$.



- Déterminer par lecture graphique $f'(0)$.
 - Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 - En déduire l'équation réduite de la tangente T .
- La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(t) = -2t^3 + 21t^2 + \frac{45}{2}t.$$

- Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0; 11]$.
- On admet que, pour tout t dans l'intervalle $[0; 11]$:

$$f'(t) = -6\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right).$$

Étudier le signe de $f'(t)$ en recopiant et complétant le tableau suivant.

t	
Signe de -6	
Signe de $t + \frac{1}{2}$	
Signe de $t - \frac{15}{2}$	
Signe de $f'(t)$	

- En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 11]$.
- Retrouver par le calcul l'équation réduite de la tangente T .

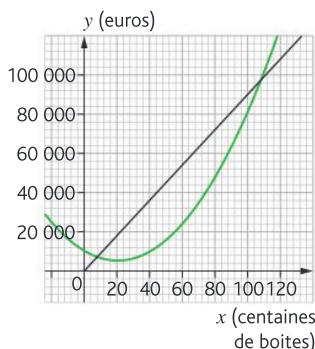
Une entreprise fabrique et vend des boîtes de macarons. La production mensuelle varie de 20 à 150 centaines de boîtes. Le chiffre d'affaires en euros, obtenu pour la vente de x centaines de boîtes de macarons est donné par la fonction R définie sur l'intervalle $[20 ; 150]$ par : $R(x) = 900x$.



Le coût total de production de x centaines de boîtes de macarons est donné en euros par la fonction C définie par : $C(x) = 12x^2 - 492x + 10368$.

On admet dans l'étude qui suit que chaque mois toute la production est vendue.

1. On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . L'une est la représentation graphique de R et l'autre celle de C mais on ne sait pas dans quel ordre.



a. Préciser quelle courbe représente la fonction R et quelle courbe représente la fonction C en justifiant brièvement.

b. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, dans quel intervalle doit se situer le nombre de centaines de boîtes vendues pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

c. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, pour quel nombre de centaines de boîtes le bénéfice vous semble maximal. Expliciter brièvement la démarche.

2. Le résultat de l'entreprise en euros, c'est-à-dire le bénéfice ou le déficit de l'entreprise selon que le résultat est positif ou négatif, est donné par la fonction D définie sur l'intervalle $[20 ; 150]$ par :

$$D(x) = -12x^2 + 1392x - 10368.$$

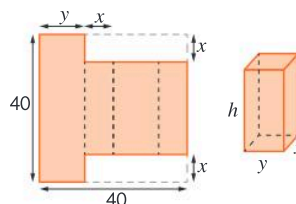
On note D' la fonction dérivée de la fonction D .

a. Calculer $D'(x)$.

b. Déterminer le signe de $D'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 150]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction D .

c. En déduire le nombre de boîtes que l'entreprise doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

Ainhoa veut fabriquer une boîte de dimensions x , y et h en découpant deux bandes de largeur x (en centimètres) dans une feuille carrée dont le côté mesure 40 cm ($0 < x < 20$).



On cherche à maximiser le volume de la boîte.

1. Montrer que $y = 20 - x$ et que

$$h = 40 - 2x.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $f(x) = 2x^3 - 80x^2 + 800x$.

a. Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 20]$, le volume de la boîte est donné par $f(x)$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Montrer que : $f'(x) = 2(3x - 20)(x - 20)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 20]$.

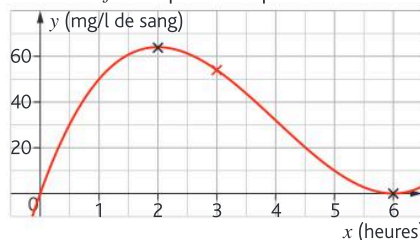
d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 20]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 20]$.

e. Pour quelle valeur de x le volume de la boîte d'Ainhoa est-il maximal ? Quel est ce volume maximal ?

Un médicament antidouleur est donné sous forme de comprimés à avaler. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heure (h), associe la concentration $f(x)$ en milligramme par litre de sang (mg/l).

A. Étude graphique

La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous :



1. Au bout de combien de temps la concentration du produit est-elle maximale ? Donner une estimation de cette concentration.

2. On admet que le produit actif est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure à 20 mg/l. D'après le graphique, au bout de combien de temps faudrait-il redonner un comprimé afin qu'il soit toujours efficace ?

B. Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl016



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

- Calculer $f'(x)$.
- Montrer que : $f'(x) = 6(x - 2)(x - 6)$.

2. a. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 6]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

3. L'affirmation « au bout de 5 heures, la concentration dans le sang du produit actif est inférieure à 20 % de sa valeur maximale » est-elle vraie ?

Un objet supposé soumis à son seul poids, est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale à déterminer. Son altitude z est donnée au bout de t secondes grâce aux lois de la physique par la fonction $z(t)$ (en mètres) exprimée par : $z(t) = -4,9t^2 + 20t + 15$.

- Quelle est son altitude à l'instant initial ?
- La vitesse instantanée du projectile à l'instant t est égale à $z'(t)$.

- Déterminer $z'(t)$.
- Quelle est la vitesse instantanée initiale du projectile ?
- Étudier le signe de $z'(t)$ sur l'intervalle $[0; 4]$ puis recopier et compléter le tableau suivant.

x	
Signe de $z'(x)$	
Variations de z	

d. Quelle est la hauteur maximale atteinte par ce projectile (arrondir au dixième de mètre près) ? À quel instant cette hauteur est-elle atteinte (arrondir au dixième de seconde près) ?

e. Quelle est la vitesse instantanée de l'objet lorsqu'il atteint sa hauteur maximale ? Pouvait-on prévoir ce résultat ? Justifier brièvement.

Une entreprise produit et vend des fraises. Elle a la possibilité de produire entre 0 et 23 tonnes.

Le coût de production de x tonnes de fraises est modélisé par la fonction :

$C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 156x - 1300$, où $C(x)$ est exprimé en euros.

Chaque tonne de fraises est vendue 300 euros.

a. Déterminer le chiffre d'affaires réalisé lors de la vente de 5 tonnes de fraises.



b. Si l'entreprise produit et vend 5 tonnes de carottes, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

c. Soit $R(x)$ le chiffre d'affaires pour x tonnes de fraises vendues, déterminer l'expression de $R(x)$.

d. En déduire que le bénéfice, noté $B(x)$, peut s'écrire : $B(x) = -2x^3 + 30x^2 + 144x + 1300$.

e. Calculer $B'(x)$.

f. Montrer que $B'(x) = -6(x + 2)(x - 12)$.

g. Construire le tableau de signes de $B'(x)$ et le tableau de variations de la fonction B .

h. Quelle quantité de fraises l'entreprise doit-elle produire et vendre afin que le bénéfice soit maximal ? Déterminer le bénéfice correspondant.

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par : $f(x) = -2x^3 + 54x^2 - 192x - 400$.

- Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f'(x) = -6(x - 2)(x - 16)$.
- Construire le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f .

B. Application

Une start-up spécialisée dans la fabrication de drones de livraison développe un nouveau modèle pour les services de livraison rapide.

Le coût de fabrication journalier de ces drones est modélisé par la fonction suivante :

- Les charges fixes sont de 400 euros ;
- Le coût de production de x drones est modélisé par la fonction : $g(x) = 2x^3 - 54x^2 + 500x$.

a. Déterminer le coût total de fabrication de x drones en euros.

b. Chaque drone est vendu 308 euros, calculer la recette totale, notée $R(x)$, d'une journée pour x drones fabriqués et vendus.

c. En déduire le bénéfice, noté $B(x)$, réalisé lors de la vente des x drones produits dans une journée.

d. En utilisant les résultats de la partie A, quel est le nombre de drones que l'entreprise doit produire dans une journée afin que le bénéfice soit maximal ?

Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par :

$f(t) = 120t^2 - 2t^3$, pour tout t appartenant à $[0; 60]$.

a. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 10 jours.

b. Montrer que, pour tout t appartenant à $[0; 60]$: $f'(t) = 6t(40 - t)$.

c. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0; 60]$.

d. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 60]$.

- e. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 60 jours et préciser combien de personnes sont malades ce jour-là.

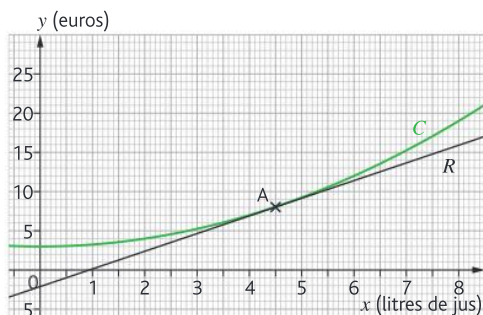
Calculatrice Une entreprise artisanale fabrique du jus de fruit, sa capacité est limitée à 8 litres par heure. On note $C(x)$ le coût total en euros pour fabriquer x litres de ce jus. On définit ainsi la fonction C sur $[0; 8]$.



On note R la fonction recette et on considère que le produit est vendu 3,5 euros le litre.

Partie A

On donne le tracé de la courbe représentant la fonction C .



Par lecture graphique répondre aux questions suivantes

1. Quel est le coût de fabrication de 3 litres de jus ?
2. Quel nombre de litres faut-il produire pour que le coût de fabrication soit de 15 euros ?
3. Combien vaut $C'(4,5)$? Arrondir au centième.

Partie B

On considère dans la suite de l'exercice que

$$C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3.$$

1. Déterminer le montant des coûts de production lorsque la production est nulle (ce coût est appelé « coûts fixes »).
2. Retrouver par le calcul le résultat de la question A.3.
3. Déterminer l'expression de la recette en fonction de x .
4. Déterminer l'expression du bénéfice en fonction de x .
5. On admet ici que $B(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3,5x - 3$.

- a. Calculer $B'(x)$.
- b. Étudier le signe de $B'(x)$.
- c. Dresser le tableau de variations de B sur $[0; 8]$.

- d. En déduire le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant le nombre de litres produits correspondants.

- e. Retrouver ce résultat grâce à votre calculatrice.

Calculatrice Julia souhaite jouer à Angry Birds® dans son jardin. Elle utilise un lance-pierre pour faire tomber des boîtes de conserve. Les boîtes se trouvent au sol à une distance de $L = 50$ m de Julia qui se trouve à une hauteur $h = 1,5$ m.

En l'absence de frottement les équations de Newton pour l'étude des mouvements s'écrivent :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + h \end{aligned}$$

Avec :

- $x(t)$ l'abscisse du projectile en fonction du temps ;
- $y(t)$ l'ordonnée du projectile en fonction du temps ;
- v_{0x} la composante horizontale de la vitesse initiale, ici $v_{0x} = 20$ m/s ;
- v_{0y} la composante verticale de la vitesse initiale ;
- g la constante de la gravitation, on prendra ici $g = 10$ m/s².

On souhaite connaître la valeur de la composante verticale de la vitesse v_{0y} avec laquelle Julia doit lancer son projectile pour atteindre les boîtes.

- a. Montrer que $x(t) = 20t$ et que $y(t) = -5t^2 + 2v_{0y}t + 1,5$.
- b. Calculer $x'(t)$.
- c. Montrer que $t = \frac{x}{20}$ et en déduire que l'expression de y en fonction de x s'écrit :

$$y(x) = -0,0125x^2 + \frac{v_{0y}}{20}x + 1,5.$$

- d. Que vaut $y(0)$?
 - e. La courbe représentative de la fonction y est une parabole, comment est-elle orientée ?
 - f. Faire un schéma représentant la situation
 - g. Calculer $y'(x)$.
 - h. Calculer $y'(0)$.
- On note $v_0 = y'(0)$.
- i. Montrer que $y(x) = -0,0125x^2 + v_0x + 1,5$.
 - j. Pour que la pierre atteigne les boîtes il faut que la parabole coupe l'axe des abscisses à $x = 50$. À l'aide de la calculatrice, on trouve que la pierre atteint les boîtes pour $v_0 = 0,595$ m/s. Que représente v_{0y} par rapport à la parabole au point $(0; 1,5)$? En déduire v_{0y} .

Optimiser sa production avec les dérivées **STMG**

» Calculer • Raisonner • Communiquer

Une entreprise peut produire jusqu'à 80 kg d'engrais par jour. Le coût total journalier de production en euros pour x kg est modélisé par la fonction CT définie sur l'intervalle $[0; 80]$ par :

$$CT(x) = x^2 + 4x + 400.$$

1. À combien s'élèvent les charges fixes dans ce coût total (on appelle charges fixes les charges que doit payer l'entreprise quel que soit le nombre de kilogrammes produits) ?

On appelle coût marginal au rang x le supplément de coût total de production engendré par la production d'un kilogramme supplémentaire lorsque x kilogrammes ont déjà été produits.

Si on note $C_m(x)$ ce coût marginal, on a alors :

$$C_m(x) = CT(x+1) - CT(x).$$

2. Calculer $C_m(30)$ et en donner une interprétation.

3. En économie, on approxime le coût marginal par la dérivée du coût total.

Ainsi, $C_m(x) \approx CT'(x)$ pour $x \in [0; 80]$.

a. Calculer $CT'(x)$ pour $x \in [0; 80]$.

b. Calculer $C_m(20)$ en utilisant cette approximation et comparer avec le résultat obtenu à la question 2.

4. Cette entreprise vend le kilogramme d'engrais à 46 €.

a. Déterminer la recette pour 25 kg vendus.

b. Exprimer la recette $R(x)$ pour x kg vendus.

5. Le bénéfice, en euros, B de l'entreprise pour x kilogrammes d'engrais produits et vendus correspond à la différence entre la recette et le coût.

Justifier que $B(x) = -x^2 + 42x - 400$.

6. a. Déterminer $B'(x)$.

b. Déterminer le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0; 80]$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction.

c. En déduire la quantité de kilogrammes d'engrais que l'entreprise doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

Accessibilité aux PMR **STI2D** **ST2S**

» Calculer • Raisonner • Modéliser

L'entrée d'une grande surface est limitée pour les personnes en fauteuil au roulant car présentant un escalier. On désire créer une rampe d'accès reliant le trottoir à l'entrée du magasin.

On écarte la solution la plus simple, schématisée ci-dessous, qui consisterait à relier les deux niveaux

par une rampe rectiligne ; en effet les raccordements aux extrémités sont jugés trop brutaux et donc trop dangereux.



Une société spécialisée dans l'accessibilité propose une solution de rampe plus douce dont le profil est donné par une fonction du troisième degré

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{16}x^2$$

définie sur $[0; 4]$.

a. Calculer $f'(x)$ puis montrer que

$$f'(x) = -\frac{3x}{32}(x-4).$$

b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0; 4]$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 4]$.

d. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f à l'origine et à l'abscisse 4. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'énoncé.

Trouver le pic de l'épidémie **ST2S** **STL**

» Calculer • Raisonner • Modéliser

Lors d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est donné par

$$f(t) = 45t^2 - t^3.$$

On cherche à trouver le jour où l'épidémie est à son pic.

1. On munit le plan d'un repère orthogonal ; pour le graphique on choisira 2 cm en abscisses pour 10 unités et 1 cm en ordonnées pour 1 000 unités.

Tracer la courbe représentative de la fonction f pour $t \in [0; 45]$; vous pourrez vous aider d'un tableau de valeurs.

2. À l'aide du graphique, déterminer le jour où l'épidémie semble atteindre son pic.

3. Montrer que $f'(t) = 3t(30-t)$.

4. Dresser le tableau de signes de la dérivée.

5. Dresser le tableau de variations de la fonction et déterminer, à l'aide du tableau de variations, le jour où l'épidémie atteindra son pic. Le résultat est-il cohérent avec la question 2 ?

6. Le nombre $f'(t)$ donne la vitesse de propagation de la maladie.

a. Estimer graphiquement la vitesse de propagation après 10 jours d'épidémie.

b. Estimer graphiquement le jour où cette vitesse de propagation semble maximale. Donner votre démarche.



Les fichiers **Tableur**
sont à télécharger ici :
hachette-clic.fr/25mf1017

Un magazine rentable ? **STMG** Calculatrice

» Calculer • Raisonner

Un magazine est vendu sous forme d'abonnement, x numéros sont proposés annuellement à la vente au prix unitaire de 7 euros. On suppose que tous les magazines imprimés sont vendus. On s'intéresse au bénéfice éventuellement réalisé.

Deux types de coûts sont pris en compte :

- les coûts de production, exprimés en euros, par : $C_1(x) = 0,001x^2 + 90500$.
- les coûts de distribution, exprimés en euros, par $C_2(x) = 0,5x$.

Les recettes viennent de la vente des magazines (7 euros l'unité) et de la publicité (85 000 euros).

a. À l'aide de votre calculatrice, recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de magazines	Coût de production	Coût de distribution	Coût total	Recette publicité	Recette de vente	Recette totale	Bénéfice
0	90 500						
200							
800							
1 000							
2 400							

b. L'impression et la vente de 800 exemplaires est-elle rentable ? Même question pour 2 400 exemplaires.

c. Montrer que la fonction

$B(x) = -0,001x^2 + 6,5x - 5500$ correspond au bénéfice exprimé en fonction du nombre x d'exemplaires produits et vendus.

d. Calculer $B'(x)$.

e. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$, puis le tableau de variations de B et en déduire son maximum.

f. À l'aide de la calculatrice, représenter la fonction B sur $[0 ; 6000]$ et conjecturer pour quelles valeurs de x l'entreprise semble rentable.

g. À l'aide du graphique précédent, déterminer, pour quelle valeur de x , B semble atteindre son maximum et quelle est la valeur du bénéfice correspondant.

La vitesse instantanée d'une moto **STI2D** **STL** **Tableur**

» Calculer • Raisonner

Une moto se rend, sur une route rectiligne d'une ville A à une ville B. À chaque instant t on peut associer la distance $AM = f(t)$ qui sépare la moto de son point de départ. La vitesse moyenne de la moto entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est donnée par la formule : $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$. La vitesse instantanée de la moto à l'instant t_0 est $f'(t_0)$. On considère la moto, pour laquelle $f(t) = 6,2t^2$.

1. Téléchargez la feuille de calcul sur :

hachette-clic.fr/25mf1017

a. Entrer en B4 la formule =6,2*A4^2 puis la recopier vers le bas.

b. Entrer en C5 la formule =B5-B4 puis la recopier vers le bas.

c. Représenter la distance parcourue en fonction du temps.

d. Quelle est la vitesse moyenne de la moto sur l'intervalle de temps $[1 ; 2]$ et $[3 ; 4]$?

2. Les compteurs des motos affichent une vitesse moyenne qui est proche de la vitesse instantanée.

a. Compléter la feuille de calcul dans la colonne E. Commencer avec $h = 1$ puis $h = 0,5$ et diviser par 2 chaque ligne suivante de la colonne E.

- Pour la cellule F5, on utilise la donnée $f(t) = 6,2t^2$ pour obtenir la formule =6,2*(F\$3+E5)^2 avec $t = 2$ et h donné par la valeur de la cellule E5.
- Pour la cellule G5 on obtient de même la formule =(F5-6,2*F\$3^2)/E5.
- La colonne G affiche les vitesses moyennes sur les intervalles $[t ; t + h]$.

b. Qu'observe-t-on pour les valeurs des cellules de la colonne G ?

c. Calculer $f'(2)$. Que peut-on en déduire ?

d. On considère l'instant $t = 3$. Changer la valeur de la cellule F3, calculer $f'(3)$. Que pouvez-vous en conclure ?

Pour entrer dans le chapitre

6

Calculer une proportion, une proportion de proportion

Soient A, E et F trois ensembles où A est une partie de E et E est une partie de F.



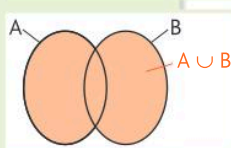
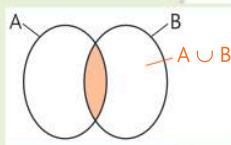
- On appelle cardinal de l'ensemble E, qu'on note $\text{Card}(E)$, le nombre d'éléments de E. De même, on note $\text{Card}(A)$ le nombre d'éléments de A.
- On appelle proportion de A dans E le quotient : $p = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$.
- Si p_1 est la proportion de A dans E et p_2 la proportion de E dans F, alors la proportion de A dans F est $p = p_1 \times p_2$.

- 1 Dans une classe de 32 élèves, 8 sont internes. Quelle est la proportion d'internes dans cette classe ?
- 2 Au CDI, 70 % des livres sont des romans et parmi eux 80 % sont en format poche. Quelle est la proportion de romans au format poche parmi les livres du CDI ?

Vocabulaire des ensembles

Si A et B sont deux ensembles :

- Leur **intersection**, notée $A \cap B$, est l'ensemble composé des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B.
- Leur **réunion**, notée $A \cup B$, est l'ensemble composé des éléments qui appartiennent à l'ensemble A, ou à l'ensemble B, ou aux deux en même temps.
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
- Si A est une partie de E alors le complémentaire de A dans E, noté \bar{A} , est l'ensemble composé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



- 3 On donne $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ et $B = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$. Donner la composition des ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.

- 4 À partir du tableau d'effectifs suivant, donner : $\text{Card}(A \cap B)$; $\text{Card}(A \cup B)$ et $\text{Card}(\bar{A})$.

	B	\bar{B}
A	15	10
\bar{A}	20	5

Notions de probabilités

- Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A (notée $P(A)$) se calcule en utilisant :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à A}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

- Probabilité de l'évènement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Probabilité d'une réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- 5 On lance un dé équilibré à 6 faces.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 ?

Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

Automatismes du chapitre

- B5** Calculer un taux d'évolution, l'exprimer en pourcentage 11
- B6** Interpréter un indice de base 100 ; calculer un indice ; calculer le taux d'évolution entre deux valeurs..... 11



Focus métiers

Assurance
Santé Marketing Finance
Informatique **Sport**

Les probabilités sont essentielles pour prévoir des événements et on les retrouve dans la météo, les paris et entraînements sportifs, la médecine, les assurances, la stratégie des entreprises, le contrôle qualité...



Découvre le métier de consultant en gestion d'entreprise

hachette-clic.fr/25mfl018

Activités de découverte

1 Enquête de voisinage

ACTIVITÉ

Objectif Établir et utiliser un tableau croisé d'effectifs

Le tableau ci-contre regroupe différentes informations sur les occupants principaux d'un petit immeuble.

1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec les effectifs correspondants :

	Moins de 60 m ²	Entre 60 m ² et 70 m ²	Plus de 70 m ²
Propriétaires			
Locataires			

2 a. Quelle est la population étudiée ?
b. Quels sont les caractères « croisés » dans ce tableau ?

3 a. Compléter le tableau en ajoutant et en complétant une ligne et une colonne « total » comme ci-dessous.

À noter Les effectifs figurant dans ces nouvelles cases sont appelés **effectifs marginaux**.

	Moins de 60 m ²	Entre 60 m ² et 70 m ²	Plus de 70 m ²	Total
Propriétaires				
Locataires				
Total				

» Cours p. 150

Appartement n°	Superficie (en m ²)	Statut d'occupation	Âge de l'occupant principal
1	62	Propriétaire	52
2	61	Locataire	39
3	53	Locataire	64
4	55	Locataire	47
5	46	Locataire	23
6	46	Propriétaire	35
11	71	Locataire	29
12	54	Propriétaire	32
13	57	Propriétaire	40
14	45	Locataire	44
15	46	Locataire	32
16	46	Propriétaire	33
21	78	Propriétaire	48
22	76	Locataire	52
23	75	Propriétaire	65
24	72	Propriétaire	82

b. Donner le nombre total d'appartements de plus de 70 m² ? Quelle proportion cela représente-t-il ?

c. Quelle est la proportion de propriétaires qui occupent un appartement de moins de 60 m² dans cet immeuble ?

d. Quelle est la proportion de locataires dans cet immeuble parmi ceux qui occupent un appartement de plus de 70 m² ?

2 Compétition de natation

ACTIVITÉ

Objectif Calculer des fréquences

Une étude donne la répartition des des différentes médailles parmi les 7 meilleurs pays ayant participé à une compétition internationale de natation. On s'intéresse à la population des 81 médailles remportées par ce Top 7.

On considère les sous-ensembles :

- O, A, et B pour les médailles d'Or, d'Argent et de Bronze.
- E pour les médailles remportées par des pays de l'Union européenne (France, Hongrie, Italie).
- N pour celles gagnées par les pays d'Amérique du Nord.

Ainsi, par exemple, l'ensemble $E \cap B$ est constitué des médailles de Bronze obtenues par les pays de l'Union européenne. On note $\text{Card}(E \cap B)$ le nombre de médailles de l'ensemble $E \cap B$.

On arrondira si nécessaire les résultats au millième.

NATATION				
Équipe	O	A	B	
USA	8	13	7	28
Australie	7	8	3	18
France	4	1	2	7
Canada	3	2	3	8
Chine	2	3	7	12
Italie	2	1	2	5
Hongrie	2	1	0	3

1 Déterminer $\text{Card}(B)$, puis en déduire la proportion (ou fréquence) des médailles de Bronze dans ce top 7. On la note $f(B)$.

2 a. Déterminer $\text{Card}(E \cap O)$ et en déduire la fréquence des médailles d'or gagnées par les pays de l'Union européenne dans ce top 7. On la note $f(E \cap O)$.

b. Calculer de même $f(N \cap O)$.

c. Quelle comparaison peut-on établir à partir des deux résultats précédents ?

3 On s'intéresse maintenant uniquement aux médailles obtenues par les pays de l'Union

» Cours p. 150

européenne. Ici, notre ensemble de référence a donc changé.

a. Déterminer $\text{Card}(E)$.

b. Calculer la proportion des médailles d'or dans l'ensemble E.

À noter On le note $f_E(O)$ et on l'appelle **fréquence conditionnelle de O parmi E**.

4 a. Calculer à présent la fréquence conditionnelle de O parmi N.

b. Quelle comparaison peut-on établir à partir de ces deux derniers résultats ?

3 Conduite accompagnée ou non

ACTIVITÉ

Objectif Découvrir la notion de probabilité conditionnelle

Un futur conducteur peut choisir d'apprendre à conduire dès l'âge de 15 ans grâce à la conduite accompagnée. Une auto-école a réalisé une étude sur l'ensemble de ses 432 clients ayant passé pour la première fois l'épreuve pratique du permis de conduire au cours de l'année.

Les résultats sont présentés dans le tableau croisé d'effectifs suivant :



	Ayant suivi la conduite accompagnée	N'ayant pas suivi la conduite accompagnée	Total
Ayant réussi à la première présentation	60	172	232
N'ayant pas réussi à la première présentation	21	179	200
Total	81	351	432

On choisit au hasard un candidat dans cette population. On note :

- A l'évènement « le candidat a suivi la conduite accompagnée »
- R l'évènement « le candidat réussit l'épreuve pratique à la première présentation »

On arrondira les résultats à 0,001 près si nécessaire.

1 Calculer $P(A)$ et $P(R)$. Interpréter ces résultats par une phrase.

2 On choisit au hasard un candidat ayant suivi la conduite accompagnée, quelle est la probabilité qu'il ait réussi son épreuve à la première tentative ?

À noter Dans cette question, on choisit un candidat uniquement parmi ceux ayant suivi la conduite accompagnée. On sait donc que l'évènement A est réalisé pour ces candidats. La probabilité calculée ici s'appelle la probabilité de R sachant que A est réalisé, et on la note : $P_A(R)$. On appelle ce type de probabilité une **probabilité conditionnelle**.

3 Calculer la probabilité de R sachant que A n'est pas réalisé.

4 Que peut-on en conclure concernant le fait de suivre ou non la conduite accompagnée ?

» Cours p. 152

Tableaux croisés

Définitions

- Un **tableau croisé** est un tableau à double entrée qui permet d'étudier deux caractères d'une même population d'individus.
- Le nombre d'individus dans une catégorie est appelé le **cardinal** de cette catégorie.

EXEMPLES

Le tableau ci-contre résume une enquête de satisfaction dans une commune :

- La population G étudiée est l'ensemble de 100 habitants de la commune sélectionnés pour l'enquête. Le cardinal de G est égal à 100 et on note $\text{Card}(G) = 100$.
- Les deux caractères étudiés sur cette population sont le niveau de satisfaction et l'âge.

	Satisfaits (S)	Insatisfaits (I)	Total
Moins de 20 ans (A)	30	5	35
De 20 à 45 ans (B)	25	15	40
Plus de 45 ans (C)	15	10	25
Total	70	30	100

Effectifs marginaux

- Le nombre d'habitants « satisfaits » est égal à 70. On note $\text{Card}(S) = 70$.
- Le cardinal des habitants de « moins de 20 ans et satisfaits » est égal à 30. On note : $\text{Card}(A \cap S) = 30$.

Fréquences

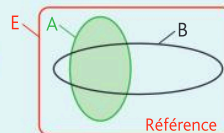
Définitions

Soit E une population de référence.

Si on note A la partie de E regroupant les individus possédant un caractère a , et B la partie de E regroupant les individus possédant un autre caractère b .

• Fréquence marginale

La **fréquence de a** correspond à la proportion d'individus possédant le caractère a dans la population de référence E . C'est la **proportion de l'ensemble A dans l'ensemble E** . On dit que c'est une fréquence marginale. On la note : $f(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$. Ici le caractère b n'intervient pas.



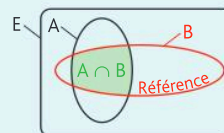
• Fréquence conditionnelle

La **fréquence de a parmi b** correspond à la proportion d'individus possédant le caractère a dans l'ensemble B .

Ici la nouvelle population de référence est B .

C'est donc la proportion de l'ensemble $A \cap B$ dans l'ensemble B ,

si B n'est pas vide. On dit que c'est une fréquence conditionnelle. On la note : $f_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$.



Remarque

Dans un tableau croisé, la **fréquence conditionnelle** d'une population A dans une population B se calcule à l'intérieur d'une ligne ou d'une colonne.

Propriété

Avec les mêmes notations que dans les définitions précédentes, on a : $f_B(A) = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$.

1 Calculer une fréquence marginale et conditionnelle à partir d'un tableau d'effectifs

EXO

Une entreprise a mené une enquête auprès de ses salariés pour étudier le mode de transport utilisé en fonction de leur lieu de résidence. Le tableau d'effectifs ci-contre donne le résultat de cette enquête.

	Mobilités carbonées (voiture, moto...)	Mobilités douces (vélo, transports en commun...)	Total
Urbain	2	42	44
Rural	18	28	46
Total	20	70	90

a. Calculer la fréquence des salariés résidant en zone rurale et utilisant une mobilité carbonée.

b. Calculer la fréquence des salariés vivant en zone urbaine parmi ceux qui utilisent les mobilités douces.

Méthode a. Fréquence marginale

1 Il faut commencer par identifier les deux ensembles A et E qui permettent de calculer la fréquence (avec A inclus dans E, noté $A \subset E$ et $E \neq \emptyset$).

2 Calculer : $f = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$.

»

Réponse a.

1 Les deux ensembles sont : A : « Les salariés résidant en zone rurale et utilisant une mobilité carbonée » et E : « l'ensemble des salariés ».

2 $f = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)} = \frac{18}{90} = 0,2$.

Méthode b. Fréquence conditionnelle

1 On reconnaît une fréquence conditionnelle. Il faut commencer par identifier les deux ensembles A et B qui permettent de calculer la fréquence (avec $B \neq \emptyset$).

2 Calculer : $f_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$.

»

Réponse b.

1 On cherche une fréquence parmi ceux qui utilisent les mobilités douces donc cette fréquence va se calculer dans la colonne « Mobilités douces ». Les deux ensembles sont : A : « Les salariés résidant en zone urbaine » et B : « l'ensemble des salariés qui utilisent les mobilités douces ».

2 $f_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = \frac{42}{70} = 0,6$.

» Exercices 7, 8, 9 p. 157

2 Compléter un tableau croisé

EXO

Une étude a été réalisée sur les préférences de vacances de 400 clients (200 hommes et 200 femmes) d'une agence de voyages, en fonction de la saison.

On sait que :

- 20 % des personnes interrogées sont des hommes préférant l'hiver.
- 75 % des femmes préfèrent l'été.

Compléter le tableau croisé d'effectifs ci-contre.

	Été	Hiver	Total
Femmes			
Hommes			
Total			

Méthode

Pour compléter une case du tableau, on peut :

- 1 Recopier directement une valeur donnée par l'énoncé ;
- 2 Faire un calcul direct à partir des données du texte (appliquer une proportion) ;
- 3 Utiliser le total par ligne (ou par colonne) pour compléter la dernière case de cette ligne (ou colonne).

»

Réponse

2 $\frac{20}{100} \times 400 = 80$. Il y a 80 hommes préférant l'hiver.
 $\frac{75}{100} \times 200 = 150$. Il y a 150 femmes préférant l'été.

	Été	Hiver	Total
Femmes	150	50	200
Hommes	120	80	200
Total	270	130	400

» Exercices 16, 17 p. 159

Dans toute cette page, on considère uniquement des situations d'**équiprobabilité**, c'est-à-dire une situation où chaque individu de la population a la même probabilité d'être choisi pour étudier ses caractéristiques.

Probabilités conditionnelles et tableau croisé d'effectifs

Définition

A et B désignent deux évènements d'un même univers.

Si $\text{Card}(B) \neq 0$, alors la probabilité que l'évènement A se réalise, sachant que B est réalisé, est notée

$$P_B(A), \text{ et est définie par : } P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}.$$

EXEMPLES

On a étudié la répartition des employés d'une entreprise en fonction du service auquel ils appartiennent et du type de contrat qu'ils possèdent. Les résultats sont donnés dans le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Administratif (A)	Technique (T)	Commercial (C)	Total
CDI (I)	5	25	45	75
CDD (D)	20	25	5	50
Total	25	50	50	125

On choisit un employé au hasard parmi l'ensemble des employés de cette entreprise.

- Si on sait que l'employé choisi possède un contrat de type CDI alors la probabilité que l'employé choisi soit un commercial.

$$\text{est } P(C) = \frac{\text{Card}(I \cap C)}{\text{Card}(I)} = \frac{45}{75} = 0,6.$$

- Si on sait que l'employé choisi est un administratif alors la probabilité que l'employé choisi possède un contrat de type

$$\text{CDD est } P_A(D) = \frac{\text{Card}(A \cap D)}{\text{Card}(A)} = \frac{20}{25} = 0,8.$$

Remarques

Ne pas confondre :

- $P_A(D)$, la probabilité que l'employé ait un contrat de type CDD, sachant que c'est un administratif. Ici, **le salarié est choisi au hasard uniquement parmi les administratifs et on s'intéresse uniquement à son type de contrat.**
- $P(A \cap D)$, la probabilité que l'employé soit un administratif possédant un contrat de type CDD. Ici, **le salarié est choisi au hasard dans toute l'entreprise, et on s'intéresse à la fois à son type de contrat et au service auquel il appartient.**

Probabilités conditionnelles et tableau croisé de fréquences

Propriété

A et B désignent deux évènements d'un même univers. Si $f(B) \neq 0$, alors la probabilité que

l'évènement A se réalise, sachant que B est réalisé, vérifie : $P_B(A) = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$.

EXEMPLES

La répartition des participants à un programme de formation professionnelle en fonction du niveau d'expérience et du type de formation choisie est donnée dans le tableau de fréquences ci-dessous.

On choisit un participant au hasard parmi l'ensemble des participants.

	Formation en ligne (L)	Formation sur site (S)	Total
Débutant (D)	0,24	0,16	0,4
Avancé (A)	0,36	0,24	0,6
Total	0,6	0,4	1

Si on sait que le participant choisi est de niveau avancé alors la probabilité qu'il soit sur site est :

$$P_A(S) = \frac{f(A \cap S)}{f(A)} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4.$$

3 Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs

Le tableau d'effectifs ci-contre donne la répartition des articles vendus en une journée dans une enseigne selon la catégorie des produits et le type de magasin où ces ventes ont été réalisées.

	Électronique (E)	Vêtements (V)	Alimentation (A)	Total
Magasin en ligne (L)	40	30	20	90
Magasin physique (P)	60	50	50	160
Total	100	80	70	250

On choisit un article vendu au hasard.

Sachant que cette vente concerne un vêtement, calculer la probabilité que cette vente ait eu lieu en ligne.

Méthode

- Il s'agit ici d'une **probabilité conditionnelle**. On sait que la vente concerne un vêtement, on utilisera la colonne « Vêtements » du tableau.
- On calcule la probabilité de l'évènement L, sachant V, en utilisant la formule

$$P_V(L) = \frac{\text{Card}(V \cap L)}{\text{Card}(V)}.$$

Exercices 33, 34 p. 163

Réponse

1

Vêtements (V)
30
50
80

2 $P_V(L) = \frac{\text{Card}(V \cap L)}{\text{Card}(V)} = \frac{30}{80} = 0,375.$

4 Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé de fréquence

Le tableau de fréquence ci-contre, illustre la répartition des étudiants inscrits dans une université, en fonction de leur spécialité et du type d'inscription choisie.

On choisit, un étudiant au hasard. Sachant que l'étudiant est en alternance, calculer la probabilité qu'il soit en spécialité informatique.

	Informatique (I)	Mécanique (M)	Biologie (B)	Total
Temps plein (P)	0,2	0,16	0,16	0,52
En alternance (A)	0,12	0,12	0,24	0,48
Total	0,32	0,28	0,4	1

Méthode

- On sait que l'étudiant est en alternance, on utilisera la ligne « en alternance » du tableau.
- On calcule la probabilité de l'évènement I, sachant A en utilisant la formule $P_A(I) = \frac{f(A \cap I)}{f(A)}.$

Réponse

1

En alternance (A)	0,12	0,12	0,24	0,48
-------------------	------	------	------	------

2 $P_A(I) = \frac{f(A \cap I)}{f(A)} = \frac{0,12}{0,48} = 0,25.$

Exercice 41 p. 165

Je retiens

Tableau croisé

Un tableau croisé permet d'étudier simultanément deux caractères d'une même population P. Il s'agit d'un tableau à double entrée dans lequel on peut faire apparaître des effectifs ou des fréquences.

Tableau croisé d'effectifs

	E	F	Total
A	Card(A ∩ E)	Card(A ∩ F)	Card(A)
B	Card(B ∩ E)	Card(B ∩ F)	Card(B)
C	Card(C ∩ E)	Card(C ∩ F)	Card(C)
Total	Card(E)	Card(F)	Card(P)

Exemple du nombre d'individus de P qui vérifient simultanément A et E.

Tableau croisé de fréquences

	E	F	Total
A	$f(A \cap E)$	$f(A \cap F)$	$f(A)$
B	$f(B \cap E)$	$f(B \cap F)$	$f(B)$
C	$f(C \cap E)$	$f(C \cap F)$	$f(C)$
Total	$f(E)$	$f(F)$	1

Exemples de fréquences marginales.

Savoir-faire En divisant chaque valeur du tableau croisé d'effectifs par Card(P), on obtient le tableau des fréquences.

Fréquence conditionnelle

La fréquence conditionnelle d'une valeur $f_A(E)$ est la proportion d'individus vérifiant la modalité E parmi les individus vérifiant la modalité A (Card(A) ≠ 0) et ($f(A) \neq 0$).

On a :

$$f_A(E) = \frac{\text{Card}(A \cap E)}{\text{Card}(A)} = \frac{f(A \cap E)}{f(A)}$$

Probabilité conditionnelle

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité conditionnelle $P_A(E)$ est la probabilité que l'évènement E se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé (Card(A) ≠ 0) et ($f(A) \neq 0$).

On a :

$$P_A(E) = \frac{\text{Card}(A \cap E)}{\text{Card}(A)} = \frac{f(A \cap E)}{f(A)}$$

► EXEMPLE :

Dans une classe de 30 élèves, les élèves peuvent choisir Handball ou Volleyball comme sport collectif dans leur menu EPS pour le baccalauréat. On a effectué un sondage sur leur choix de sport collectif (handball ou volleyball) dont les résultats sont dans le tableau ci-dessus.

	Handball (H)	Volleyball (V)	Total
Fille (F)	7	9	16
Garçon (G)	11	3	14
Total	18	12	30

- Fréquence des filles faisant du volleyball : $f_{F \cap V} = \frac{\text{Card}(F \cap V)}{\text{Card}(\text{Total})} = \frac{9}{30} = 0,3$.
- Fréquence marginale des élèves faisant du handball : $f_H = \frac{18}{30} = 0,6$.
- Fréquence conditionnelle des garçons, parmi les élèves qui font du volleyball : $f_V(G) = \frac{3}{12} = 0,25$.

On choisit un élève au hasard dans cette classe.

- Probabilité que l'élève choisi fasse du volleyball, sachant que c'est une fille :

$$P_F(V) = \frac{\text{Card}(F \cap V)}{\text{Card}(F)} = \frac{9}{16} = 0,5625.$$

- Probabilité que l'élève choisi soit une fille, sachant qu'il fait du volleyball est :

$$P_V(F) = \frac{\text{Card}(V \cap F)}{\text{Card}(V)} = \frac{9}{12} = 0,75.$$

Remarque : l'emploi de mots particuliers comme « parmi » ou « sachant que » suggère que nous avons affaire à une fréquence ou probabilité conditionnelle.

Je me teste

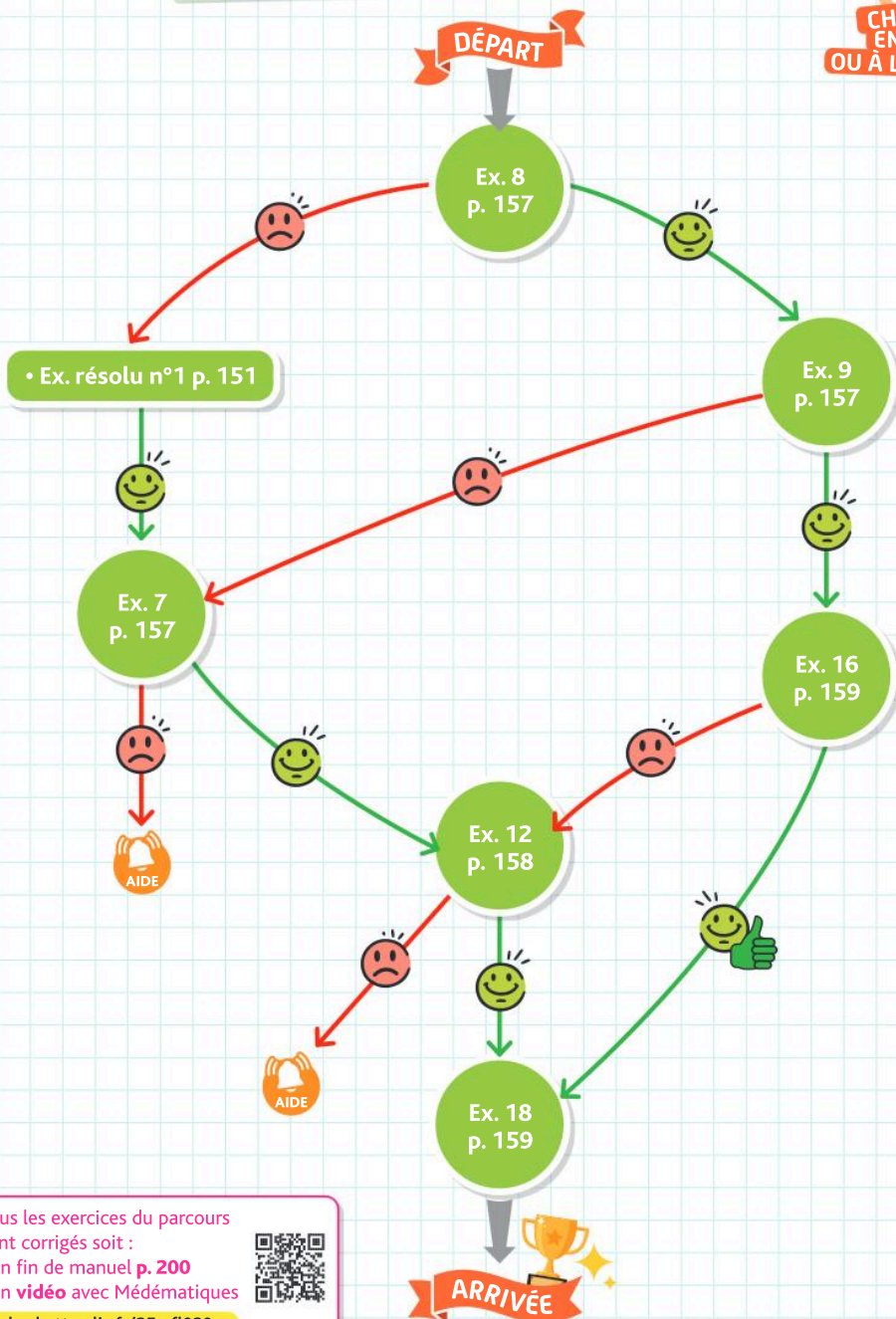


QCM interactif
et auto-corrige

hachette-clic.fr/25mfl019

Je me prépare à une évaluation

Je sais calculer une fréquence marginale ou conditionnelle
à partir d'un tableau croisé



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl020

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl020



1 Tableaux croisés et fréquences

Questions flash

- Dans une classe de 35 élèves, 15 sont des filles. Calculer la fréquence de filles dans cette classe sous forme d'une fraction irréductible.
- Sur les 30 candidats au permis de conduire dans une auto-école, 24 ont réussi. Quel est le pourcentage de réussite ?
- Sur 25 matchs joués, une équipe a gagné 16 matchs. Quelle est la fréquence de matchs gagnés ? Donner le résultat sous forme d'un nombre décimal.
- 30 % des clients d'un restaurant choisissent le menu à la carte. S'il y a 80 clients, combien de clients choisissent le menu à la carte ?
- Dans un hôpital, $\frac{2}{7}$ des patients arrivent par les urgences. Au cours d'une semaine, 588 patients sont entrés à l'hôpital. Combien de ces patients sont arrivés par les urgences ?
- Une plate-forme de diffusion en continu compte environ 10 millions d'abonnés. Si la fréquence des abonnés qui regardent majoritairement des séries et de 0,78, quel est le nombre d'abonnés qui préfèrent les séries ?

La **fréquence** d'une donnée s'obtient en divisant l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Une étude a été menée auprès d'une population d'individus pour évaluer l'efficacité d'un test de dépistage de la grippe. Deux questions ont été posées. La première concerne la présence de la maladie (l'individu est malade ou non malade) et la seconde porte sur le résultat du test (positif ou négatif).



Le tableau ci-dessous résume les résultats de cette étude :

	Positif	Négatif	Total
Malade	141	9	150
Non malade	3	147	150
Total	144	156	300

- Calculer la fréquence des personnes positives et malades parmi l'ensemble de la population.
- Calculer la fréquence des personnes positives parmi l'ensemble de la population.

Le tableau ci-dessous résume les résultats d'une étude visant à évaluer l'effet des cours de soutien sur la réussite à des examens.

	Avec soutien	Sans soutien	Total
Réussite	60	108	168
Échec	24	48	72
Total	84	156	240

Recopier et compléter le tableau de fréquences suivant :

	Avec soutien	Sans soutien	Total
Réussite			
Échec			
Total	0,35	0,65	1

Voici les résultats d'une étude qui porte sur la relation entre la satisfaction des clients et leur âge. On note :

- A : l'ensemble des clients âgés de 18 à 29 ans.
- B : l'ensemble des clients âgés de 30 à 59 ans.
- C : l'ensemble des clients âgés de 60 ans et plus.
- S : l'ensemble des clients satisfaits.
- I : l'ensemble des clients insatisfaits.

	A	B	C	Total
S	77	42	49	168
I	28	35	49	112
Total	105	77	98	280

a. Recopier et compléter le tableau de fréquences ci-contre :

	A	B	C	Total
S				
I				
Total				1

b. Rédiger une phrase pour interpréter le contenu de chacune des deux cases colorées.

Un **effectif marginal** est un effectif figurant dans la ligne ou la colonne « total ». Les effectifs marginaux ne correspondent qu'à l'étude de l'un des deux caractères dans la population totale. On définit de la même manière une **fréquence marginale**.

Lors du dernier recensement dans une ville, on a réalisé ce tableau croisé qui présente la répartition des types de logements selon la taille des familles.

	Appartement	Maison
1 personne	32	5
2 personnes	25	7
3 personnes	26	20
4 personnes	25	25
5 personnes	17	24
6 personnes et +	3	10

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl020



1. Recopier le tableau en y faisant apparaître les effectifs marginaux.

2. Construire le tableau des fréquences en y faisant apparaître les fréquences marginales (arrondir à 0,01).

3. Sans effectuer de calculs supplémentaires, répondre aux questions suivantes :

a. Quel est le pourcentage de familles résidant en appartement parmi l'ensemble des familles de cette ville ?

b. Quel est le pourcentage de familles constituées de trois personnes parmi l'ensemble des familles de cette ville ?

c. Quel est le pourcentage de familles de deux personnes résidant en appartement parmi l'ensemble des familles de cette ville ?

Tableur Ce tableau croisé présente la répartition des pratiques sportives selon le sexe dans un complexe sportif.

	A	B	C	D
1	Pratique Sportive	Homme	Femme	Total
2	Football	22	5	
3	Natation	10	21	
4	Tennis	16	15	
5	Course à pied	27	22	
6	Yoga	5	32	
7	Cyclisme	19	9	
8	Total			

a. Quelle formule faut-il écrire en D2, puis recopier vers le bas jusqu'à la cellule D8 pour compléter la colonne « Total » du tableau ?

b. Quelle formule faut-il écrire en B8, puis recopier vers la droite jusqu'à la cellule C8 pour compléter la ligne « Total » du tableau ?

c. On souhaite maintenant compléter le tableau des fréquences ci-dessous :

	A	B	C	D
10	Pratique Sportive	Homme	Femme	Total
11	Football			
12	Natation			
13	Tennis			
14	Course à pied			
15	Yoga			
16	Cyclisme			
17	Total			

Quelle formule faut-il écrire en B11, à recopier vers la droite puis vers le bas jusqu'à la cellule D17 pour remplir ce tableau ?

d. Quel est le résultat attendu dans la cellule D12 (arrondir à 0,001) ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice (utiliser un pourcentage).

► Pour calculer la **fréquence conditionnelle** d'une modalité A, sachant qu'une modalité B est réalisée, on utilise :

$$f_b(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

Vidéo Dans un lycée, les élèves ont le choix entre 3 langues vivantes : anglais, allemand et espagnol. Le tableau d'effectifs ci-dessous présente les résultats du baccalauréat en fonction de la première langue choisie par les élèves de ce lycée.

On note :

- E : l'ensemble des élèves ayant choisi l'anglais
- D : l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand
- S : l'ensemble des élèves ayant choisi l'espagnol
- A : (respectivement R), l'ensemble des élèves admis (respectivement recalés)

	E	D	S	Total
A	36	21	33	90
R	4	7	1	12
Total	40	28	34	102

a. Calculer la fréquence des lycéens admis au baccalauréat parmi ceux ayant choisi l'anglais.

b. Calculer la fréquence des lycéens, ayant choisi l'anglais parmi les admis.

c. Calculer $f_D(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

d. Calculer $f_A(S)$ (arrondir à 0,01). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Le tableau de fréquences ci-dessous montre les préférences des clients d'un restaurant pour le choix de prendre ou non, un café à la fin du repas.



On note :

- C : l'ensemble des clients qui prennent un café
- S : l'ensemble des clients qui ne prennent pas de café
- H : l'ensemble des hommes
- F : l'ensemble des femmes

	C	S	Total
H	0,36	0,32	0,68
F	0,24	0,08	0,32
Total	0,6	0,4	1

a. Calculer la fréquence des hommes parmi les clients ayant choisi un café.

b. Calculer la fréquence des clients qui ne prennent pas de café parmi les femmes.

c. Calculer $f_S(H)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

On souhaite analyser les tendances des absences au sein de trois services différents d'une entreprise. Le tableau ci-dessous présente la répartition des absences par service pour les trois premiers trimestres de l'année.

	T1	T2	T3
Service A	22	32	12
Service B	25	37	18
Service C	13	5	8

Recopier et compléter le tableau des fréquences conditionnelles. Les résultats seront éventuellement à arrondir à 0,001.

a. Par lignes :

	T1	T2	T3	Total
Service A				1
Service B				1
Service C				1

b. Par colonnes :

	T1	T2	T3
Service A			
Service B			
Service C			
Total	1	1	1

Une entreprise de restauration scolaire a réalisé une enquête sur les préférences alimentaires des élèves en les interrogeant sur leur niveau scolaire (primaire, collège, lycée) et leur type de repas préféré (végétarien, poisson, viande).

Le tableau de fréquences ci-dessous résume les résultats de cette enquête.

	Végétarien	Poisson	Viande	Total
Primaire	0,05	0,06	0,1	0,21
Collège	0,07	0,08	0,14	0,29
Lycée	0,15	0,13	0,22	0,5
Total	0,27	0,27	0,46	1

1. Construire le tableau de fréquences conditionnelles par lignes (arrondir à 0,001).

2. Construire le tableau de fréquences conditionnelles par colonnes (arrondir à 0,001).

3. En utilisant les tableaux précédents, et sans calcul supplémentaire, répondre aux questions suivantes :

- Quel est le pourcentage de lycéens parmi l'ensemble des élèves ?
- Quel est le pourcentage d'élèves végétariens parmi l'ensemble des élèves ?
- Quel est le pourcentage de collégiens parmi les végétariens ?
- Quel est le pourcentage de végétariens parmi les collégiens ?
- Quel est le pourcentage de collégiens végétariens parmi l'ensemble des élèves ?

► Pour calculer une **proportion** d'une quantité, on multiplie la fraction (correspondant au pourcentage) par cette quantité.

$$\text{Ex. : } 60 \% \text{ de } 150 \text{ € : } \frac{60}{100} \times 150 = 90 \text{ €}$$

Corrigé Une entreprise compte 250 salariés. On sait que :

- 64 % des salariés travaillent de jour parmi lesquels 25 % sont en CDD

- 12 % des salariés sont en CDI et travaillent de nuit

a. Reproduire et compléter ce tableau d'effectifs :

	Jour	Nuit	Total
CDI			
CDD			
Total			

b. On note N l'ensemble des salariés qui travaillent de nuit et D l'ensemble des salariés en CDD.

Calculer : $f(N)$, $f(D)$, $f(N \cap D)$, $f_D(N)$ et $f_N(D)$. Arrondir éventuellement à 0,001.

Durant l'année 2022, le musée d'une petite ville touristique a été visité par 25 200 personnes.



On sait que :

- Le musée a été ouvert pendant 120 jours
- 35 % des visiteurs sont des étrangers et parmi eux les trois quarts prennent un audioguide
- Les autres visiteurs sont Français et seulement 20 % d'entre eux prennent un audioguide

a. Quel est le nombre moyen de visiteurs par jour pour ce musée ?

b. Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs du nombre de visiteurs.

	Avec audioguide	Sans audioguide	Total
Français			
Étrangers			
Total			

c. Parmi l'ensemble des visiteurs, quel est le pourcentage de Français sans audioguide ?

d. Parmi l'ensemble des visiteurs, quel est le pourcentage de visiteurs avec audioguide ?

e. Quel est le pourcentage de visiteurs étrangers parmi les visiteurs avec audioguide (arrondir à 1 %) ?

Corrigé Dans un établissement scolaire, il y a 1 920 élèves répartis en collégiens, lycéens et étudiants de BTS.

- Un tiers des élèves sont des collégiens
- 60 % des élèves du lycée pratiquent un sport au moins.
- 55 % des collégiens pratiquent un sport au moins.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl020



a. Recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant :

	Collégiens	Lycéens	Étudiants	Total
Pratiquent un sport au moins				
Ne pratiquent aucun sport			280	
Total		600		

Pour les questions suivantes, on arrondira si nécessaire les réponses au dixième de %.

- b. Quel est le pourcentage de lycéens dans cet établissement ?
- c. Quel est le pourcentage de collégiens ne pratiquant aucun sport parmi les élèves de l'établissement ?
- d. Quel est le pourcentage d'élèves pratiquant au moins un sport parmi les étudiants ?
- e. Quel est le pourcentage de lycéens parmi les élèves ne pratiquant aucun sport ?

Un club de sport souhaite modifier ses horaires d'ouverture et mène une enquête auprès de 800 adhérents. Voici la répartition des participants selon leur âge : 23 % ont moins de 30 ans, 35 % ont plus de 50 ans, et 42 % ont entre 30 et 50 ans. À la question : « Approuvez-vous la proposition des nouveaux horaires d'ouverture ? » :



- 75 % des moins de 30 ans ont répondu oui
 - 40 % des plus de 50 ans ont répondu non
 - 55 % des personnes interrogées ont répondu oui
- Dans cet exercice, les résultats seront éventuellement à arrondir à 0,001.

a. À partir de ces informations, recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant :

	Oui	Non	Total
Moins de 30 ans			
De 30 ans à 50 ans			
Plus de 50 ans			
Total			

- b. Quelle est la fréquence des plus de 50 ans ayant répondu non ?
- c. Quelle est la fréquence des adhérents âgés entre 30 et 50 ans parmi les réponses « oui » ?
- d. Recopier et compléter le tableau des fréquences conditionnelles en lignes.

	Oui	Non	Total
Moins de 30 ans			
De 30 ans à 50 ans			
Plus de 50 ans			

e. Dans cette question, on note :

- O l'ensemble des réponses « oui », N l'ensemble des réponses « non »
- A l'ensemble des moins de 30 ans, B l'ensemble des 30 à 35 ans et C l'ensemble des plus de 50 ans

En utilisant les résultats des calculs précédents et les données du texte, donnez sans calcul supplémentaire, et sans justification :

$$f(C) ; f_A(O) ; f_O(B) ; f(C \cap N).$$

Tableur Le tableau suivant donne le type de contrat (CDI ou CDD) d'un salarié d'une entreprise selon son d'âge.

	A	B	C	D
1 Contrat				
2 Catégorie		CDI	CDD	Total
3 18/29 ans	35	17	52	
4 30/49 ans	22	29	51	
5 50 ans et plus	10	33	43	
6 Total	67	79	146	

- a. Interpréter les nombres suivants :
- 35 en B3
 - 51 en D4
 - 79 en C6
 - 146 en D6

On souhaite réaliser le tableau des fréquences conditionnelles par rapport au type de contrat.

Le tableau (incomplet) est donné ci-dessous.

Les valeurs seront à arrondir à 0,1 %.

	A	B	C	D
9 Contrat				
10 Catégorie		CDI	CDD	Total
11 18/29 ans	52,2%	21,5%		
12 30/49 ans		36,7%	34,9%	
13 50 ans et plus	14,9%			
14 Total	100%	100%	100%	

- b. Interpréter la valeur 52,2 % en B11. Quel calcul permet d'obtenir cette valeur ?
- c. Quelle formule faut-il écrire dans la cellule B11 avant de la recopier vers le bas, puis vers la droite afin d'automatiser les calculs sur la plage B11 : D14 ?
- d. Quelles formules trouvera-t-on dans les cellules B12 et C13 ?
- e. Recopier puis compléter les valeurs manquantes du tableau.

Tableur Une revue de consommateurs décide de comparer trois modèles de smartphones. Un questionnaire s'adresse aux possesseurs de l'un des trois smartphones.

L'une des questions posées est la suivante : « Êtes-vous globalement satisfait de votre smartphone ? ». La réponse attendue est OUI ou NON.

Les résultats de cette étude sont donnés dans la feuille de tableur ci-dessous.

	A	B	C	D
1	Réponse			Total
2	Smartphone	OUI	NON	
3	Modèle 1	164	14	
4	Modèle 2	223	16	
5	Modèle 3	180	22	
6	Total			

1. Recopier le tableau dans un tableur et le compléter au fur et à mesure.
2. Quelle formule saisir dans la cellule D3, avant de la recopier vers le bas afin de compléter la colonne « Total » ?
3. Quelle formule saisir dans la cellule B6, avant de la recopier vers la droite afin de compléter la ligne « Total » ?
4. Dans le tableau suivant, les résultats de la plage B11 : D14 sont présentés en pourcentages arrondis à 0,1 %.

	A	B	C	D
9	Réponse			Total
10	Smartphone	OUI	NON	
11	Modèle 1	26,5%	2,3%	28,8%
12	Modèle 2	36,0%	2,6%	38,6%
13	Modèle 3	29,1%	3,6%	32,6%
14	Total	91,6%	8,4%	100,0%

Quel calcul permet d'obtenir le résultat affiché dans la cellule B11 ?

5. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B11, puis recopiée dans la plage de valeurs B11 : D14 afin d'automatiser le calcul ?
6. On souhaite connaître la répartition des réponses par modèle de smartphone. Pour cela, on réalise un tableau de fréquences conditionnelles par lignes.

	A	B	C	D
17	Réponse			Total
18	Smartphone	OUI	NON	
19	Modèle 1			
20	Modèle 2			
21	Modèle 3			
22	Total			

- a. Calculer le pourcentage de réponses « OUI » parmi l'ensemble des réponses du modèle 1 (arrondir à 0,1 %).
- b. Parmi les réponses proposées ci-dessous, trouver la formule à saisir dans la cellule B19 puis à recopier dans la plage de valeurs B19 : C22 afin d'automatiser le calcul :
 - Réponse A : =B3/D3
 - Réponse B : =B3/\$D\$3
 - Réponse C : =B3/\$D3
 - Réponse D : =B3/D\$3
 - Réponse E : =\$B\$11/\$D\$3

Une étude sur influence des parcours des diplômés de Master (hors enseignement) sur leur insertion professionnelle a été menée au 1^{er} décembre 2021, soit 18 mois après l'obtention de leur diplôme. Les deux tableaux suivants sont des extraits de cette étude (Source : enseignementsup-recherche.gouv.fr).

Tableau 1 : Répartition des diplômés selon le domaine disciplinaire du Master (en %).

Domaine disciplinaire	% Des diplômés
Droits, économie, gestion	41
Lettres, langues, arts	10
Sciences, technologies, santé	27
Sciences humaines et sociales	22
Total	100

Tableau 2 : Insertion professionnelle des diplômés selon le domaine disciplinaire du Master (en %).

	D	L	S	H
Taux d'emploi en France (F)	82	69	81	82
Taux d'emploi à l'étranger (E)	5	10	4	2
Inactifs/Autres (I)	13	21	15	16
Total	100	100	100	100

On note les ensembles des diplômés de Master suivants :

- D : Droits, économie, gestion
- L : Lettres, langues, arts
- S : Sciences, technologies, santé
- H : Sciences humaines et sociales
- F : Employés en France
- E : Employés à l'étranger
- I : Inactifs/Autres

Notation :

- $f(A)$: la fréquence de l'ensemble des diplômés de Master A parmi l'ensemble des diplômés de Master
- $f_B(A)$: la fréquence de l'ensemble des diplômés de Master A parmi l'ensemble des diplômés de Master B

a. Recopier et compléter :

$$f(L) = \quad f_i(F) =$$

b. Dans le contexte de l'exercice, interpréter à l'aide d'une phrase les résultats précédents.

c. En déduire $f(L \cap F)$.

Rappel : Si $f(B) \neq 0$ alors $f_B(A) = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$

d. En procédant de la même manière, calculer :

$$f(D \cap F), f(S \cap F) \text{ et } f(H \cap F).$$

e. Montrer que : $f(F) = 0,8043$.

f. Calculer la fréquence des diplômés de Master de « lettres, langues, arts » parmi les diplômés de Master employés en France (arrondir à 10^{-4}).



2 Probabilités conditionnelles

Questions flash

Pour les exercices 23 à 26, on considère une urne contenant des jetons numérotés et de couleurs différentes.

On choisit un jeton au hasard, et on note les évènements suivants :

- R : « le jeton est rouge »
- Z : « le jeton porte le numéro zéro »

23 Traduire par une phrase, la probabilité : $P(Z \cap R) = 0,08$.

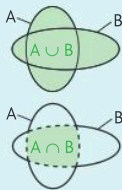
24 Traduire par une phrase, la probabilité : $P(Z \cup R) = 0,62$.

25 Traduire par une phrase, la probabilité : $P_R(Z) = 0,16$.

26 Traduire par une phrase, la probabilité : $P_Z(R) = 0,4$.

Soient A et B deux évènements, on note :

- $A \cup B$ l'ensemble des éventualités appartenant à A ou à B.
- $A \cap B$ l'ensemble des éventualités appartenant à A et à B.
- Si l'évènement B est de probabilité non nulle, alors on note $P_B(A)$ la probabilité que l'évènement A se réalise, sachant que l'évènement B est réalisé.



On cueille une fleur au hasard dans un jardin. On considère les évènements T : « la fleur est une tulipe » et R : « la fleur est rouge ».

Traduire par une phrase les probabilités suivantes :

- a. $P(T \cap R) = 0,15$ b. $P(T \cup R) = 0,65$
 c. $P_T(R) = 0,25$ d. $P_R(T) = 0,75$

Dans l'atelier d'un artiste, on choisit une œuvre au hasard. Cette œuvre peut être une peinture ou une sculpture, et représenter une personne ou un animal. On considère les évènements :

- A : « l'œuvre représente un animal »
- B : « l'œuvre représente une personne »
- C : « l'œuvre est une peinture »
- D : « l'œuvre est une sculpture »

À l'aide de ces évènements, traduire par une égalité les phrases suivantes.

- a. La probabilité de choisir une peinture est égale à 0,64.
 b. La probabilité de choisir une peinture qui représente un animal est égale à 0,2.
 c. La probabilité de choisir une sculpture qui représente une personne est égale à 0,06.

- d. La probabilité de choisir une peinture, sachant qu'elle représente un animal, est égale à 0,4.
 e. La probabilité de choisir une œuvre qui représente une personne, sachant que c'est une sculpture, est égale à $\frac{1}{6}$.

Dans un magasin, on choisit un produit au hasard. Ce produit peut être un vêtement ou une paire de chaussures, et être destiné aux adultes ou aux enfants. On considère les évènements :



- V : « le produit est un vêtement »
- C : « Le produit est une paire de chaussures. »
- A : « Le produit est destiné aux adultes »
- E : « le produit est destiné aux enfants »

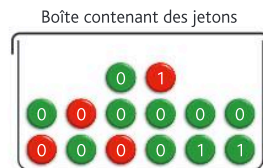
À l'aide de ces évènements, traduire par une égalité les phrases suivantes.

- a. La probabilité de choisir un vêtement est égale à 0,75.
 b. La probabilité de choisir une paire de chaussures destinée aux enfants est égale à 0,1.
 c. La probabilité de choisir une paire de chaussures, sachant qu'elle est destinée aux adultes, est égale à 0,25.
 d. La probabilité de choisir un produit destiné aux enfants, sachant que c'est un vêtement, est égale à 0,4.

On considère une expérience aléatoire. Pour calculer la **probabilité conditionnelle** d'un évènement A sachant qu'un évènement B de cardinal non nul est réalisé, on utilise :

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

On considère l'urne ci-dessous contenant des jetons numérotés et de couleurs différentes.



On choisit un jeton au hasard, et on note les évènements suivants :

- V : « le jeton est vert »
- Z : « le jeton porte le numéro zéro »

Calculer les probabilités, le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible.

- a. $P(Z \cap V)$ b. $P(Z \cup V)$
 c. $P_V(Z)$ d. $P_Z(V)$

On note \bar{A} l'évènement contraire de l'évènement A. C'est l'ensemble de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas contenues dans A.

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est fini et noté Ω .

A et B sont deux évènements de cet univers.

On donne le tableau croisé d'effectifs :

	B	\bar{B}	Total
A	76	38	114
\bar{A}	45	54	99
Total	121	92	213

On choisit un individu au hasard, tous les individus ont la même probabilité d'être choisis (équiprobabilité).

Associer chaque probabilité à son résultat.

Probabilités		Résultats	
a.	$P(A \cap B)$	1.	$\frac{76 + 38 + 45}{213}$
b.	$P(A \cup B)$	2.	$\frac{114}{213}$
c.	$P_B(A)$	3.	$\frac{76}{213}$
d.	$P_A(B)$	4.	$\frac{76}{114}$
e.	$P(A)$	5.	$\frac{76}{121}$
f.	$P(B)$	6.	$\frac{121}{213}$

Le contenu d'une boîte de chocolats noirs ou fourrés au praliné est donné dans le tableau d'effectifs suivant.

On note :

- N : « Le chocolat est un chocolat noir »
- F : « Le chocolat est fourré au praliné »

	Noir (N)	Au lait (\bar{N})	Total
Fourré praliné (F)	30	27	57
Non fourré praliné (\bar{F})	42	9	51
Total	72	36	108

On choisit un chocolat au hasard dans cette boîte. Calculer la valeur exacte des probabilités suivantes et traduire le résultat par une phrase.

- a. $P(N)$ b. $P(F \cap \bar{N})$ c. $P_N(F)$

Afin d'ajuster sa fabrication, un glacier a examiné ses ventes sur ses 300 premiers clients de l'année en fonction du sexe de l'acheteur et du type de

glace achetée. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

	Hommes (H)	Femmes (F)	Total
Crème glacée (C)	108	72	180
Sorbet (S)	30	45	75
Glace à l'italienne (I)	32	13	45
Total	170	130	300

On choisit une vente au hasard parmi celles étudiées. Calculer la valeur exacte des probabilités suivantes et traduire le résultat par une phrase.

- a. $P(C)$ b. $P(C \cap F)$ c. $P_S(H)$ d. $P_H(S)$

Pour garantir l'intégrité de la pratique sportive et la santé des sportifs, des contrôles antidopage sont réalisés sur un échantillon de sportifs à la suite des épreuves ou même parfois hors compétition.

Un laboratoire a mis au point un nouveau test et cherche à évaluer son efficacité. Pour cela, il réalise une étude sur 500 personnes réparties en deux groupes :

- Groupe 1 : les individus ont tous consommé un produit dopant
- Groupe 2 : aucun individu n'a consommé de produit dopant.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau d'effectifs suivant :

	Test positif	Test négatif
Groupe 1 : Personne ayant consommé un produit dopant	283	17
Groupe 2 : Personne n'ayant pas consommé un produit dopant	3	197

On choisit au hasard une personne ayant participé à cette étude et on note :

- T : l'évènement « le test est positif pour la personne choisie »
- D : l'évènement « la personne a consommé un produit dopant »

1. a. Donner le nombre de tests positifs pour des personnes n'ayant pas consommé de produit dopant ?

b. Calculer la probabilité d'avoir choisi une personne n'ayant pas consommé de produit dopant et ayant un résultat positif au test.

On dit alors que le test a donné un *faux positif*.

2. a. Combien de personnes dans cette étude ont consommé un produit dopant ?

b. On appelle *sensibilité du test* la probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle a réellement consommé un produit dopant. On la note $P_D(T)$. Calculer la sensibilité de ce test. Arrondir au millième.

3. On appelle *spécificité d'un test* la probabilité qu'une personne ait un test négatif sachant qu'elle n'a pas consommé un produit dopant. On la note $P_{\bar{D}}(\bar{T})$. Calculer la spécificité de ce test.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl020



Pour les exercices 35 à 36, on utilisera les données suivantes :

Un responsable des ventes d'une concession automobile souhaite étudier l'impact d'une campagne publicitaire pour son nouveau modèle sur les réseaux sociaux.

Le tableau suivant donne les réponses à deux questions.

- Question 1 : « Quel est votre âge ? »
- Question 2 : « Connaissez-vous notre nouveau modèle ? »

Question 2 \ Question 1	OUI	NON	Total
Moins de 25 ans	54	63	117
Entre 25 et 60 ans	88	38	126
Plus de 60 ans	65	52	117
Total	207	153	360

On choisit au hasard un questionnaire parmi les 360 réponses, et on définit les événements suivants :

- A : « L'âge est inférieur à 25 ans »
- B : « L'âge est compris entre 25 ans et 60 ans »
- C : « L'âge est supérieur à 60 ans »
- O : « la réponse à la question est OUI »
- N : « la réponse à la question est NON »

Calculer :

- La probabilité que la réponse à la question 2 soit OUI.
- La probabilité que la personne interrogée ait un âge compris entre 25 ans et 60 ans.
- La probabilité que la personne interrogée ait un âge inférieur à 25 ans et que la réponse soit NON.
- La probabilité que la personne interrogée ait un âge inférieur à 25 ans ou que la réponse soit NON.

Pour chacune des questions suivantes, calculer la probabilité demandée, puis interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

- $P(A)$
- $P(N)$
- $P(A \cap N)$
- $P(A \cup O)$

Pour les exercices 37 et 38, on utilise le contexte des exercices 35 et 36.

Le responsable des ventes de cette concession souhaite à présent étudier le niveau de satisfaction des 119 clients ayant acheté le nouveau modèle. Le tableau suivant donne les réponses à deux questions.

- Question 1 : « Quel est votre âge ? »
- Question 3 : « Êtes-vous satisfait de notre nouveau produit ? »

Question 3 \ Question 1	OUI	NON	Total
Moins de 25 ans	33	10	43
Entre 25 et 60 ans	41	17	58
Plus de 60 ans	12	6	18
Total	86	33	119

Dans cet exercice, toutes les probabilités seront arrondies à 0,001 près.

- On choisit au hasard un questionnaire parmi les 119 questionnaires. Calculer :
 - La probabilité que la réponse à la question 3 soit OUI.
 - La probabilité que la personne interrogée ait un âge compris entre 25 ans et 60 ans.
- On choisit au hasard un questionnaire parmi les réponses OUI. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait un âge compris entre 25 ans et 60 ans.
- On choisit au hasard un questionnaire parmi les personnes ayant un âge compris entre 25 ans et 60 ans. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise OUI.

On choisit au hasard un questionnaire parmi les 119 questionnaires, calculer chacune des probabilités suivantes puis interpréter chacun des résultats à l'aide d'une phrase.

- $P(C)$
- $P(N)$
- $P_C(N)$
- $P_N(C)$



Une agence de voyages permet à ses clients de choisir deux options : « excursions » (option A) et « jet-ski » (option B).



L'agence a recueilli des informations sur 350 clients :

- 30 % choisissent l'option « excursions » (A) et parmi eux 40 % choisissent l'option jet-ski (B)
- 62 % choisissent l'option jet-ski (B)

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Avec l'option A	Sans l'option A	Total
Avec l'option B			
Sans l'option B			
Total			350

Les résultats seront arrondis au millième.

On choisit un client au hasard. On considère les événements suivants :

- A : « le client choisit l'option A »
- B : « le client choisit l'option B »

b. Quelle est la probabilité que le client choisisse les deux options ?

- c. Calculer la probabilité que le client ne choisisse aucune option.
- d. Calculer la probabilité $P_B(A)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- e. Un client n'a pas choisi l'option A, quelle est la probabilité qu'il ne choisisse pas l'option B ?

Dans une entreprise qui emploie 1 200 personnes, on souhaite étudier la répartition des salaires mensuels selon l'ancienneté.

On dispose des renseignements suivants :

- 65 % des salariés ont plus de 15 ans d'ancienneté.
- Trois quarts des salariés perçoivent un salaire inférieur à 2 000 € et, parmi ces personnes, 32 % ont moins de 15 ans d'ancienneté.
- Parmi les 18 personnes percevant un salaire supérieur à 4 000 €, 6 ont moins de 15 ans d'ancienneté.

On note :

- A : « le salarié a moins de 15 ans d'ancienneté »
- B : « le salarié a plus de 15 ans d'ancienneté »
- S1 : « le salarié perçoit un salaire inférieur à 2 000 € »
- S2 : « le salarié perçoit un salaire supérieur ou égal à 2 000 € et inférieur à 4 000 € »
- S3 : « le salarié perçoit un salaire supérieur ou égal à 4 000 € »

a. Justifier que 288 salariés perçoivent un salaire inférieur à 2 000 € et ont moins de 15 ans d'ancienneté.

b. À l'aide des renseignements précédents, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

	A	B	Total
S1			
S2			
S3			
Total			1200

c. On interroge une personne au hasard dans l'entreprise. Quelle est la probabilité qu'on interroge une personne ayant plus de 15 ans d'ancienneté percevant un salaire supérieur ou égal à 4 000 € ?

d. Quelle est la probabilité qu'on interroge une personne percevant un salaire inférieur à 4 000 € ?

e. On interroge une personne ayant moins de 15 ans d'ancienneté dans l'entreprise. Quelle est la probabilité qu'elle perçoive moins de 2 000 € (arrondir à 0,001) ?

Une usine fabrique une série de pièces pour ordinateurs. Au cours de leur fabrication, les pièces peuvent faire apparaître deux types de défauts. Le défaut A et le défaut B. On note :

- A : « La pièce a le défaut A »
- B : « La pièce a le défaut B »

Le tableau de fréquences suivant résume la situation :

	A	\bar{A}	Total
B	0,06	0,05	0,11
\bar{B}	0,07	0,82	0,89
Total	0,13	0,87	1

a. En utilisant les données du tableau, donner $f(A \cap B)$ et $f(B)$. Puis, interpréter ces résultats par une phrase dans le contexte de l'exercice.

b. L'usine a fabriqué 400 pièces. Calculer $\text{Card}(A \cap B)$ et $\text{Card}(B)$.

c. On choisit une pièce au hasard dans la production. Calculer la probabilité que la pièce ait le défaut A sachant qu'elle a le défaut B (donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible).

d. Calculer $\frac{f(A \cap B)}{f(B)}$ (donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible). Quel résultat du cours retrouvez-vous ?

Corrigé Une entreprise produit des pots en verre pour le secteur de l'agroalimentaire.



Le but de l'exercice est de mesurer l'efficacité d'un test qui a pour objectif de rejeter les pots défectueux. Un pot rejeté par le test sera à nouveau fondu pour être réutilisé dans la production.

On sait que :

- La machine produit 8 % de pots défectueux.
- Si le pot est défectueux, alors le test le rejettera dans 90 % des cas. Dans les autres cas le pot défectueux passera le test et sera conservé.
- Si le pot n'est pas défectueux, alors le test le conservera dans 95 % des cas. Dans les autres cas, le pot non défectueux ne passera pas le test et sera rejeté.
- La production est de 30 000 pots par jour.

On choisit un pot au hasard dans la production et on considère les événements :

- D : « Le pot est défectueux »
- R : « Le pot est rejeté par le test »

a. Recopier et compléter le tableau croisé de fréquences.

	R	\bar{R}	Total
D			0,08
\bar{D}			
Total			1

b. Calculer $\text{Card}(D \cap \bar{R})$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

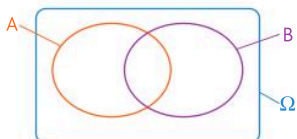
c. Calculer $P_R(\bar{D})$, puis interpréter le résultat.

d. Calculer $P_{\bar{R}}(\bar{D})$, puis interpréter le résultat.

Trouver la pièce défectueuse **STI2D**

» Représenter • Calculer

Une entreprise fabrique des pièces de forme rectangulaire. Une pièce peut être défectueuse à cause d'un défaut de dimension. On considère un lot de 1 600 pièces dans lequel 6 % des pièces ont un défaut de longueur (et peut-être aussi un défaut de largeur), 4 % des pièces ont un défaut de largeur (et peut-être aussi un défaut de longueur), et 2 % des pièces présentent simultanément les deux défauts de dimension.



- a. On représente cette situation par le diagramme ci-contre où Ω est l'ensemble des pièces, A l'ensemble des pièces présentant le défaut de longueur, et B l'ensemble des pièces présentant le défaut de largeur.
- b. Calculer les valeurs suivantes : $\text{Card}(A \cap B)$; $\text{Card}(A \cap \bar{B})$; $\text{Card}(\bar{A} \cap B)$; $\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$.
Puis, placer ces valeurs dans le diagramme ci-dessus après l'avoir recopié.

- c. On prélève, au hasard, une pièce dans ce lot de 1 600 pièces. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants (on donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible) :

- E_1 : « La pièce choisie présente au moins l'un des deux défauts »
- E_2 : « La pièce choisie présente un défaut et un seul »
- E_3 : « La pièce choisie présente le défaut de largeur, sachant qu'elle possède le défaut de longueur »

Où aller après le Bac ? **STMG**

» Calculer • Communiquer

En 2020, on a étudié un groupe de 800 étudiants titulaires d'un baccalauréat technologique et ayant poursuivi leurs études en BTS, BUT ou à l'Université.

Parmi ces étudiants :

- 192 étudiants sont boursiers
- 17,5 % sont inscrits à l'Université
- 58 % ont poursuivi leurs études en BTS
- $\frac{3}{7}$ des étudiants inscrits à l'université sont boursiers
- Il y a deux fois plus d'étudiants boursiers en BTS qu'en BUT

- a. Recopier et compléter le tableau croisé d'effectifs suivant :

	Boursier	Non boursier	Total
BTS			
BUT			
Université			
Total			

On choisit un étudiant au hasard et on définit les événements suivants :

- A : « l'étudiant est inscrit en BUT »
- B : « l'étudiant est boursier »

Les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

- b. Déterminer la probabilité des événements A et B.
- c. Décrire par une phrase l'évènement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.
- d. Calculer la probabilité $P_A(B)$, puis interpréter ce résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
- e. Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit en BTS sachant qu'il n'est pas boursier.

Ce test est-il fiable ? **STL ST2S**

» Calculer • Raisonner

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant si nécessaire à 10^{-3} près.

Dans un pays, il y a 3 % de la population contaminée par un virus. On s'intéresse à une ville de 150 000 personnes dans laquelle on suppose que cette proportion est respectée.

On soumet cette population à un test de dépistage de ce virus pour lequel des études ont montré que :

- parmi les malades, 2 % ont un test négatif ;
- parmi les non malades, 1 % a un test positif.

- a. Réaliser un tableau croisé d'effectifs qui résume cette situation.

- b. On choisit un individu au hasard dans cette ville et on considère les événements :

- M : « l'individu est malade » ;
- T : « le test donne un résultat positif ».

- c. Calculer les probabilités suivantes et interpréter chacun d'elles par une phrase dans le contexte de l'exercice : $P(T)$; $P(M \cap \bar{T})$; $P_{\bar{T}}(M)$; $P(M \cup T)$

- d. On appelle *valeur prédictive positive d'un test médical* la probabilité que la personne soit réellement malade si son test donne un résultat positif. Le laboratoire qui commercialise ce test affirme que la valeur prédictive de son test dépasse 95 %. Cette affirmation est-elle vraie ?



Les fichiers **Tableur**
sont à télécharger ici :
hachette-clic.fr/25mf1021

Problèmes avec outils

Plutôt musée ou cinéma ? **STMG** **Tableur**

» Représenter • Communiquer

Le fichier proposé contient des données relatives à l'offre culturelle (musée, cinéma) dans les départements de France métropolitaine.

À partir de ces deux listes, on souhaite déterminer un sous-ensemble répondant à un ou plusieurs critères.

Lecture :

- Dans l'Ain, le nombre des musées s'élève à 1,8 pour 100 000 habitants.
- Dans l'Ain, l'offre cinématographique est d'un fauteuil pour 92 personnes.

	A	B	C	D
	Code département	Département	Offre cinématographique	Musées
1				
2	01	Ain	92	1,8
3	02	Aisne	76	2,6
4	03	Allier	82	2,4
5	04	Alpes-de-Haute-Provence	36	3,0
6	05	Hautes-Alpes	29	1,4
7	06	Alpes-Maritimes	47	3,0
8	07	Ardèche	60	2,4
9	08	Ardennes	76	3,0
10	09	Ariège	58	3,9
11	10	Aube	78	3,2
12	11	Aude	67	1,9
13	12	Aveyron	48	3,9
14	13	Bouches-du-Rhône	63	1,5
15	14	Calvados	50	3,0
16	15	Cantal	54	3,5
17	16	Charente	62	1,7
18	17	Charente-Maritime	51	2,9
19	18	Cher	60	2,3

1. Préparation à la création de filtres

- Télécharger le fichier [C06_Problème46.xlsx](#).
- Sélectionner les colonnes A, B, C et D, puis cliquez sur Filtrer.

2. Utilisation des filtres

On souhaite déterminer la liste des départements dont l'offre cinématographique est d'un fauteuil pour moins de 40 personnes.

- Cliquez sur la flèche de la colonne C, puis, sélectionnez le filtre indiqué ci-contre :



- Quelle est la liste des départements obtenus ?
- Déterminer la liste des départements dont le nombre de musées est supérieur à 2,5 pour 100 000 habitants.
 - Déterminer la liste des départements dont l'offre cinématographique est d'un fauteuil pour 70 personnes ou plus et le nombre de musées est inférieur à 2 pour 100 000 habitants.

Scrabble® ! **Toutes séries** **Tableur**

» Calculer • Chercher • Communiquer

Le fichier [C06_Problème47.xlsx](#) récapitule la composition des 102 jetons d'un jeu de Scrabble® français. On considère donc ici les lettres de l'alphabet ou les jokers avec à chaque fois :

- le nombre de jetons correspondants
- le type de lettre (V pour voyelle, C pour consonne et J pour joker)
- la valeur en points
- la catégorie de valeur (F pour une valeur « faible » comprise entre 0 et 4 points et E pour une valeur « élevée » comprise entre 8 et 10 points)



On veut ici croiser le type de lettre avec sa catégorie de valeur.

- Télécharger ce fichier et réaliser un tableau croisé dynamique qui croise le type de lettre (en ligne) et la catégorie (en colonne).

Voir rabat arrière **Tableur** : 3) Réaliser un tableau croisé de données sur deux valeurs

On tire à présent un jeton au hasard parmi ces 102 jetons.

À partir du tableau produit à la question a., répondre aux questions suivantes (en arrondissant les valeurs au centième près) :

- Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton de valeur élevée ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne de valeur faible ?
- Calculer $P(V \cup E)$? Interpréter ce résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
- Tom affirme que la probabilité d'avoir un jeton de valeur élevée est plus grande si on sait que le jeton est une consonne ? Que pensez-vous de cette affirmation ?

Pour entrer dans le chapitre

7

Modélisation d'une expérience aléatoire

- Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats possibles, appelés **issues**, que l'on peut citer mais dont il est impossible de prédire lequel se réalisera.
- L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de cette expérience. On le note souvent Ω .
- Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue, un nombre compris entre 0 et 1, appelé **probabilité** de l'issue, de telle sorte que la somme des probabilités associées à chaque issue soit égale à 1.
- On appelle **événement** une partie de Ω . La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le composent ; c'est un nombre compris entre 0 et 1.

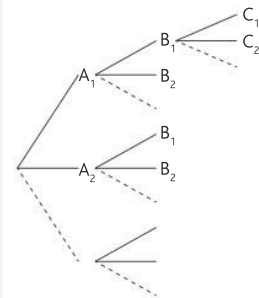
- 1 On lance une pièce de monnaie. Quel est l'univers Ω de cette expérience aléatoire ? Donner une issue possible pour cette expérience aléatoire.
- 2 On lance un dé à six faces. La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est donnée dans le tableau ci-dessous :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	p

- a. Les issues sont-elles équiprobables ?
- b. Calculer p .
- c. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat impair.

Construire et utiliser un arbre de dénombrement

- Un **arbre de dénombrement** permet de représenter et dénombrer les issues d'une expérience aléatoire comportant plusieurs épreuves.
- Pour construire un arbre, on commence par tracer une branche pour chaque issue de la première épreuve. Ensuite, à partir de chaque issue de la première épreuve, on **ajoute des branches** correspondant à chaque issue de la seconde épreuve. Ce processus se répète de manière similaire pour les épreuves suivantes.



- 3 On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Pour chaque lancer, on note F si le côté face apparaît et P si c'est le côté pile. Construire un arbre de dénombrement correspondant à cette expérience aléatoire.

Variables aléatoires



Focus métiers

Banques **Transport**
Marketing **Ingénierie**
Industrie **Assurances**

Les variables aléatoires sont des composantes fondamentales des statistiques pour prévoir les risques financiers, traiter les résultats d'un sondage, anticiper la météo ou analyser la propagation des maladies.



 **Découvrez le métier
d'ingénieur d'études**

hachette-clic.fr/25mfl022

Activités de découverte

ACTIVITÉ 1

La roue de la chance

Objectif Introduire la notion de variable aléatoire et les notations associées

Pour le jour anniversaire de ses 20 ans, un magasin a décidé de proposer à ses clients de tourner une roue divisée en 25 secteurs identiques numérotés de 1 à 25.

- Le numéro 20 permet de remporter un bon d'achat d'une valeur de 100 €.
- Les numéros multiples de 3 permettent de gagner un bon d'achat d'une valeur de 5 €.
- Le 1 et le 25 permettent de gagner un bon d'achat d'un montant de 20 €.

Pour chaque lancer de roue, on note X la valeur du gain en euros.



1 Quelles sont les valeurs possibles de X ?

2 Justifier que la probabilité que le montant du gain soit égal à 20 € est égale à 0,08.
On note cet évènement $\{X = 20\}$ et on peut écrire : $P(X = 20) = 0,08$.

3 Calculer $P(X = 5)$.

» Cours p. 174

4 Recopier puis compléter le tableau suivant :

Montant du gain a			20	
$P(X = a)$			0,08	

À noter On dit qu'on a déterminé la *loi de probabilité* de X .

5 Calculer $P(X \leq 20)$. Donner la signification de ce résultat dans le contexte.

ACTIVITÉ 2

Espérance de gain

Objectif Découvrir la notion d'espérance mathématique à travers une situation concrète

Pour une tombola, on a préparé 100 enveloppes : une enveloppe contient 20 €, cinq enveloppes contiennent 10 €, dix enveloppes contiennent 5 € et toutes les autres sont vides.

Pour avoir le droit de choisir une enveloppe au hasard, il faut payer une mise de 2 €. Soit X la variable aléatoire qui, pour une enveloppe choisie au hasard, donne le gain algébrique en euros (c'est-à-dire en tenant compte de la mise).



1 Donner les valeurs possibles de X .

2 Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

Valeurs x_i	$x_1 = -2$	$x_2 =$	$x_3 =$	$x_4 =$
Probabilités $p_i = P(X = x_i)$	$p_1 =$	$p_2 =$	$p_3 =$	$p_4 =$

3 Calculer le gain (algébrique) d'une personne qui aurait acheté toutes les enveloppes. En déduire dans ce cas le gain moyen par enveloppe achetée.

» Cours p. 174

4 Ce jeu semble-t-il plus favorable au participant ou à l'organisateur de la tombola ?

5 Calculer la valeur de $e = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + p_4 \times x_4$.
Quel résultat retrouvez-vous ?

À noter Le nombre e s'appelle « *espérance mathématique* de la variable aléatoire X » et on le note $E(X)$.

Enquête client

Objectif Découvrir et utiliser la répétition d'épreuves de Bernoulli

Un magasin réalise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Un employé du magasin appelle certains clients pour leur proposer de participer à l'enquête. À chaque appel, il y a une probabilité de 35 % que le client accepte de répondre à l'enquête et, dans les autres cas, le client refuse.



PARTIE A

L'employé du magasin appelle un client :

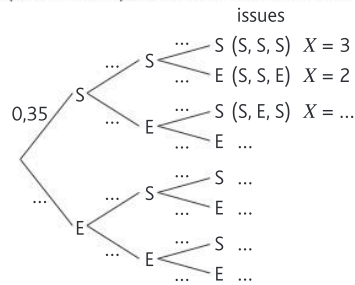
- 1 Quelle est la probabilité que le client accepte de répondre à l'enquête ? Quelle est la probabilité que le client refuse ?
- 2 Cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli. Les deux issues possibles sont le succès (le client accepte) et l'échec (le client refuse). Le paramètre p de cette épreuve de Bernoulli est la probabilité du succès. Quelle est la valeur de ce paramètre dans cet exercice ?

PARTIE B

Lors de ce jeu, on note les évènements : S « le client accepte » et E « le client refuse ». Ainsi $P(S) = 0,35$. L'employé du magasin appelle trois clients, on suppose que la réponse de chaque client est indépendante de celle des autres clients. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le client accepte) lors de ces trois appels.

3 Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

4 Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.



- 5 Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : (S, S, E), (S, E, S) et (E, S, S).
- 6 En déduire la probabilité de l'évènement $X = 2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

» Cours p. 176

Expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes

Arbre de probabilités pondéré

Définitions

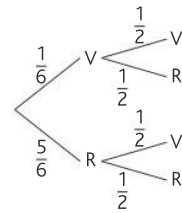
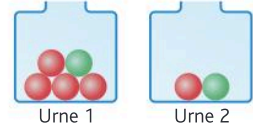
- Un arbre de probabilités est un outil utilisé pour modéliser une situation comportant plusieurs épreuves.
- Un arbre de probabilités est dit « **pondéré** » si chaque branche représente un évènement possible avec la probabilité associée.
- Deux épreuves sont **indépendantes** lorsque les résultats de l'une n'affectent pas les probabilités de réalisation de l'autre.

EXEMPLE

On dispose des deux urnes comme indiqué ci-contre.

On prélève au hasard une bille successivement dans chaque urne. On note les évènements : R « la bille prélevée est rouge » et V « la bille prélevée est verte ».

- L'expérience aléatoire est constituée de deux épreuves successives.
- Le résultat du premier prélèvement n'affecte pas les probabilités des résultats du second prélèvement, puisque les tirages se font dans des urnes différentes. Les deux épreuves sont donc indépendantes.



Remarque

(V, R) est l'issue où l'on obtient une bille verte, puis une bille rouge lors de cette expérience aléatoire. Cette issue est représentée sur l'arbre par un **chemin**. Un chemin de l'arbre est constitué de **branches**.

Arbres et calculs de probabilités

Propriétés

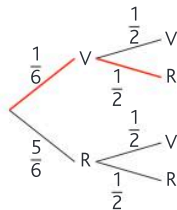
On considère une expérience aléatoire comportant plusieurs épreuves et représentée par un arbre pondéré.

- La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités indiquées sur chaque branche du chemin correspondant. C'est le **principe multiplicatif**.
- Si un évènement est constitué de plusieurs issues, alors sa probabilité est égale à la somme des probabilités de ces issues. C'est le **principe additif**.
- La somme des probabilités des branches provenant d'un même nœud est égale à 1.

EXEMPLES

Dans l'exemple précédent, on peut calculer :

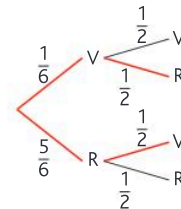
- La probabilité p_1 d'obtenir une bille verte, puis une bille rouge.



On utilise le principe multiplicatif.

$$p_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

- La probabilité p_2 d'obtenir exactement une bille rouge.



Cet évènement est constitué de deux issues : (V, R) et (R, V).

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}_{P(V, R)} + \underbrace{\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}}_{P(R, V)} = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

EXO 1

Représenter une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre de probabilités

On lance une pièce bien équilibrée, puis on tire une boule dans une urne opaque contenant une boule rouge, deux boules vertes et deux boules bleues. Réaliser un arbre pondéré de probabilités.

Méthode

- On analyse l'énoncé pour reconnaître les deux épreuves indépendantes qui se succèdent.
- On modélise la première épreuve avec un arbre où figure la probabilité de chacune des deux issues.
- À partir de chaque issue, on continue l'arbre avec un second niveau modélisant la seconde épreuve.

Réponse

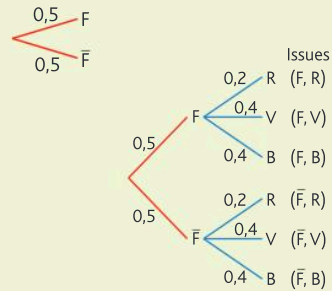
1 La première épreuve est le lancer de la pièce. La seconde épreuve, indépendante de la première, est le tirage dans l'urne.

2 Pour la **première épreuve** (le lancer de la pièce) :
Les issues sont F : « obtenir face » et \bar{F} : « obtenir pile ».
 $P(F) = P(\bar{F}) = 0,5$.

3 Pour la **seconde épreuve** (le tirage dans l'urne)
Les issues sont :

- R : « obtenir une boule rouge »
- V : « obtenir une boule verte »
- B : « obtenir une boule bleue »

$$P(R) = \frac{1}{5} = 0,2 ; P(V) = \frac{2}{5} = 0,4 ; P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$$



» Exercices 5 et 6 p. 182

EXO 2

Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre de probabilités

- On reprend la situation de l'exemple précédent.
- Calculer la probabilité p_1 d'obtenir pile, puis une boule verte.
 - Calculer la probabilité p_2 d'obtenir face, puis une boule rouge ou bleue.

Méthode

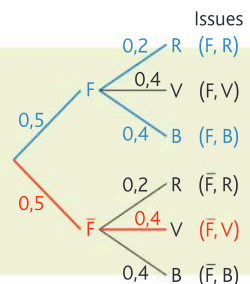
- On repère les chemins correspondants aux différentes issues.
- Pour calculer la probabilité d'une issue, on applique le **principe multiplicatif**.
- Si un événement est constitué de plusieurs issues, alors sa probabilité est égale à la somme des probabilités de ses issues.

Réponse

1 L'évènement : « obtenir pile, puis une boule verte » est l'issue (\bar{F}, V) .
L'évènement : « obtenir face, puis une boule rouge ou bleue » est constitué des issues (F, R) et (F, B) .

2 $p_1 = P(\bar{F}, V) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$
La probabilité d'obtenir pile, puis une boule verte est égale à 0,2.

3 $p_2 = P(F, R) + P(F, B) = 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,4 = 0,3$
La probabilité d'obtenir face, puis une boule rouge ou bleue est égale à 0,3



» Exercices 7 et 10 p. 182

Notion de variable aléatoire discrète

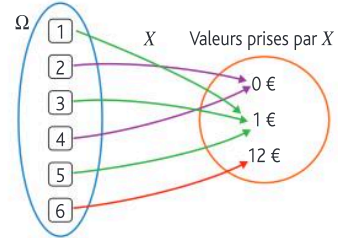
Définition

On considère une expérience aléatoire dont l'univers des issues possibles est noté Ω . Définir une variable aléatoire sur Ω , c'est associer une valeur réelle à chaque issue.

EXEMPLE

On lance un dé cubique et on observe le nombre inscrit sur la face du dessus. Si on obtient un nombre impair, on gagne 1 € ; si on obtient le nombre 6 on gagne 12 € ; sinon on ne gagne rien.

En associant à chaque issue possible de l'expérience aléatoire une valeur (le gain en euro ici), on a défini une variable aléatoire qu'on peut noter X et schématiser de la façon suivante :



Loi d'une variable aléatoire

Notations

Soit a un nombre réel.

- $\{X = a\}$ est l'évènement formé de toutes les issues de Ω qui sont associées à la valeur a .
- $\{X \leq a\}$ est l'évènement formé de toutes les issues de Ω qui sont associées à des valeurs inférieures ou égales à a .

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P .

Si on note x_1, x_2, \dots, x_n , toutes les valeurs prises par X , alors la loi de probabilité de X est la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$ (pour i entier allant de 1 à n).

Remarques

- Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, la probabilité $P(X = x_i)$ est noté p_i .
- La loi de probabilité d'une variable aléatoire est en général présentée à l'aide d'un tableau :

Valeurs prises par la variable $X : x_i$	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité de l'évènement associé : $p_i = P(X = x_i)$	$p_1 = P(X = x_1)$	$p_2 = P(X = x_2)$...	$p_n = P(X = x_n)$

- La somme des probabilités dans ce tableau doit toujours être égale à 1.

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X prenant des valeurs x_1, \dots, x_n avec des probabilités respectives p_1, \dots, p_n est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par : $E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$.

3 Interpréter les écritures $\{X = a\}$ et $\{X \leq a\}$ en situation et calculer les probabilités correspondantes

EXO

➤ On reprend l'exemple de la page 174. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de dé, donne le gain (en euros) obtenu. Décrire les évènements $\{X = 0\}$, $\{X = 12\}$ et $\{X \leq 1\}$ et calculer leurs probabilités.

Méthode

- 1 On associe à chaque issue de l'expérience aléatoire la valeur prise par X en s'aidant d'un diagramme.
- 2 $\{X = a\}$ est l'évènement formé de toutes les issues de Ω qui donnent la valeur a .
 $\{X \leq a\}$ est l'évènement formé de toutes les issues de Ω qui donnent des valeurs inférieures ou égales à a .
- 3 La probabilité d'un évènement se calcule en **ajoutant** les probabilités de chacune des issues qui le composent.

Réponse

- 1 On reprend le diagramme de la page 174.
- 2 • $\{X = 0\}$ est l'évènement formé de toutes les issues qui donnent 0 €. $\{X = 0\}$ est donc composé de deux issues favorables : « obtenir un 2 » et « obtenir un 4 » : $\{X = 0\} = \{2; 4\}$.
• $\{X = 12\}$ est l'évènement formé de toutes les issues qui donnent 12 €. Il y a donc, dans ce cas, une seule issue « obtenir 6 » : $\{X = 0\} = \{6\}$.
• $\{X \leq 1\}$ est l'évènement formé de toutes les issues qui conduisent à un gain de 1 € ou moins. Ici, on a : $\{X \leq 1\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
- 3 Comme le dé lancé est bien équilibré, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Ainsi :
• $P(X = 0) = P(2) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ • $P(X = 12) = P(6) = \frac{1}{6}$
• $P(X \leq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

➤ Exercices 21 et 23 p. 185

4 Déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance

EXO

➤ On reprend la situation de l'exemple p. 174. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

Méthode

- 1 On détermine toutes les valeurs x_1, x_2, \dots que peut prendre X .
- 2 On calcule toutes les probabilités $p_i = P(X = x_i)$ et on résume les résultats dans un tableau.
- 3 On vérifie que la somme des probabilités du tableau est bien égale à 1.
- 4 Pour calculer l'espérance à partir de la loi de X , on utilise $E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$.

Réponse

- 1 Les valeurs possibles de X sont 0, 1 et 12 euros.
- 2 Le dé cubique est bien équilibré donc nous sommes dans un cas d'équiprobabilité :

Valeurs prises par $X : x_i$	0	1	12
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$P(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$P(X = 12) = \frac{1}{6}$

- 3 La somme des probabilités est bien égale à 1 : $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

- 4 $E(X) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{6} \times 12 = 1,5$

Interprétation : Si on lance un très grand nombre de fois le dé, la valeur moyenne du gain obtenu sera proche de 1,5 €.

➤ Exercices 32 et 36 p. 186

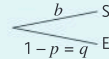
Épreuve de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant **exactement deux issues**.

- L'une est nommée succès S de probabilité $P(S) = p$.
- L'autre est alors appelée échec E de probabilité $P(E) = 1 - p$.

Une épreuve de Bernoulli peut être représentée par un arbre comme ci-contre.



EXEMPLE

Une personne se présente devant la porte de l'ascenseur à l'entrée d'un immeuble. L'ascenseur peut être au rez-de-chaussée, avec une probabilité égale à 0,4.

Il pourra utiliser l'ascenseur immédiatement s'il se situe au rez-de-chaussée (succès), il devra attendre dans les autres cas (échec).

- L'expérience aléatoire a deux issues le succès S ou l'échec E .
- $p = P(S) = 0,4$; $P(E) = 1 - p = 0,6$.
- Cette épreuve de Bernoulli peut être représentée à l'aide de l'arbre ci-contre.



Loi de Bernoulli

Définition

Soit p un nombre réel avec $p \in [0; 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p$.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la probabilité du succès est $p = 0,4$. On définit la loi de Bernoulli par la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès (l'ascenseur est au rez-de-chaussée), et la valeur 0 en cas d'échec (dans les autres cas).

L'espérance de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = 0,6 \times 0 + 0,4 \times 1 = 0,4.$$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,6	0,4

Remarque

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p est : $E(X) = p$.

Répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes

Propriétés

- La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes peut être représentée à l'aide d'un arbre de probabilités.
- On peut ainsi définir une **variable aléatoire N qui compte le nombre de succès** obtenus lors de la **répétition** de n épreuves de Bernoulli.

EXEMPLE

Voir Exo résolu 7 p. 177

5 Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli

Une urne contient quatre boules vertes, cinq boules rouges. Un joueur tire au hasard l'une des boules. Il gagne (succès) s'il tire une boule verte. Il perd (échec) si la boule est rouge. Représenter cette situation à l'aide d'un l'arbre de probabilités.

Méthode

- On s'assure que l'expérience aléatoire possède exactement deux issues.
- L'une des deux issues sera le succès (S), l'autre l'échec (E).
- On calcule les probabilités : $p = P(S)$; $q = P(E) = 1 - p$.

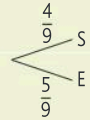
» Exercice 50 p. 188

Réponse

- Cette expérience aléatoire comporte deux issues : « la boule est verte » et « la boule est rouge ».
- On note les événements : S si la boule est verte, et E si la boule est rouge.

$$p = P(S) = \frac{4}{9}$$

$$q = P(E) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$



6 Calculer une loi et une espérance de Bernoulli

Un joueur de fléchettes touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7. Il effectue un lancer. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le joueur touche le centre de la cible (succès) et la valeur 0 dans les autres cas (échec). Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis l'espérance de cette loi.

Méthode

- Préciser la probabilité p du succès, afin de déterminer le paramètre de la loi de Bernoulli. Puis calculer la probabilité q de l'échec.
- Compléter le tableau.
- Utiliser la formule de l'espérance : $E(X) = p$

» Exercice 43 p. 187

Réponse

- $p = P(X = 1) = 0,7$
 $q = P(X = 0) = 1 - 0,7 = 0,3$
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,3	0,7

- L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = 0,7$

7 Répétition d'épreuves de Bernoulli

Un vendeur contacte trois clients successivement. La probabilité qu'un client réponde favorablement à sa demande est égale à $\frac{1}{3}$. On suppose que les réponses des clients sont indépendantes.

On pose N la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses favorables. Calculer la probabilité qu'exactly un client réponde favorablement.

Méthode

- On construit l'arbre de probabilités correspondant.
- Sur cet arbre, on repère les issues favorables.
- On calcule les probabilités en utilisant le principe multiplicatif.

Les issues favorables sont (S, E, E), (E, S, E) et (E, E, S).

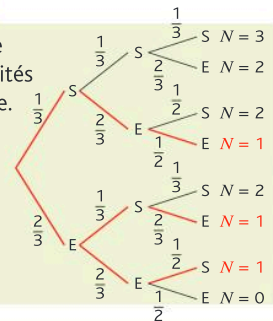
$$P(N = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

La probabilité qu'exactly un client réponde favorablement est égale à $\frac{4}{9}$.

» Exercice 52 p. 188

Réponse

- Arbre de probabilités ci-contre.



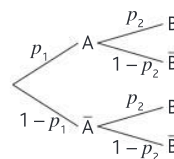
Je retiens

1. Expérience aléatoire à plusieurs épreuves

- Une expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes peut être représentée à l'aide d'un **arbre de probabilités**.
- La probabilité d'une issue est égale au **produit des probabilités** indiquées sur chaque branche du chemin correspondant (**principe multiplicatif**).

➔ **EXEMPLE** : Dans l'arbre ci-contre, la probabilité du chemin A – B est :

$$P(A, B) = p_1 \times p_2.$$



2. Variable aléatoire

- Une **variable aléatoire X** discrète associe, à chaque issue d'une expérience aléatoire, une valeur $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- La **loi de probabilité** de X est l'ensemble des couples $(x_i; p_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $p_i = P(X = x_i)$.

Elle est souvent donnée à l'aide d'un tableau :

x_i	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

La somme des probabilités doit être égale à 1 : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

- L'**espérance** de la variable aléatoire X est : $E(X) = x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n$.

Après un très grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire, la moyenne des valeurs de X est proche de $E(X)$.

3. Épreuves et loi de Bernoulli

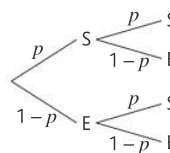
- Une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($0 \leq p \leq 1$) est une expérience aléatoire à deux issues appelées le succès S et l'échec E.

$$P(S) = p \text{ et } P(E) = 1 - p$$

- La **répétition** de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, peut aussi se représenter à l'aide d'un arbre de probabilités.

- La **loi de Bernoulli** de paramètre p est la loi suivie par la variable aléatoire qui, dans le cadre d'une épreuve de Bernoulli, associe le succès à la valeur 1 et l'échec à la valeur 0.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p



- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors : $E(X) = p$.

Je me teste

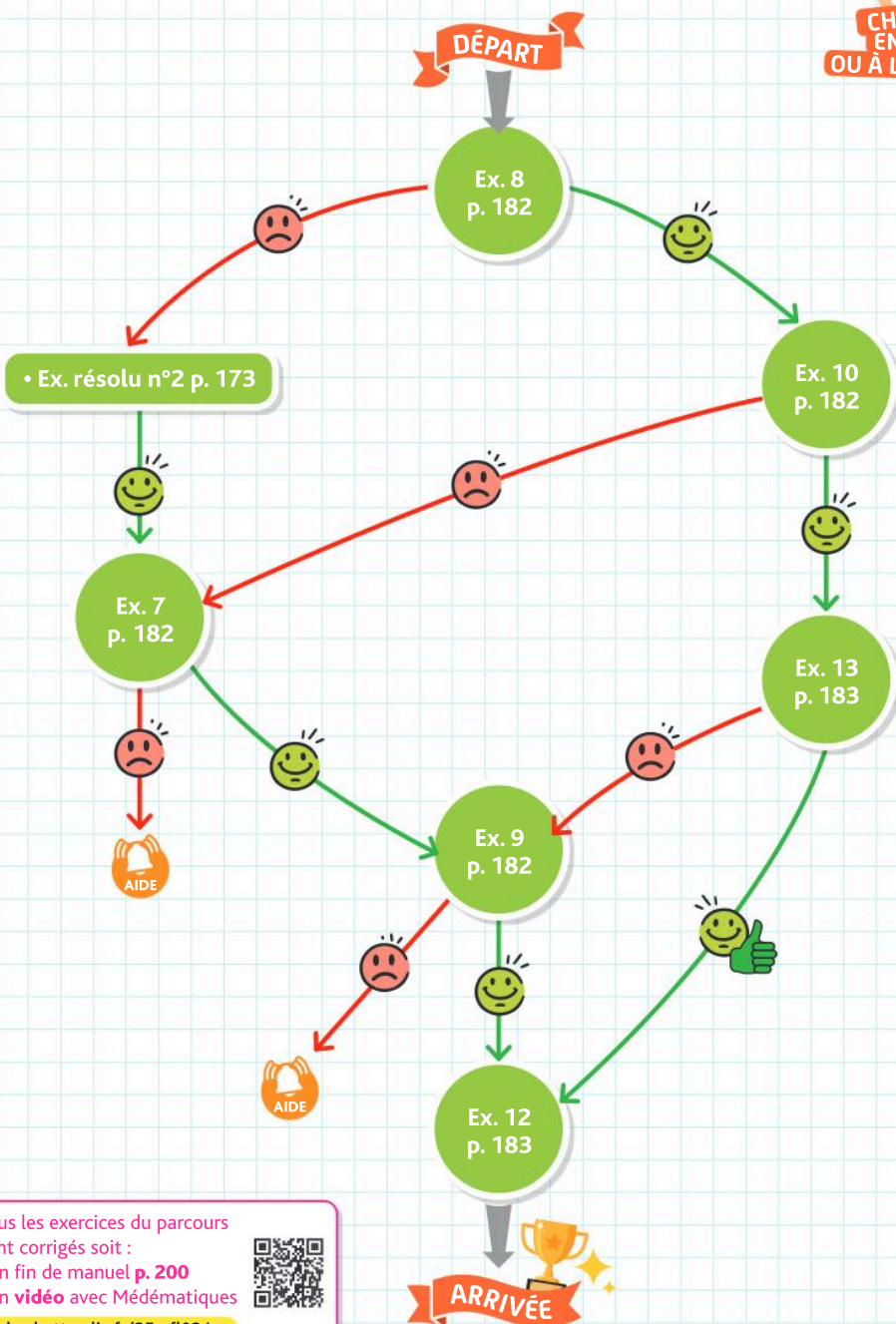


QCM interactif
et auto-corrigé

hachette-clic.fr/25mfl023

Je me prépare à une évaluation

Je sais calculer une probabilité à l'aide d'un arbre de probabilités



Tous les exercices du parcours
sont corrigés soit :

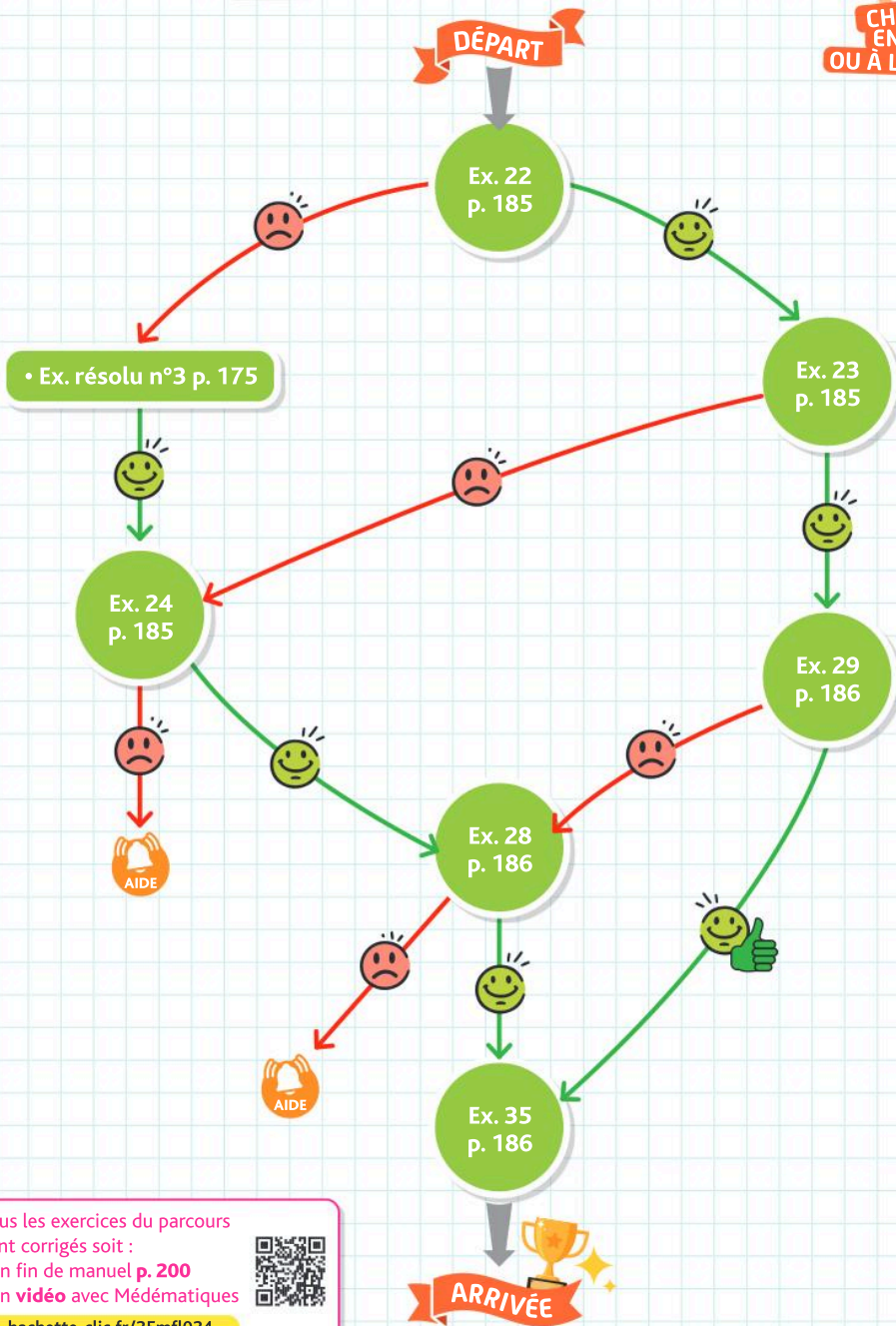
- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mfl024

Je me prépare à une évaluation

Je sais calculer des probabilités et l'espérance associées à une variable aléatoire



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

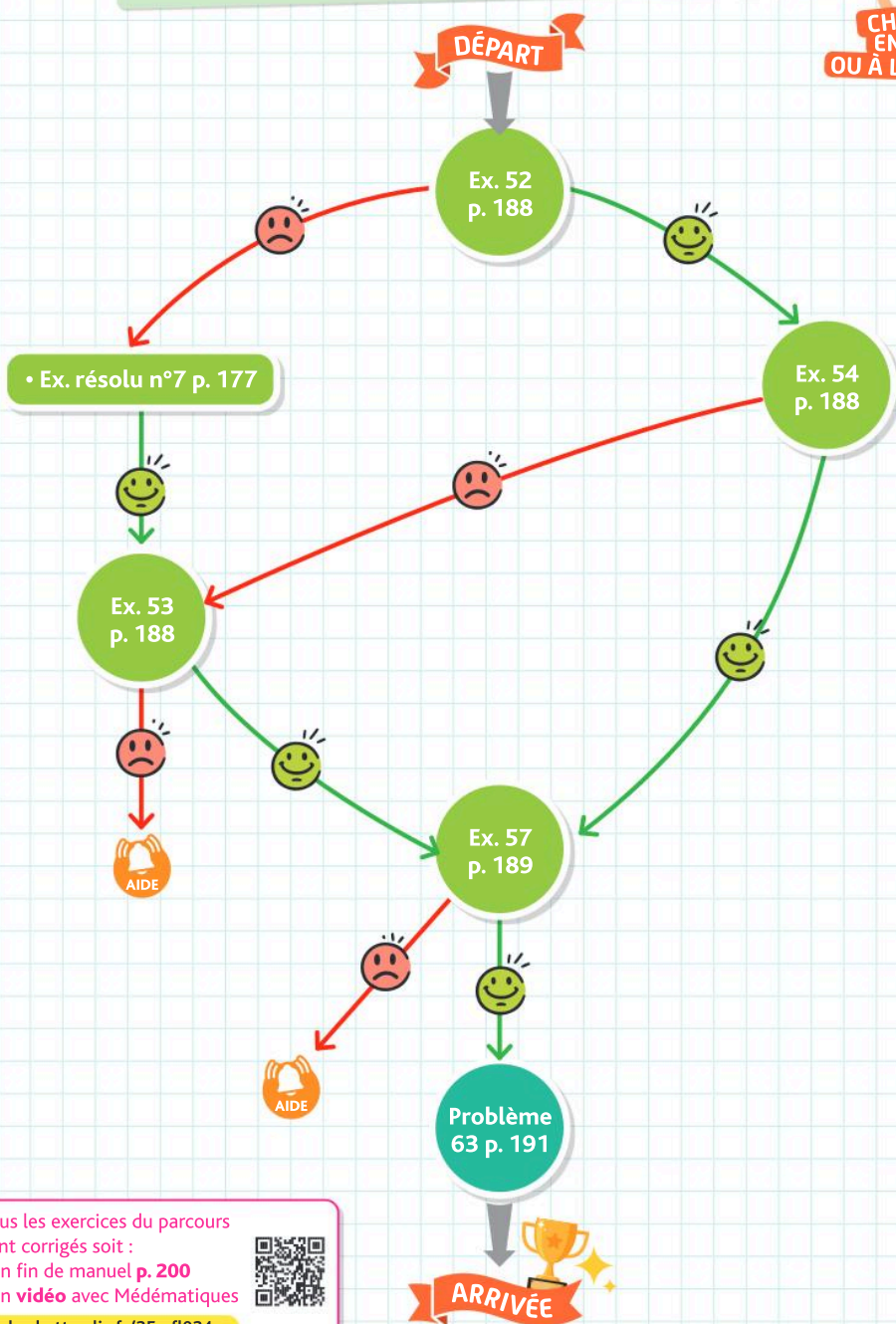
- en fin de manuel **p. 200**
- en **vidéo** avec Médématiques

hachette-clic.fr/25mfl024



Je me prépare à une évaluation

Je sais reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli et calculer des probabilités et l'espérance associée



Tous les exercices du parcours sont corrigés soit :

- en fin de manuel p. 200
- en vidéo avec Médémathiques



hachette-clic.fr/25mf1024

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl024

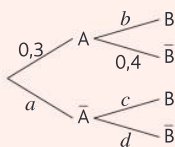


1 Expérience aléatoire à plusieurs épreuves

Questions flash

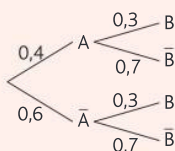
1 L'arbre ci-contre représente une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

Déterminer les valeurs a , b , c et d .

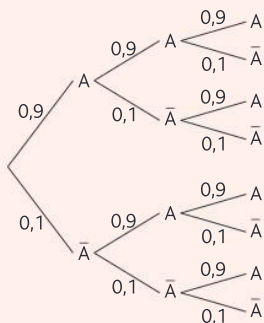


2 L'arbre ci-contre représente une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.

Calculer la probabilité de l'issue (A, \bar{B}) .



3 L'arbre ci-dessous représente la répétition de trois épreuves identiques et indépendantes.



Calculer la probabilité de l'issue (\bar{A}, A, \bar{A}) .

4 On lance successivement un dé bien équilibré à deux reprises. Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 consécutifs ?

- Un **arbre de probabilités** est un schéma pondéré décrivant l'ensemble des issues possibles lors d'une expérience aléatoire à plusieurs épreuves successives.
- Un **chemin** de l'arbre est une succession (ou une liste) d'événements.
- La probabilité qu'un chemin se réalise est le **produit** des probabilités notées sur ses branches (**principe multiplicatif**).

On tire une boule au hasard dans une urne opaque contenant trois boules vertes et deux boules bleues.

- On note les événements suivants :
- V : « obtenir une boule verte »
 - B : « obtenir une boule bleue »

a. Calculer $P(V)$, puis $P(B)$.

b. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités. On y fera apparaître toutes les issues possibles.

On lance trois fois de suite une pièce truquée. Les issues sont F : « obtenir face » et \bar{F} : « obtenir pile ». La probabilité d'obtenir face est égal à 0,8. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités. On y fera apparaître toutes les issues possibles.

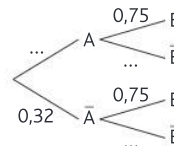
On donne, ci-contre, l'arbre de probabilités associé à une expérience aléatoire.

a. Recopier et compléter l'arbre en indiquant les probabilités manquantes.

b. Quelle est la valeur de $P(A)$?

c. Calculer la probabilité de l'issue (A, B) .

d. Calculer la probabilité de l'issue (A, \bar{B}) .



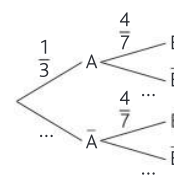
On donne, ci-dessous, l'arbre de probabilités associé à une expérience aléatoire.

a. Recopier et compléter l'arbre en indiquant les probabilités manquantes.

b. Quelle est la valeur de $P(\bar{A})$?

c. Calculer la probabilité de l'issue (\bar{A}, B) .

d. Calculer la probabilité de l'issue (A, \bar{B}) .



Une entreprise fabrique chaque jour des T-shirts en grande quantité. Une étude a permis de constater que 12 % des vêtements présentent un défaut.



On prélève au hasard deux T-shirts dans la production ; celle-ci est suffisamment importante pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. On note les événements :

- D : « le T-shirt présente un défaut »
- \bar{D} : « le T-shirt ne présente aucun défaut »

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux vêtements n'ait de défaut ?

c. Quelle est la probabilité que seul le premier T-shirt présente un défaut ?

Dans une bibliothèque municipale, 20 % des livres empruntés sont des bandes dessinées.

Deux livres sont empruntés successivement par deux lecteurs. Le stock de livres est suffisamment

Corrigé

important pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise de deux livres. On note l'évènement : A « le lecteur a emprunté une bande dessinée ».

- Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- Quelles sont les différentes issues possibles concernant le choix des deux livres empruntés ?
- Quelle est la probabilité qu'aucun des deux livres ne soit une bande dessinée ?
- Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux livres soit une bande dessinée ?

Dans un cinéma, les spectateurs peuvent choisir entre trois types de film (action, comédie et drame).

Une étude a montré que $\frac{4}{9}$ des spectateurs ont choisi un film d'action, $\frac{1}{3}$ des spectateurs ont choisi une comédie et les autres un drame.

1. On choisit au hasard, un spectateur, ayant participé à cette étude. Calculer la probabilité que le spectateur ait choisi un drame.

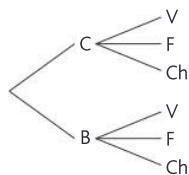
2. On choisit maintenant, au hasard et successivement, deux spectateurs ayant participé à cette étude. Le nombre de spectateurs est suffisamment important pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. On note les évènements :

- A : « le spectateur a choisi un film d'action »
- C : « le spectateur a choisi une comédie »
- D : « le spectateur a choisi un drame »

- Construire un arbre de probabilités représentant la situation.
- Quelles sont les différentes issues possibles concernant les choix de films des deux spectateurs ?
- Quelle est la probabilité que les deux spectateurs aient choisi un film d'action ?
- Quelle est la probabilité que le premier spectateur ait choisi une comédie et le second un drame ?

Corrigé

Un marchand de glace propose à ses clients de choisir entre deux supports, un cornet (C) ou un bol (B), puis entre trois parfums : vanille (V), fraise (F) ou chocolat (Ch).



Les choix du support et du parfum sont indépendants.

- 70 % des clients choisissent le cornet, et les autres le bol.
 - 50 % des clients choisissent la vanille, 15 % la fraise et les autres le chocolat.
- Compléter l'arbre.
 - Quelle est la probabilité qu'un client choisisse un bol à la fraise ?
 - Quelle est la probabilité qu'un client choisisse un cornet au chocolat ?

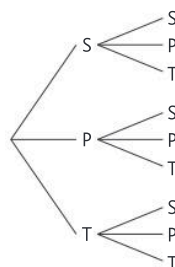
Corrigé

Une association de lycéens est constituée de quatre élèves de seconde, trois élèves de première, et trois élèves de terminale. Deux réunions sont prévues dans l'année. À la fin de chaque réunion, un élève est choisi au hasard pour rédiger le compte rendu. Le second choix est indépendant du premier, un même élève peut donc être choisi deux fois.

On note les évènements :

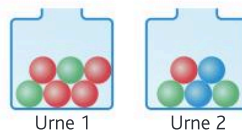
- S : « l'élève choisi est en seconde »
- P : « l'élève choisi est en première »
- T : « l'élève choisi est en terminale »

- Calculer $P(S)$, $P(P)$ et $P(T)$.
- Recopier et compléter l'arbre de probabilités.



- Calculer la probabilité de l'issue (T, S).
- Calculer la probabilité que le premier élève choisi soit en terminale et que le second soit en première.
- Calculer la probabilité que les deux élèves choisis soient en seconde.
- Calculer la probabilité qu'exactement un seul des deux élèves choisis soit en seconde.

Deux urnes contiennent des billes dont les couleurs peuvent être différentes.



On prélève une bille dans chaque urne.

On notera par exemple $P(V_1)$, la probabilité de l'évènement : « La bille prélevée dans l'urne 1 est verte ».

On pourra éventuellement s'aider d'un arbre de probabilités.

Les réponses seront données sous forme d'une fraction irréductible.

- Calculer les probabilités suivantes : $P(V_1)$; $P(V_2)$; $P(R_1)$; $P(R_2)$; $P(B_2)$
- Calculer : $P(V_1 \cap R_2)$; $P(R_1 \cap V_2)$; $P(V_1 \cap B_2)$
- Calculer la probabilité de l'évènement A : « les deux billes ont la même couleur ».
- En déduire la probabilité de l'évènement B : « les deux billes sont de couleurs différentes ».

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématicques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl024



Léna organise une activité dans un centre de loisirs. Pour déterminer quelle activité sera organisée et qui la dirigera, elle choisit une activité au hasard parmi les 12 activités proposées dans ce centre de loisirs.

Les activités proposées sont les suivantes :

- Quatre activités sportives (football, tennis, badminton, escalade) ;
- Trois activités artistiques (peinture, culture, photographie) ;
- Cinq activités culturelles (lecture, musique, théâtre, découverte des langues, atelier scientifique).

Ensuite, indépendamment de l'activité choisie, elle sélectionne au hasard l'un des deux animateurs du centre de loisirs, Paul ou Loïc, pour diriger l'activité.

On note les évènements suivants :

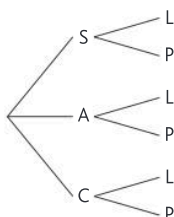
- S : « l'activité choisie est une activité sportive »
- A : « l'activité choisie est une activité artistique »
- C : « l'activité choisie est une activité culturelle »
- P : « l'animateur choisi est Paul »
- L : « l'animateur choisi est Loïc »

a. Calculer les probabilités suivantes : $P(S)$, $P(A)$ et $P(C)$.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités représentant cette situation.

c. Calculer la probabilité que l'activité proposée soit une activité culturelle dirigée par Loïc.

d. Calculer la probabilité que l'activité proposée ne soit pas une activité sportive et qu'elle soit dirigée par Paul.



2 Variables aléatoires

• Pour une variable aléatoire X donnée :

- $\{X = a\}$ désigne l'évènement composé de toutes les issues qui donnent la valeur a par la variable aléatoire X .
- $\{X \leq a\}$ désigne l'évènement composé de toutes les issues qui donnent des valeurs inférieures ou égales à a par la variable aléatoire X .

Questions flash

16 Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules bleues et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 3 boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Décrire l'évènement $\{X = 2\}$.

17 On lance simultanément deux dés cubiques et on appelle S la variable aléatoire correspondant à la somme des nombres apparus sur les faces supérieures.

- Quelles sont les valeurs prises par S ?
- Décrire l'évènement $\{S = 5\}$
- Décrire l'évènement $\{S \leq 6\}$

18 Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs -10 ; 0 ; 5 ; 20 et 100 .

Définir par une phrase les évènements suivants et donner les valeurs de X qui lui sont favorables.

- $\{X = 5\}$
- $\{X = 15\}$
- $\{X < 5\}$
- $\{X \leq 0\}$
- $\{X \leq 100\}$
- $\{X \geq 100\}$

On lance 10 fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de dix lancers compte le nombre de fois que le 6 a été obtenu.



a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
 b. Utiliser la notation adaptée pour écrire les évènements suivants :

- A : « On a obtenu 3 fois un 6 »
- B : « Le dé est tombé au moins une fois sur 6 »
- C : « On a obtenu au plus 2 fois un 6 »
- D : « Le dé est tombé plus de 5 fois sur 6 »

Marius mise 3 € puis tire au hasard un jeton dans un sac opaque contenant cinq jetons numérotés de 1 à 5. Il gagne alors un montant en euros égal au double du numéro indiqué sur le jeton.

On appelle G la variable aléatoire qui, à chaque partie de ce jeu, donne le gain algébrique de Marius en euros (on parle d'un gain algébrique lorsque celui-ci peut être négatif dans le cas d'une perte)

a. Quelles sont les valeurs possibles de G ?
 b. Utiliser la notation adaptée pour écrire les évènements suivants :

- A : « Marius a gagné 5 € »
- B : « Marius a gagné au moins un euro »
- C : « Marius a gagné plus de 1 € »
- D : « Marius a gagné au plus 3 euros »

• Donner la loi d'une variable aléatoire X revient à compléter un tableau comme le suivant, où les x_i sont les valeurs possibles de X .

Valeurs	x_1	x_2	...	x_n
Probabilités	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$...	$P(X = x_n)$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	2	3	5	10
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,20	0,45	0,1

Déterminer les probabilités des événements suivants :

- a. $\{X = 3\}$ c. $\{X < 3\}$ e. $\{X \geq 2\}$
 b. $\{X \leq 3\}$ d. $\{X = 0\}$ f. $\{2 \leq X \leq 5\}$

Dans les exercices 22 et 23, un adhérent peut emprunter dans une médiathèque des livres, CD, DVD... Il ne peut cependant emprunter que 4 livres et 5 CD au maximum simultanément.

Corrigé

On note X la variable aléatoire qui, à chaque adhérent choisi au hasard, associe le nombre de livres empruntés.

- a. Préciser les valeurs que peut prendre X .
 b. Décrire à l'aide d'une phrase les événements $\{X = 0\}$ et $\{X \leq 2\}$.
 c. Donner l'écriture mathématique de l'évènement contraire de $\{X = 0\}$, décrire cet évènement à l'aide d'une phrase.

Corrigé

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque adhérent, associe le nombre de CD empruntés.

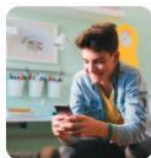
La loi de probabilité de Y est donnée dans le tableau suivant :

y	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

- a. De quel évènement la probabilité est-elle égale à 0,15 ?
 b. Calculer $P(Y \leq 2)$ puis interpréter ce résultat par une phrase dans le contexte.
 c. Calculer $P(Y \geq 4)$ puis interpréter ce résultat par une phrase dans le contexte.

Vidéo

En France, plus de 2 milliards de téléchargements d'applications mobiles ont été réalisés durant l'année 2023. Arthur télécharge entre 0 et 5 applications par mois.



On note N la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, donne le nombre d'applications qu'Arthur a téléchargées ce mois-ci.

Valeur k	0	1	2	3	4	5
$P(N = k)$	0,15	0,2	0,19	0,3	0,09	p

- a. Calculer la valeur de p .
 b. Calculer la probabilité qu'Arthur télécharge au moins une application au cours du mois.
 c. Calculer la probabilité qu'Arthur télécharge au plus trois applications au cours du mois.

Dans les exercices 25 et 26, un centre de loisirs propose chaque jour une activité obligatoire à choisir parmi trois dont les tarifs sont les suivants :

Activité	Jeux	Piscine	Cinéma
Prix	1 €	3 €	5 €

Aurélié dépose, chaque jour de la semaine, ses deux enfants dans ce centre de loisirs.

On note X la variable aléatoire qui, pour une journée choisie au hasard, associe le prix payé par Aurélié pour ces activités.

- a. Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\{X = 2\}$ dans le contexte.
 b. Même question avec $\{X = 6\}$.
 c. Déterminer les valeurs possibles pour X .

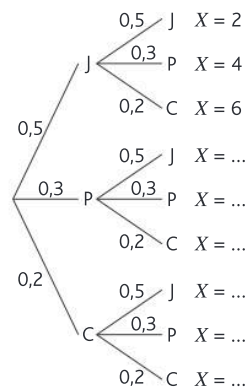
Les statistiques sur le centre aéré montrent qu'un enfant choisit les jeux dans 50 % des cas, la piscine dans 30 % des cas et qu'il choisira le cinéma dans les autres cas. On suppose également que les deux enfants choisissent leur activité indépendamment l'un de l'autre.

On note X la variable aléatoire égale au prix payé par la famille pour ces activités.

On note les événements :

- J : « l'enfant choisit les jeux »
- P : « l'enfant choisit la piscine »
- C : « l'enfant choisit le cinéma »

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant en indiquant les valeurs de X .



- b. Calculer $P(X = 2)$.
 c. Démontrer que $P(X = 4) = 0,3$.
 d. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x_i	2	4	6		
$P(X = x_i)$		0,3			

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl024



Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

Valeurs	x_1	x_2	...	x_n
Probabilités	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$$

Dans les exercices 27 à 31, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans un tableau. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X .

x_i	1	3	7
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

Corrigé

x_i	0	5	6	9
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,3	0,3

Corrigé

x_i	-5	-1	1	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

x_i	-7	0	1	9
$P(X = x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

x_i	-5	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	0,6	0,2

On considère un dé truqué de façon que la probabilité d'obtenir la face « PILE » est égale à 0,4. Le joueur gagne 3 € s'il obtient la face pile, sinon il doit 2 € au maître du jeu.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de la pièce, donne le gain (algébrique) du joueur.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X .
- Peut-on dire que ce jeu est équitable ?

Carla est une élève du lycée. On a suivi pendant trois ans ses connexions à son espace numérique de travail (ENT) durant les périodes scolaires.

On considère X la variable aléatoire qui, une journée choisie au hasard, associe le nombre de connexion de Carla à son espace numérique de travail.

Valeur k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,5	0,3	0,1

- Calculer $P(X \leq 2)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Pour financer un voyage scolaire, les élèves de la classe de 1^{re} B ont décidé d'organiser une tombola. Les élèves ont réussi à vendre 250 billets parmi lesquels 15 seulement sont gagnants. La valeur des lots est répertoriée dans le tableau suivant :

Valeur du lot en euros	120	70	25	15
Nombre de billets	1	2	4	8

Mario achète un billet qui lui est attribué au hasard. On note X la variable aléatoire qui, au choix d'un billet associe la valeur du lot correspondant.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte.
- Quel est le prix minimum d'un billet de tombola (en nombre entier d'euros) que les élèves ont dû fixer pour gagner au moins 1 600 € pour participer au financement du voyage ?

Corrigé On a, pendant plusieurs mois, étudié les ventes chez un concessionnaire qui vend des motos d'occasions. On appelle X la variable aléatoire qui, à une journée choisie au hasard, donne le nombre de motos vendues.



Valeur	0	1	2	3
$P(X = k)$	p	0,21	0,15	0,09

- Calculer la valeur de p .
- Calculer $P(X \leq 1)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- Calculer la probabilité que le concessionnaire vende au moins deux motos cette journée.
- Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Lorsque Tom sort du lycée, il peut rentrer directement chez lui ou bien faire un détour par la salle de sport ou le supermarché.

Les temps de transport, en minutes, entre chaque lieu sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Supermarché	Salle de sport	Domicile
Lycée	6	10	10
Supermarché		7	6
Salle de sport			8

- 2 jours sur 5, Tom rentre directement chez lui.
- 2 jours sur 5, Tom va d'abord à la salle de sport puis, au supermarché avant de rentrer chez lui.
- Sinon, il va à la salle de sport et rentre chez lui.

On note T la variable aléatoire donnant les temps de trajets de Tom entre son lycée et chez lui.

- Déterminer la loi de probabilité de T .
- Calculer $P(T < 20)$ et en donner une interprétation dans le contexte.
- Calculer $E(T)$ et en donner une interprétation dans le contexte.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	2	a
$P(X = x_i)$	0,25	0,3	0,45

Déterminer la valeur de a pour que $E(X) = 3,3$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-5	a	3
$P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,5

Déterminer la valeur de a pour que $E(X) = 0$.

Un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et à faire la somme des deux résultats obtenus.



Pour jouer, il faut payer une mise de 3 euros.

- On gagne 5 € si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6.
- On gagne 12 € si on obtient un résultat strictement inférieur à 4.
- Dans les autres cas, on ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire qui, pour chaque partie, donne le gain algébrique du joueur (en tenant compte de la mise).

- Réaliser un tableau à double entrée ou un arbre de dénombrement pour lister les différents cas possibles.
- Déterminer la loi de probabilité de G .
- Calculer l'espérance de G . Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ?
- On considère maintenant que la mise de départ est un nombre réel m strictement positif. Quelle valeur faudrait-il donner à m pour que ce jeu soit équitable ?

On considère une variable aléatoire G qui, à chaque partie d'un jeu, associe le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire un gain positif s'il gagne, et négatif sinon. À chaque partie, les gains possibles sont -10 ; 2 et a où a est un nombre réel.

On donne : $P(G = -10) = 0,5$ et $P(G = a) = 0,2$.

- Calculer $P(G = 2)$.
- Exprimer l'espérance de G en fonction de a .
- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,2	p	q

- Justifier que $q = 0,8 - p$.
- Déterminer p pour que $E(X) = 1,1$.
- En déduire la valeur de q .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-5	0	1	7
$P(X = x_i)$	0,2	p	0,3	q

- Déterminer la valeur de q pour que $E(X) = 0$.
- En déduire la valeur de p .

3 Épreuves et loi de Bernoulli

Questions flash

43 L'arbre ci-contre représente une épreuve de Bernoulli.

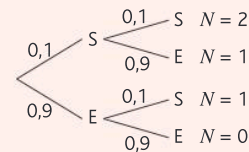


Calculer $P(E)$.

44 Une pièce de monnaie bien équilibrée est lancée trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois le côté face ?

45 Une pièce de monnaie bien équilibrée est lancée deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois le côté face ?

46 L'arbre ci-dessous représente la répétition d'une épreuve de Bernoulli.



On note S le succès et E l'échec. La variable aléatoire N représente le nombre de succès obtenus. Calculer $P(N = 1)$.

47 Calculer $A = 2 \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}$.

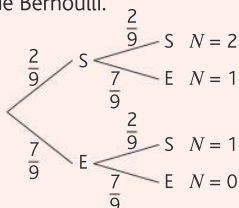
48 Calculer $B = 3 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médémathiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl024



49 L'arbre ci-dessous représente la répétition d'une épreuve de Bernoulli.



On note S le succès et E l'échec. La variable aléatoire N représente le nombre de succès obtenus. Calculer $P(N = 1)$.

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui **possède exactement deux issues**, dont l'une est appelée succès et a pour probabilité p , et l'autre est appelée échec.

Les situations suivantes sont-elles des épreuves de Bernoulli ?

- On lance une pièce de monnaie et on observe le côté visible.
- On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on observe la valeur de la carte (As, Roi...).
- Une trousse opaque contient 12 billes bleues, 10 billes rouges, et 3 billes vertes. On tire une bille au hasard et on regarde si la bille obtenue est rouge.

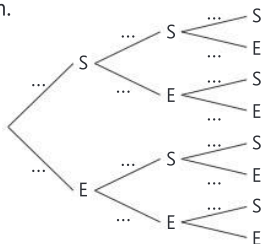
Un technicien travaille pour une entreprise de maintenance industrielle. Lorsqu'il est appelé, il peut effectuer immédiatement la réparation demandée s'il dispose des pièces nécessaires. Sinon, il est obligé de reporter la réparation. On choisit au hasard un appel reçu par le technicien.

On considère les événements :

- S : « Il peut effectuer immédiatement la réparation »
- E : « Il doit reporter la réparation »

Il sait qu'il pourra effectuer une réparation avec une probabilité de 0,8, et cela indépendamment des appels précédents.

- Justifier que la situation peut être modélisée par une épreuve de Bernoulli. On donnera les conditions.
- Le technicien reçoit trois appels. Recopier et compléter l'arbre de probabilités traduisant cette situation.



c. Calculer la probabilité de l'évènement A : « le technicien peut effectuer les trois réparations ».

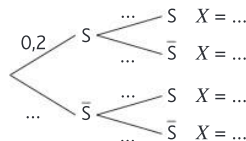
d. Soit l'évènement B : « le technicien peut effectuer exactement deux réparations ». Montrer que $P(B) = 0,384$.

e. En déduire la probabilité de l'évènement G : « le technicien peut effectuer au moins deux réparations ».

On dit que la variable aléatoire X , qui prend la valeur 1 avec une probabilité p et 0 sinon, suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Corrigé L'arbre pondéré ci-dessous représente la répétition d'une même épreuve de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'évènement S .



- Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessus avec les valeurs manquantes.
- Calculer $P(X = 0)$.
- Calculer $P(X = 1)$.

Corrigé Vidéo Un sac opaque contient 6 jetons bleus et 4 jetons rouges. On effectue successivement 3 tirages avec remise dans ce sac. On note X le nombre de jetons rouges obtenus.

- Expliquer pourquoi chaque tirage correspond à une épreuve de Bernoulli dont on donnera le paramètre.
- Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- Construire l'arbre de probabilité modélisant la situation.
- Calculer $P(X = 3)$.
- Calculer $P(X = 1)$.

Corrigé Vidéo En France, 8 % des familles partent au moins une fois aux sports d'hiver chaque année.



On choisit au hasard une famille vivant en France et on considère l'évènement S : « cette famille est partie aux sports d'hiver en 2024 » et on note p la probabilité de S .

- Donner la valeur de p .
- Justifier que cette situation correspond à une épreuve de Bernoulli et en donner le paramètre.

On interroge deux familles de manière indépendante et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de familles ayant passé des vacances aux sports d'hiver.

c. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

d. Donner la loi de probabilités de X en détaillant les calculs.

Plusieurs clubs de tennis décident d'organiser un concours de service. Chaque participant dispose de trois tentatives. Théo participe à ce challenge. On note R l'évènement « Théo réussit son service ». D'après ses statistiques de jeu, la probabilité que Théo réussisse un service est égale à 0,7. On admet que les services de Théo sont indépendants et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre total de services réussis par Théo.

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Déterminer la loi de probabilités de X .

c. Quelle est la probabilité que Théo réussisse au moins un service ?

d. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'interpréter dans le contexte.

e. Pour le concours, on décide d'attribuer des points :

- Pour un service réussi : 5 points ;
- Pour deux services réussis : 15 points s'ils sont consécutifs et 10 points s'ils ne sont pas consécutifs ;
- Pour 3 services réussis : 30 points.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

Déterminer la loi de probabilités de Y .

f. Calculer $E(Y)$.

Dans le cadre du lancement d'une nouvelle offre fibre, l'opérateur internet Surf démarche ses clients par téléphone. La probabilité qu'une personne adopte la nouvelle offre est estimée à 0,3. On appelle successivement et de manière indépendante 3 clients au hasard et on définit l'évènement A : « le client appelé adopte la nouvelle offre ».

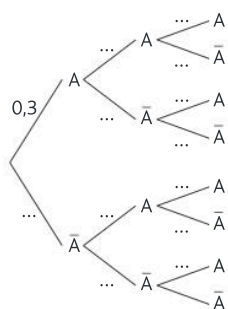
On appelle X la variable égale au nombre de clients ayant adopté la nouvelle offre.

a. Recopier et compléter l'arbre ci-contre pour qu'il représente la situation.

b. Calculer $P(X = 0)$. Interpréter.

c. Calculer $P(X = 1)$. Interpréter.

d. Calculer $P(X \geq 1)$. Interpréter.



Corrigé Une urne contient 9 jetons rouges et 6 jetons verts. Trois jetons sont tirés de cette urne, successivement et avec remise après chaque tirage.

On définit les évènements suivants :

- R : « le jeton tiré est rouge »
- V : « le jeton tiré est vert »

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de jetons rouges obtenus au cours des trois tirages.

a. Calculer $P(R)$, puis $P(V)$.

b. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

d. Calculer $P(X \geq 2)$. Interpréter ce résultat.

e. Calculer $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X .

Lors d'une période promotionnelle dans un supermarché, un client peut recevoir de manière aléatoire une carte-cadeau. On note les évènements :

- S : « le client reçoit une carte-cadeau »
- E : « le client ne reçoit pas une carte-cadeau »

La probabilité qu'un client reçoive une carte-cadeau à la caisse est égale à 0,3.

a. Calculer $P(E)$.

Trois clients se présentent successivement à la caisse. L'obtention d'une carte-cadeau pour un client est supposée être indépendante des autres clients. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cartes cadeaux distribuées parmi les trois clients successifs.

b. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

c. Démontrer que : $P(X = 1) = 0,441$.

d. Déterminer la loi de probabilité de X .

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$		0,441		

e. Calculer : $P(X \geq 2)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

f. Calculer $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X .

Dans une boulangerie, 60 % des clients payent par carte bancaire. Quatre clients sont interrogés au hasard pour déterminer s'ils



ont effectué leur paiement par carte. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de réponses positives.

On suppose que les réponses des clients sont indépendantes les unes des autres.

Exercices

Les exercices roses sont corrigés :
 • en fin de manuel ou • en vidéo avec Médématiques
 p. 200 hachette-clic.fr/25mfl024



a. Recopier et compléter le tableau afin de déterminer la loi de probabilités de X .

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$					

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 clients payent par carte bancaire ?

c. Calculer $P(X \leq 3)$. Interpréter ce résultat.

Python Calculatrice Un centre d'adoption pour animaux organise une journée portes ouvertes. Lors de cette journée, la probabilité qu'un visiteur adopte un animal est égale à 0,11. Soit A l'évènement : « le visiteur adopte un animal ».



Quatre visiteurs se présentent successivement au centre d'adoption. L'adoption d'un animal par un visiteur est supposée indépendante des autres visiteurs.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'animaux adoptés.

Dans cet exercice, les résultats seront à arrondir à 0,001.

a. Calculer $P(\bar{A})$.

b. Calculer la probabilité qu'aucun visiteur n'adopte d'animal. En déduire que $P(X \geq 1) \approx 0,373$.

c. Supposons maintenant que n visiteurs ($n \geq 2$) se présentent successivement au centre d'adoption. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'animaux adoptés.

Démontrer que : $P(Y \geq 1) = 1 - 0,89^n$.

d. Considérons le programme Python ci-dessous :

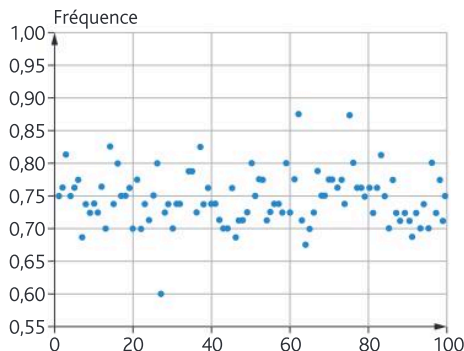
```
n=2
while 1-0.89**n<0.5:
    n=n+1
print(n)
```

- Exécuter ce programme à l'aide d'un ordinateur, d'une calculatrice ou manuellement. Quel est le résultat obtenu ?
- Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Un étudiant passe un QCM composé de 80 questions. Pour chaque question, il y a 4 propositions dont une seule est correcte. L'étudiant décide de répondre au hasard à l'ensemble des questions.

L'objectif est d'analyser, la fréquence des réponses incorrectes dans ce QCM de 80 questions.

Pour cela, 100 échantillons de 80 questions ont été simulés, et les résultats obtenus sont représentés dans le nuage de points ci-après.



Dans cette situation p représente la probabilité que l'étudiant donne une réponse incorrecte et on admettra que l'écart type s vérifie $s = 0,05$.

- Donner la valeur de p .
- Calculer le pourcentage des fréquences situées dans l'intervalle $[p - s; p + s]$.
- Calculer le pourcentage des fréquences situées dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$.

Une école organise un tirage au sort pour proposer à ses élèves une activité l'après-midi. Lors de cet évènement, un élève tire au hasard un ticket dans une boîte. Cette boîte contient huit tickets « activité extérieure » et 5 tickets « activité intérieure ». Après le tirage, l'élève repose le ticket dans la boîte. Ainsi, les tirages successifs sont indépendants les uns des autres.

On définit les évènements suivants :

- E : « l'élève a tiré un ticket activité extérieure »
- I : « l'élève a tiré un ticket activité intérieure »

- Calculer $P(E)$, puis $P(I)$.
- Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 7 du programme Python ci-dessous afin de simuler le nombre d'élèves ayant choisi, au hasard, une activité extérieure dans un groupe de n élèves.

```
1 from random import *
2 def exterieur(n):
3     nombre=0
4     for i in range(...):
5         if random()<....:
6             nombre=nombre+1
7     return ....
```

c. Expliquer le rôle de la fonction suivante :

```
9 def f_secrete(n,m):
10     liste=[exterieur(n)/n for i in range(m)]
11     return liste
```

d. On exécute cette fonction dans le cas où $n = 200$ et $m = 7$. Voici le résultat affiché :

```
>>> f_secrete(200,7)
[0.65, 0.64, 0.64, 0.62, 0.665, 0.62, 0.625]
```

Est-il possible d'expliquer pourquoi ces résultats sont si proches les uns des autres ?

Sur la route

» Modéliser • Représenter • Calculer

Chaque jour, Benjamin se rend à vélo à son travail et rencontre successivement 3 feux tricolores. Les fonctionnements des feux sont supposés indépendants. Chacun d'eux reste 20 secondes au vert, puis 60 secondes au rouge ou à l'orange.

1. Pour chaque feu, on note V l'évènement « le feu est au vert ».

a. Calculer $P(V)$.

b. Justifier que ce parcours peut être modélisé par trois répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

c. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

2. Une journée étant choisie au hasard, on note X la variable aléatoire donnant le nombre de feux verts rencontrés sur la route pour se rendre au travail.

Toutes les probabilités seront arrondies au millième.

a. Calculer $P(X = 1)$. Interpréter.

b. Donner la loi de probabilité de X .

c. Ce matin, Benjamin est parti trop tard. Il sera en retard s'il s'arrête au moins deux fois. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

3. Dans toute sa carrière, Benjamin rencontrera cette série de feux plusieurs milliers de fois.

En moyenne, combien de feux sont verts chaque matin ?

Une bonne technique pour réussir ses QCM ? Python

» Chercher • Calculer • Raisonner

Un QCM est composé de n questions. Chaque question propose quatre possibilités de réponse, une seule est exacte. Léna décide de répondre au hasard et de manière indépendante à chacune de ces questions.

PARTIE A

On appelle E l'évènement « la réponse à la question posée est exacte ». On arrondira si nécessaire les résultats à 10^{-3} près.

1. Calculer $P(E)$.

2. Dans cette question, on pose $n = 4$.

a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité que toutes les réponses soient les bonnes.

c. Calculer la probabilité d'avoir une seule mauvaise réponse.

3. Dans cette question, n est de nouveau un entier quelconque.

a. Exprimer en fonction de n la probabilité que toutes les réponses soient mauvaises.

b. Dans cette question, on souhaite trouver le nombre minimal n de questions à poser pour que la probabilité que toutes les réponses soient fausses soit inférieure ou égale à 0,01.

Recopier et compléter l'algorithme suivant écrit en langage Python :

```
n = ...
while .....:
    n = ...
print(n)
```

c. Donner la valeur de n affichée par l'algorithme.

PARTIE B

Dans toute cette partie, on revient au cas $n = 4$.

Dans ce QCM, chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise réponse enlève 1 point. On note X la variable aléatoire égale au score obtenu après avoir répondu aux 4 questions.

Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Compléter l'arbre réalisé à la partie A avec les valeurs de X pour chaque issue.

2. Donner la loi de probabilité de X .

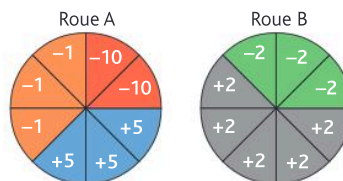
3. Léna affirme qu'en répondant aux questions au hasard, elle a plus d'une chance sur deux d'obtenir un score positif. Cette affirmation est-elle vraie ?

4. Calculer l'espérance de X et l'interpréter dans ce contexte.

Une loterie sur 2 roues

» Représenter • Calculer • Raisonner

Pour financer son club sportif, Paul souhaite organiser une loterie lors de la journée portes ouvertes. Le jeu consiste à faire tourner les deux roues ci-dessous.



Les deux roues ont été partagées en huit secteurs angulaires identiques. Chaque secteur a une couleur et, à chaque couleur, correspond un nombre.

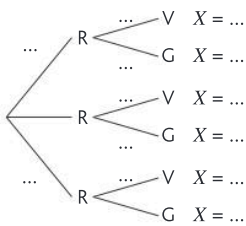
On note R (respectivement J, B, G, V) l'évènement « le secteur angulaire est rouge (respectivement jaune, bleu, gris, vert) ».

Un joueur doit faire tourner les deux roues. Son gain algébrique est la somme des deux nombres obtenus.

Par exemple si les résultats sont -10 pour la roue A et $+2$ pour la roue B, le gain sera égal à $-10 + 2 = -8$ (le joueur perd 8 euros).

Un joueur fait tourner les deux roues, on note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

a. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer $P(J \cap G)$. Interpréter ce résultat.

Quel est le gain du joueur dans ce cas ?

c. Calculer $P(X = 3)$.

d. Donner la loi de probabilité X .

e. On dit qu'un joueur gagne lorsque $X > 0$. Calculer la probabilité qu'un joueur gagne.

f. Paul choisit, pour son jeu, le slogan suivant :

« Ici, plus de 6 gagnants sur 10 joueurs ».

Que penser de ce slogan ?

g. Calculer $E(X)$, l'espérance de gain d'un joueur. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

h. Paul espère que 200 personnes viendront jouer à ce jeu. Si c'est le cas, combien peut-il espérer obtenir pour son club à la fin de la journée ?

Pièces à multiples défauts STI2D STL

» Représenter • Calculer • Raisonner

Dans une usine, on produit, grâce à des machines M_1 , M_2 et M_3 , des pièces qui ont :

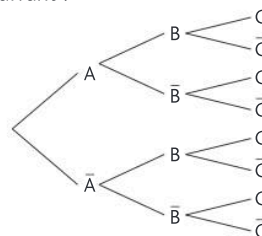
- pour la machine M_1 , un défaut dans 5 % des cas ;
- pour la machine M_2 , un défaut dans 2 % des cas ;
- pour la machine M_3 , un défaut dans 3 % des cas.

On fabrique ensuite un objet en assemblant une pièce provenant de M_1 , une pièce provenant de M_2 et une pièce provenant de M_3 choisies au hasard dans le stock, indépendamment les unes des autres.

Lorsqu'on choisit une pièce au hasard, on considère les événements :

- A : « la pièce présente un défaut provenant de M_1 » ;
- B : « la pièce présente un défaut provenant de M_2 » ;
- C : « la pièce présente un défaut provenant de M_3 ».

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilités suivant :



b. Calculer la probabilité qu'un objet choisi au hasard dans la production n'ait aucun défaut ?

c. Calculer la probabilité qu'un objet choisi au hasard dans la production ne possède ni le défaut A, ni le défaut C ?

d. Calculer la probabilité qu'un objet choisi au hasard dans la production possède un seul défaut ?

e. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque objet prélevé au hasard dans la production associe de nombre de ses défauts. Déterminer la loi de probabilité de X .

f. Calculer l'espérance de X . Comment peut-on interpréter ce résultat dans ce contexte ?

Jeu de foire

» Modéliser • Calculer • Raisonner

Dans une foire, on propose le jeu suivant : pour une mise de 1 €, le joueur peut parier sur un nombre entier compris entre 1 et 6. Il lance alors trois dés équilibrés.

Si le nombre sur lequel il a parié sort une fois, deux fois ou trois fois, on lui rembourse sa mise en y ajoutant, respectivement, 1 €, 2 € ou 3 €. Sinon, il perd sa mise.

L'objectif de cet exercice est d'étudier si ce jeu est équitable ou non.

On peut considérer que le lancer de ces trois dés est équivalent à lancer trois fois de suite un même dé et on appelle S l'évènement « le lancer de dé donne le nombre sur lequel le joueur a misé ».

a. Justifier le lancer des 3 dés correspond à la succession de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont on donnera le paramètre.

b. Représenter ce lancer par un arbre pondéré de probabilités.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque partie de ce jeu associe le gain (ou la perte).

c. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

d. Déterminer la loi de probabilité de X .

e. Calculer $E(X)$ et conclure.

Pile je gagne, face tu perds STMG Tableur

» Représenter • Modéliser • Calculer

Une expérience aléatoire consiste à lancer 5 fois de suite une pièce parfaitement équilibrée. On note 1 si on obtient le côté « face », 0 si c'est le côté « pile ».
Le but de cet exercice est de simuler cette expérience aléatoire dans une feuille de calcul.

	A	B	C	D	E	F
1		Échantillon 1	Échantillon 2	Échantillon 4	Échantillon 5	Échantillon 6
2						
3						
4						
5						
6						
7		Fréquence				

- Préparer une feuille de calcul comme celle proposée ci-dessus.
- Saisir dans la cellule B2 la formule : `=SI(ALEA()<=0.5 ; 1 ; 0)`

Puis recopier cette formule dans la plage B2 : F6.

Le tableau est similaire à celui présenté ci-contre.

	A	B	C	D	E	F
1		Échantillon 1	Échantillon 2	Échantillon 4	Échantillon 5	Échantillon 6
2		1	1	0	0	1
3		0	1	1	1	1
4		0	0	1	1	1
5		0	1	1	0	0
6		1	1	1	1	1
7		Fréquence				

- Expliquer l'action de la formule copiée en B2.
- L'objectif est de compléter la ligne 7 avec la fréquence d'apparition du 1 dans chaque échantillon.

Quelle formule faut-il écrire en B7, puis recopiée vers la droite, afin d'obtenir les résultats de la ligne 7 automatiquement ?

- Représenter les fréquences observées dans cette simulation par un nuage de points. Pour cela, réaliser les étapes suivantes :

- Sélectionner la plage A7 : F7.
- Dans votre tableur, sélectionner « graphiques », puis « nuages de points ».

6		1	1	1	1	1
7	Fréquence	0,4	0,8	0,8	0,6	0,8

- Modifier le tableau pour simuler, 20 lancers successifs d'une pièce de monnaie, puis afficher un graphique en nuages de points représentant les fréquences d'apparition du 1 dans cette simulation.
- Comparer les deux graphiques obtenus.

Lancers successifs d'un dé STMG STI2D Python

» Représenter • Calculer



On lance un dé, bien équilibré, à 6 faces. Le joueur gagne s'il obtient un 5 ou un 6.
Soit S l'évènement : « Le joueur gagne ».

- Justifier que cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. Préciser son paramètre.
- Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$		

Après avoir recopié le tableau ci-dessus, donner la loi de probabilité de X .

- On donne le programme Python ci-contre.

- Quelle est l'action de la ligne 3 de ce programme ?
- Quel est le but de ce programme ?
- Lors de l'exécution, on obtient le résultat : `>>> gain()`
0 Interpréter ce résultat.
- Le programme Python ci-dessous permet de simuler le résultat de n parties.

```

1 from random import *
2 def gain():
3     x=random()
4     if x<1/3:
5         g=1
6     else:
7         g=0
8     return g
9

```

```

def simulation(n):
    L=[gain() for i in range(n)]
    return L

```

```

>>> simulation(10)
[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]

```

- Lors de l'exécution, on obtient le résultat : `[0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]`
Calculer la fréquence de succès dans cette simulation.
- Exécuter à nouveau ce programme, puis calculer la fréquence de succès dans cette nouvelle simulation.

Problèmes

avec outils

```
def freq(n):
    return sum(simulation(n))/n
```

5. La fonction freq est définie ainsi :

- Quel est le but de la fonction freq ainsi définie ?
- Après avoir exécuté le programme, le résultat est le suivant :

```
>>> freq(10)
0.3
```

Interpréter ce résultat.

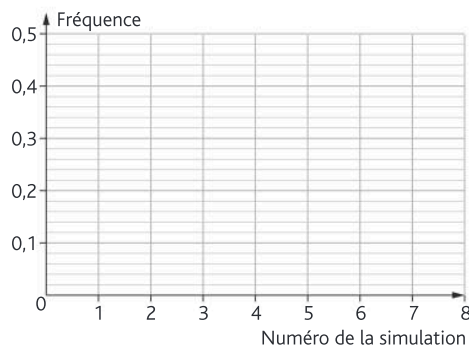
6. Recopier et compléter l'instruction ci-contre afin de réaliser 8 simulations de fréquences de succès pour 20 parties.

7. Reproduire le graphique et représenter les fréquences observées dans cette simulation sous forme d'un nuage de points.

8. Réaliser 8 simulations de fréquences de succès pour 500 parties.

Représenter les fréquences observées dans cette simulation sous forme d'un nuage de points dans un autre graphique.

```
>>> [freq(...) for i in range(...)]
```



Un jeu équitable ou non ?

Tableur Python

» Calculer • Modéliser • Raisonner

On considère le jeu suivant : on lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. Si l'écart entre les résultats obtenus pour chacun des dés est supérieur ou égal à 3, on gagne 1 €. Sinon, on perd 1 €. L'objectif de cet exercice est d'étudier si ce jeu est équitable ou non. Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : Simulation avec un tableur

Dans cette partie, on se propose d'effectuer 1 000 réalisations de ce jeu à l'aide d'un tableur.

- Quelle formule doit-on insérer dans la cellule A1 afin de simuler le lancer du premier dé ?
- Étendre cette formule afin de simuler 1 000 lancers du premier dé (plage A1 : A1000) et 1 000 lancers du second dé (plage B1 : B1000).
- Quelle formule doit-on insérer dans la cellule C1 afin de calculer l'écart entre les résultats du premier lancer des deux dés ? Étendre cette formule afin de simuler 1 000 lancers.
- Quelle formule doit-on insérer dans la cellule D1 afin de calculer le gain ou la perte obtenu pour le premier lancer des deux dés ? Étendre cette formule afin de simuler 1 000 lancers.
- En utilisant la fonction SOMME, calculer le gain moyen dans la cellule E1 après cette série de 1 000 parties.

On obtient finalement une feuille de calcul semblable à celle présentée ci-contre.

- En actualisant votre feuille de calcul (souvent à l'aide de la touche F9), effectuer d'autres simulations de 1 000 parties. Ce jeu vous semble-t-il équitable ?

ALEA.ENTRE.BORNES(min ; max) est la fonction qui renvoie un nombre entier choisi aléatoirement dans l'intervalle [min ; max].

La fonction ABS(nombre) renvoie la valeur absolue de ce nombre.

La fonction SI(test ; V1 ; V2) renvoie la valeur V1 si la condition test est vraie et la valeur V2 sinon.

	A	B	C	D	E
1	3	6	3	1	-0,334
2	6	6	0	-1	
3	3	5	2	-1	
4	6	4	2	-1	
5	1	5	4	1	
6	6	4	2	-1	
7	3	2	1	-1	
8	1	2	1	-1	
9	1	2	1	-1	
10	1	2	1	-1	

PARTIE B : Simulation avec Python

Dans cette partie, on se propose de réaliser 1 000 réalisations de ce jeu à l'aide d'un algorithme écrit en langage Python.

On présente ci-dessous un algorithme écrit en Python permettant de simuler n lancers.

```
1 import random
2 def jeu(n):
3     c=0
4     for i in range(n):
5         a=random.randint(1,6)
6         b=random.randint(1,6)
7         if abs(a-b)>=3:
8             c=c+1
9         else :
10            c=c-1
11    return(c/n)
```

- Que contiennent les variables a et b ?
- À quoi sert la ligne 4 ?
- Que contient la variable c ?
- Quel résultat permet de calculer la fonction jeu ?
- Saisir et compiler cet algorithme, puis exécuter cette fonction plusieurs fois avec $n = 1000$.

Ce jeu vous semble-t-il équitable ?

PARTIE C : Étude théorique

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de deux dés, donne le gain (ou la perte) du joueur.

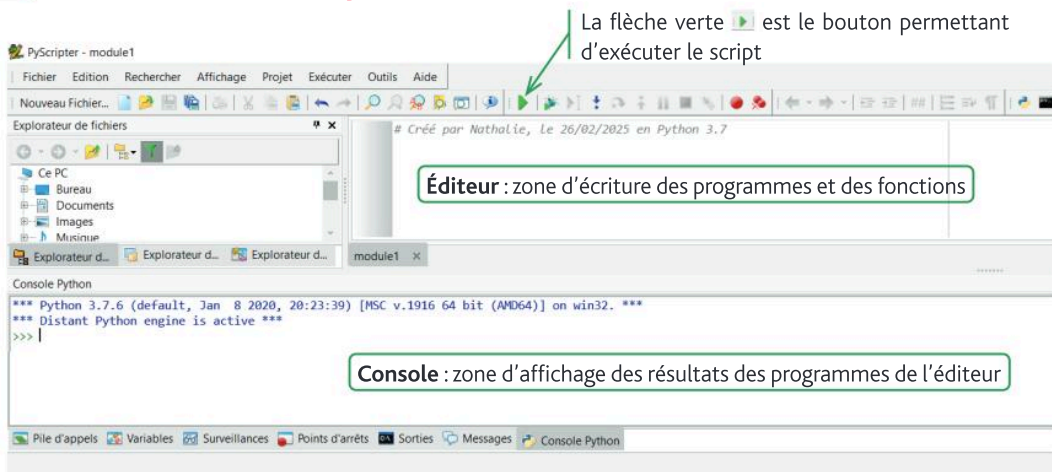
- Quelles sont les valeurs possibles de X ?
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer l'espérance $E(X)$.
- Conclure.

PARTIE D : Modification des règles

Les deux questions sont indépendantes.

- Si, dans la règle du jeu, la condition pour gagner un euro est désormais d'avoir un écart supérieur un égal à 2 entre les résultats des deux dés, ce jeu est-il à présent équitable ? (On pourra modifier une des deux simulations et adapter l'étude théorique).
- On reprend la règle de base. Quel devrait être le gain du joueur (la perte restant inchangée) pour que ce jeu soit équitable ?

L'environnement EduPython



Remarque


Il est possible de saisir directement des **instructions** dans la **console**.

Les principales opérations

Dans le langage Python, pour stocker une valeur dans une variable on utilise **l'affectation** à l'aide du symbole "=". Ainsi, dans le tableau ci-dessous, la variable a contient le nombre 11 et la variable b contient le nombre 3.

Affectation des variables	Addition	Produit	Quotient
<pre>>>> a=11 >>> b=3</pre>	<pre>>>> a+b 14</pre>	<pre>>>> a*b 33</pre>	<pre>>>> a/b 3.6666666666666665</pre>
Puissance	Soustraction	Reste dans la division euclidienne de a par b	Quotient dans la division euclidienne de a par b
<pre>>>> a**2 121</pre>	<pre>>>> a-b 8</pre>	<pre>>>> a%b 2</pre>	<pre>>>> a//b 3</pre>

Pour faire **afficher un résultat dans la console**, il est possible d'utiliser l'instruction `print()` dans l'éditeur.

Éditeur	Affichage dans la Console après 
<pre>a=11 b=3 print(a+b**2)</pre>	<pre>*** Console de processus distant Réinitialisée *** 20 >>></pre>

Les bibliothèques

Certaines fonctions spécifiques ne sont pas directement accessibles, elles sont rangées dans des **bibliothèques**. Il sera nécessaire d'**appeler ces bibliothèques** dans les programmes afin de pouvoir les utiliser.

Les principales bibliothèques utilisées sont **math** (principales fonctions mathématiques comme la racine carrée, `sqrt()`, ou le nombre π , `pi`) et la bibliothèque **random** (fonctions liées aux probabilités). Dans la bibliothèque **random**, on utilisera la fonction `randint` qui permet de renvoyer un entier compris entre deux entiers choisis par l'utilisateur.


Importer la bibliothèque en entier	Importer certaines fonctions de la bibliothèque
<pre>from math import *</pre>	<pre>from math import sqrt, pi</pre>

Les fonctions

Une **fonction** est un programme qui porte un nom et qui utilise aucune, une ou plusieurs **variables**.
 Une fonction peut renvoyer un **résultat** qui pourra être **réutilisé** dans une autre fonction ou un autre programme.

```
def nom_de_la_fonction(variable1, variable2, ...):
    instructions(s)
    return resultat(s)
```

Fonction renvoyant l'image d'un réel par la fonction affine $f(x) = 3x + 5$	Fonction renvoyant le périmètre et l'aire d'un disque de rayon R
<pre>def image_f(x): return 3*x+5</pre>	<pre>from math import pi def peri_aire(R): return 2*pi*R,pi*R**2</pre>

Pour afficher les résultats d'une fonction il est nécessaire de l'appeler dans la console, après .

Déterminer l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction affine f définie par $f(x) = 3x + 5$	Déterminer le périmètre et l'aire du disque de rayon 4
<pre>>>> image_f(2/3) 7.0</pre>	<pre>>>> peri_aire(4) (25.132741228718345, 50.26548245743669)</pre>

Instructions conditionnelles

Afin d'aiguiller dans différentes directions l'exécution d'un programme, on peut utiliser des **instructions conditionnelles**. Pour cela on utilise l'instruction `if`, qui peut être complétée par l'instruction `else` ou lorsque plus de deux possibilités sont disponibles, l'instruction `elif` peut être utilisée.

```
if condition(s):
    instruction(s)

if condition(s):
    instruction(s)
else :
    instruction(s)

if condition(s):
    instruction(s)
elif condition(s):
    instruction(s)
elif ....
else :
    ....
```

Afin de rentrer dans l'instruction conditionnelle, il est nécessaire de vérifier une **condition**.

Plusieurs tests sont disponibles :

Test d'égalité	Différent	Strictement supérieur	Strictement inférieur	Supérieur ou égal	Inférieur ou égal
<code>==</code>	<code>!=</code>	<code>></code>	<code><</code>	<code>>=</code>	<code><=</code>

Fonction renvoyant la moitié d'un entier si celui-ci est pair	Fonction Syracuse, permettant de renvoyer la moitié d'un entier si celui-ci est pair et renvoie le triple plus un s'il est impair	Fonction renvoyant le tarif d'une place de cinéma. Le tarif moins de 16 ans est de 6,40 €, le tarif moins de 18 ans est de 7,80 € et le tarif normal est de 11,50 €.
<pre>def demi(n): if n%2==0 : n=n//2 return n</pre>	<pre>def Syracuse(n): if n%2==0 : n=n//2 else : n=3*n+1 return n</pre>	<pre>def tarif(age): if age<=16: prix=6.4 elif age<=18: prix=7.8 else:prix=11.5 return prix</pre>

Boucle non bornée

Pour réaliser certains programmes il est parfois nécessaire de réaliser une ou plusieurs instructions tant qu'une condition est réalisée. Pour cela on utilise une **boucle non bornée** : `while`.

```
while condition(s):
    instruction(s)
```

Fonction permettant de renvoyer l'année à partir de laquelle une somme d'argent placé sur un livret rémunéré à 2,4 % aura doublé.	Fonction permettant de compter le nombre de fois où il est nécessaire de lancer un dé pour obtenir un 6.
<pre>def somme(S): n=0 Total=2*S while S<=Total: n=n+1 S=S*1.024 return n</pre>	<pre>from random import randint def obtenir6(): lancer=1 de=randint(1,6) while de!=6: lancer=lancer+1 de=randint(1,6) return lancer</pre>

Boucle bornée

Pour réaliser certains programmes il est parfois nécessaire de réaliser une ou plusieurs instructions un nombre défini de fois. Lorsque le nombre de répétitions est connu, on utilise une **boucle bornée**, la boucle `for`.

Afin d'**énumérer** le nombre de passage dans la boucle bornée `for`, on utilise l'instruction `range`.

<code>for i in range(5):</code>	<code>for n in range(5,10):</code>	<code>for k in range(5,20,2):</code>
La variable <i>i</i> prend les valeurs entières allant de 0 à 4. <i>i</i> prendra cinq valeurs.	La variable <i>n</i> prend les valeurs entières allant de 5 à 9.	La variable <i>k</i> prend les valeurs entières de 5 à 19 avec un pas de 2. C'est-à-dire 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 et 19.

```
for variable in range(...):
    instruction(s)
```

Fonction permettant d'ajouter tous les entiers de 1 à une valeur choisie par l'utilisateur	Fonction permettant d'ajouter tous les entiers compris entre deux entiers choisis par l'utilisateur	Fonction permettant d'ajouter tous les entiers impairs de 1 à une valeur choisie par l'utilisateur
<pre>def somme_entiers(N): Somme=0 for n in range(N+1): Somme=Somme+n return Somme</pre>	<pre>def somme_entiers_bis(N): Somme=0 for n in range(5,N+1): Somme=Somme+n return Somme</pre>	<pre>def somme_entiers_impairs(N): Somme=0 for n in range(1,N+1,2): Somme=Somme+n return Somme</pre>

Parfois, la boucle bornée est exécutée un certain nombre de fois, sans que la variable du `range` ne soit utilisée dans le programme.

Fonction permettant de calculer la fréquence d'apparition du 6 au cours d'un nombre de lancers, décidé par l'utilisateur, d'un dé à 6 faces.	<pre>from random import randint def freq6(N): nbre6=0 for i in range(N): if randint(1,6)==6: nbre6=nbre6+1 return nbre6/N</pre>
--	---

Les chaînes de caractères

Une **chaîne de caractères** est une succession de **plusieurs caractères** (chiffres, lettres, symboles, ...) **rangés dans un ordre donné**. Une chaîne de caractères se note à l'aide de **guillemets simples** ou **doubles**.

```
>>> "J'aime les maths"
"J'aime les maths"

>>> '2,3 et 5 sont des nombres premiers'
'2,3 et 5 sont des nombres premiers'
```

Pour déterminer la **longueur d'une chaîne de caractères**, on utilise l'instruction `len()`. L'espace est considéré comme un caractère à part entière.

<pre>>>> len("J'aime les maths") 16</pre>	<pre>>>> len('2,3 et 5 sont des nombres premiers') 34</pre>
--	--

Il est possible d'extraire les caractères d'une chaîne de caractères. Pour cela il faut noter le rang du ou des caractères à extraire entre crochets.

Chaîne de caractères	>>> L="J'aime les maths"															
	J	'	a	i	m	e		l	e	s		m	a	t	h	s
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Caractère(s) à extraire	Le 5 ^e caractère ou caractère de rang 4				Du 1 ^{er} au 5 ^e caractère (rang 0 à 4)				Du 5 ^e au dernier (rang 4 à 15)				Du 5 ^e au 8 ^e (rang 4 à 7)			
Instruction et résultat	<pre>>>> L[4] 'm'</pre>				<pre>>>> L[0:5] "J'aim" ou >>> L[:5] "J'aim"</pre>				<pre>>>> L[4:16] 'me les maths' ou >>> L[4:] 'me les maths'</pre>				<pre>>>> L[4:8] 'me l'</pre>			

Un certain nombre d'opérations sont envisageables avec des chaînes de caractères.

Concaténation (enchaînement)	Répétition	Égalité	Différence	Comparaison (utilisation de l'ordre alphabétique)
<pre>>>> A='Bon' >>> B='jour' >>> A+B 'Bonjour'</pre>	<pre>>>> A='apt' >>> 4*A 'aptaptaptapt'</pre>	<pre>>>> A='maths' >>> A=='maths' True >>> A=='math' False</pre>	<pre>>>> A='maths' >>> A!='maths' False >>> A!='math' True</pre>	<pre>>>> A='Balon' >>> B='Balle' >>> A<B False</pre>

Remarque

True et False sont des **booléens**. Ils s'affichent lorsque la proposition est **vraie**, respectivement **fausse**. Ils sont présents de manière implicite chaque fois qu'un test est utilisé. Une **boucle bornée** `for` peut être utilisée avec une chaîne de caractères.

Fonction permettant de compter le nombre d'occurrences du caractère `e` dans une chaîne de caractères.

<pre>def compte_e(phrase): nbre_e=0 for k in phrase: if k=='e': nbre_e=nbre_e+1 return nbre_e</pre>	<pre>>>> compte_e('Les enfants sont sages') 3</pre>
---	--

Corrigés

1 Suites : généralités et variations

19 a. $1\,000 \times 0,95 + 500 = 1\,450$. Dans un an il y aura 1 450 poissons.

b. Soit u la suite telle que u_n représente le nombre de poissons dans n années.

$$u_0 = 1\,000 \text{ et } u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 500.$$

20 Soit u la suite telle que u_n représente la proportion de déchets recyclés dans n années. $u_{n+1} = 1,04u_n$.

30 $u_2 = -0,25$ 31 $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{5}{3}$

43 $u_0 = -1$; $u_1 = 5$; $u_2 = -13$; $u_3 = 41$; $u_4 = -121$

44 $u_0 = -10$; $u_1 = -17$; $u_2 = -31$; $u_3 = -59$; $u_4 = -115$

47 a. Chaque nuit il prélève 150 kg d'algues. Chaque jour la quantité d'algues augmente de 3 % donc il y a 3 % d'algues en plus entre le jour n et le jour $n + 1$; augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03. D'où : $u_{n+1} = 1,03 u_n - 150$

b. $u_0 = 2\,500$

c. $u_1 = 1,03 \times 2\,500 - 150 = 2\,425$

$u_2 = 1,03 \times 2\,425 - 150 = 2\,347,75$. Après 2 jours il y aura 2 347,75 kg d'algues.

d. $u_3 = 2\,268,183$. Après 3 jours il y aura 2 268,183 kg d'algues.

49 $u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 4$; $u_4 = 7$

61 a. $a_0 = 182$

b. Chaque année 30% des abonnés disparaissent. Diminuer de 30% revient à multiplier par 0,7.

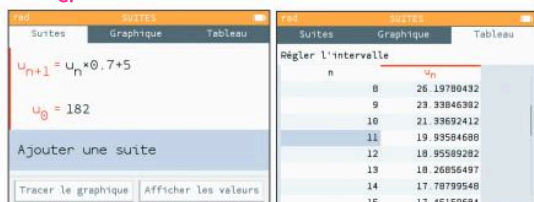
500 nouvelles personnes s'abonnent donc 5 centaines de personnes s'abonnent. D'où $a_{n+1} = 0,7a_n + 5$

c. $2026 = 2024 + 2$

$a_1 = 0,7a_0 + 5 = 132,4$ et $a_2 = 0,7a_1 + 5 = 97,68$.

En 2026 il y aura 9 768 abonnés.

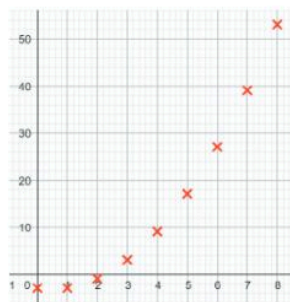
d.



$u_{10} > 20$ et $u_{11} < 20$. La revue ne sera plus publiée à partir de $2024 + 11 = 2035$.

67

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-3	-1	3	9	17	27	39	53



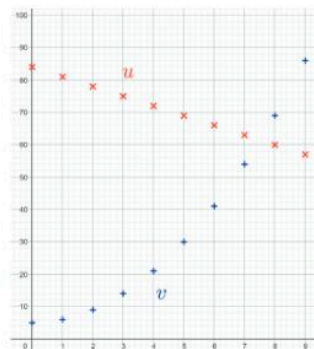
69 $u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_4 = 18$

75 a. u semble être décroissante.

b. $u_0 = 4,6$ et $u_8 = 1,6$

c. $n = 4$

85



$n = 8$

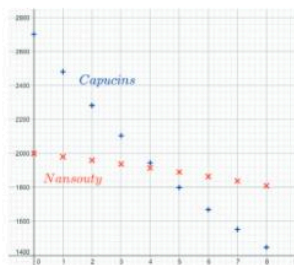
88 a. $u_{n+1} = 0,95 \times 100 + 23 = 118$. 118 vélos ont été loués la 2^e semaine.

b. La suite est croissante. A partir de la 8^e semaine, le nombre de vélos sera insuffisant.

89 a. $u_{n+1} = 1,05u_n - 120$

b. $v_{n+1} = 0,9v_n + 50$

c. $u_0 = 2000$ et $v_0 = 2700$



Dans 4 ans la population de Nansouty sera supérieure à celle des Capucins.

```

99 u=5
L=[]
for i in range(6) :
    L.append(u)
    u=u/2+3
print(L)

```

2 Suites arithmétiques et géométriques

22 a. On a $u_{n+1} = u_n - 50$, ce qui justifie que u est bien arithmétique de raison $r = -50$.
 b. $u_1 = 2000 - 50 = 1950$ et $u_2 = 1950 - 50 = 1900$.
 Lalie diposera de 1900 € fin mars 2025.

27 a.

n	0	1	2
u_n	3	1	-1

Tous les points sont alignés, ce qui permet de justifier que la suite est arithmétique.

c. $r = u_1 - u_0 = -2$
 et $u_5 = u_4 - 2 = -5 - 2 = -7$

31 a. u et v semblent croissantes.

b. $u_{n+1} - u_n = 2$ est indépendant de n (raison 2)
 $v_{n+1} - v_n = 3$ est indépendant de n (raison 3)
 c. $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + 3$
 d. Dans les deux cas, la raison est strictement positive donc les deux suites sont croissantes.

32 a. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 0,25$ donc cette suite est arithmétique.

b. $u_0 = 59,9$ et sa raison est 0,25.
 c. u est croissante car $0,25 > 0$: l'espérance de vie des hommes augmente.

43 a. $C_1 = 20000 \times 1,04 = 20\,800$ € c'est le capital acquis à la fin de la première année.

b. $C_2 = C_1 \times 1,04 = 21632$ puis
 $C_3 = C_2 \times 1,04 = 22497,28$.

63 a. $p_1 = 33000$, $p_2 = 36300$ et $p_3 = 39930$.

b. Pour tout entier n , $p_{n+1} = 1,1 p_n$. La suite p est donc géométrique de raison 1,1.

c. $p_{10} \approx 77812$. En 2035, la production sera d'environ 77812 véhicules.

d. $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
 $= 30000 + 33000 + 36300 + 39930 + 43923$
 $= 183153$

e. De 2025 à 2029, la production totale sera de 183 153 véhicules.

68 a. $u_1 \approx 155$ et $u_2 \approx 161$. Arrondis à l'unité

b. $u_{n+1} = 1,035 u_n$
 c. Suite géométrique croissante car $q > 1$

70 a. u semble croissante tandis que v semble décroissante.

b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ donc $q = 2$; $u_0 = 6$; $u_1 = 12$.

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,4$ donc $q = 0,4$; $v_0 = 3$; $v_1 = 1,2$.

c. $u_{n+1} = 2u_n$

d. u est une suite géométrique croissante car $q > 1$ alors que v est une suite géométrique décroissante car $q < 1$.

89 a. $u_1 = 1$

b. $u_{n+1} = 2u_n$.

c. La suite u est géométrique de raison $q = 2$

d. À l'aide de la calculatrice, on détermine u_{64} soit environ $1,8 \times 10^{19}$ grains de riz

e. Environ $7,4 \times 10^{11}$ tonnes !

91 a. Pour Netflix : $6,01 \times 12 = 72,12$ € ; Pour Desny : $5,94 \times 12 = 71,28$ €

b. Soit u la suite telle que u_n désigne la somme annuelle payée par Mael pour avoir souscrit l'abonnement Netflix en $2024 + n$. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 0,24$: la suite u est arithmétique de raison $r = 0,24$, de premier terme $u_0 = 71,88$.

Soit v la suite telle que v_n désigne la somme annuelle payée par Mael pour avoir souscrit l'abonnement Desny en $2024 + n$. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 0,6$: la suite v est arithmétique de raison $r = 0,6$, de premier terme $v_0 = 70,68$.

c. En 2028.

d. Pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = w_n + 0,84$: la suite w est arithmétique de raison $r = 0,84$, de premier terme $w_0 = 142,56$.

3 Fonctions : généralités

18 a. $f(4) = 4^2 = 16$

b. $f(-2) = (-2)^2 = 4$

c. $f(x) = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

d. $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 = -3$. Or le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. Donc il n'y a aucun antécédent de -3 par f .

19 a. $C(0) = 150$, les charges fixes sont de 150 euros.

b. $C(10) = 520$, le coût de fabrication de 10 bracelets est de 520 euros.

36 a. La courbe verte est associée à la fonction C . La droite bleue est associée à la fonction R .

b. On cherche le moment où les deux représentations graphiques se coupent, soit en $x = 1$ et $x = 3$.

c. Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut vendre entre 10 et 30 coques.

55 1.

x	-2	-1,5	0,3	1
Variations de f	0	↗ 1	↘ -4,5	↗ 0

2. $S = \{-2; -0,5; 1\}$

3. a. $S =]-1; 1[$

b. $S = \{-2\} \cup \{1\}$

c. $S =]-0,5; 1[$

d. $S = \{-2\} \cup [-0,5; 1]$

4. a. Négatif

b. Positif

4 Fonctions polynômes de degré 2 et 3

16 a. Par lecture graphique les racines sont -1 et 3 et le sommet S a pour coordonnées $S(1; -2)$.

b. On sait que $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

On cherche le coefficient a de la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$. Les coordonnées du sommet nous donnent $f(1) = -2$ donc : $a(1+1)(1-3) = -2$, ainsi

$$a = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$$

23 a.

```

1 L=[]
2 n=-4
3 while n<=4:
4     if 5*n*n+5*n-30 == 0:
5         L.append(n)
6         n=n+1
7     else:
8         n=n+1
9 print (L)
    
```

b. Les racines sont -3 et 2 et $a=5$ donc : $g(x) = 5(x+3)(x-2)$

26 a. $f(3) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 6 = 18 - 24 + 6 = 0$ donc 3 est une racine de la fonction f

b. D'après la forme développée, on sait que $a = 2$, d'où $f(x) = 2(x^2 - 4x + 3)$. 3 est une racine donc $f(x) = 2(x-3)(x-x_2)$.

En développant, on a :

$$2(x-3)(x-x_2) = 2(x^2 - x \times x_2 - 3x + 3x_2) \\ = 2(x^2 - (x_2+3)x + 3x_2)$$

Par identification, on a alors : $x_2 + 3 = 4$ et $3x_2 = 3$. Ainsi, $x_2 = 1$. Donc $f(x) = 2(x-3)(x-1)$.

30 a. $f(1) = \frac{1}{7} \times 1^2 + 1 - \frac{8}{7} = \frac{1}{7} + \frac{7}{7} - \frac{8}{7} = 0$ donc 1 est

une racine évidente de f .

b. $f(-8) = \frac{1}{7} \times (-8)^2 + (-8) - \frac{8}{7} \\ = \frac{64}{7} - \frac{56}{7} - \frac{8}{7} = 0$

c. $f(x) = \frac{1}{7}x^2 + x - \frac{8}{7} = \frac{1}{7}(x^2 + 7x - 8) \\ = \frac{1}{7}(x+8)(x-1)$

38 $f(x) = -3(x-7)(x+4)$

x	$-\infty$	-4	7	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

51 a. Les deux équations sont $n \times p = 120$ (Haïzea a acheté n livres de poche pour 120 euros, sachant qu'ils étaient tous au même prix unitaire p) et $(n+2)(p-3) = 120$ (si chaque livre de poche avait coûté 3 euros de moins, elle aurait pu en acheter deux supplémentaires).

b. On sait que $n \times p = 120$ donc $n = \frac{120}{p}$ ($p \neq 0$).

c. On remplace n par $\frac{120}{p}$ dans la deuxième équation et on obtient :

$$\left(\frac{120}{p} + 2\right)(p-3) = 120$$

$$\Leftrightarrow (120 + 2p)(p-3) = 120p$$

$$\Leftrightarrow 120p - 360 + 2p^2 - 6p = 120p$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 - 6p - 360 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 3p - 180 = 0$$

d. $(p+12)(p-15) = p^2 - 15p + 12p - 180 \\ = p^2 - 3p - 180$

e. La seule racine positive est 12 donc chaque livre coûte 12 euros.

$$n = \frac{120}{p} = \frac{120}{12} = 10 \text{ donc Haïzea a acheté 10 livres.}$$

52 a. $B(q) = 100q - (0,1q^2 + 50q + 4000) \\ = 0,1q^2 - 50q + 4000$

b. $B(400) = 0,1 \times 400^2 - 50 \times 400 + 4000 = 0$

$$B(q) = 0,1(q-400)(q-100)$$

c. Entre 100 et 400 hectolitres.

a. Racines : $-2, -1$ et 3 .

b. L'image de 4 par la fonction est 3 donc : $f(x) = 0,1(x+2)(x+1)(x-3)$

D'après le tableau de valeurs, la fonction s'annule en $-5, 3$ et 4 donc les racines sont : $-5, 3$ et 4 .

f est de la forme $f(x) = a(x+5)(x-3)(x-4)$

L'image de 0 est 120 donc $f(0) = 120$ et $f(0) = a(0+5)(0-3)(0-4) = 60a$

Ainsi, $a = 2$, $f(x) = 2(x+5)(x-3)(x-4)$

Une seule racine $\frac{3}{2}$ (car $n^2 + \frac{9}{4} \neq 0$)

Racines : $-2; 1$ et 4 . L'image de 0 par la fonction est 24 donc $f(x) = 3(x+2)(x-1)(x-4)$.

a. $f(x) = (x - 5)(x + 3)$.

Les racines sont -3 et 5 et $a = 1$ donc $a > 0$. Ainsi, le tableau de signes de $f(x)$ est :

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$		
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

b. $g(x) = (x - 7)(x - 5)(x + 3)$

Le tableau de signes de $g(x)$ est donc :

x	$-\infty$	-3	5	7	$+\infty$			
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$x - 7$		$-$	$-$	$-$	0	$+$		
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) = x^3 - 13x^2 - 10x + 400$.

x	$-\infty$	-5	8	10	$+\infty$			
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

a. $a(0) = 175$

b. $a(35) \approx 748$

c. $175 + 1250 = 1325$. À l'aide du logiciel de calcul formel, on trouve que $a(100) = 1325$.

Donc, le refuge est atteint au bout d'1h40.

d. 1 250 mètres gravés en 100 minutes donc la vitesse ascensionnelle moyenne est de 750 mètres par heure.

e. Il mettra 1h15 donc 35 minutes de moins.

a. $B(10) = -10^3 + 29 \times 10^2 - 70 \times 10 - 1200$
 $= -1000 + 2900 - 700 - 1200 = 0$

$B(24) = -24^3 + 29 \times 24^2 - 70 \times 24 - 1200$
 $= -13824 + 16704 - 1680 - 1200 = 0$

b. $B(x) = -(x - 10)(x - 24)(x + 5)$, car
 $-1 \times (-10) \times (-24) \times 5 = -1200$

c. Le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0; 30]$ est :

x	0	10	24	30		
Signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

d. L'entreprise est déficitaire lorsqu'elle vend de 0 à 10 000 articles et de 24 000 à 30 000 articles.

5 Dérivation

a. $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = -4$

b. $f(1) = -2$ et $f'(1) = 4$

a. $f'(x) = 2x + 1 + x = 3x + 1$

b. $g'(x) = 2 \times 2x - 3 \times 1 = 4x - 3$

a. $f'(x) = 3 \times 2x - 0 = 6x$

b. $f(1) = 3 \times 1^2 - 2 = 1$ et $f'(1) = 6 \times 1 = 6$.

c. Equation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Soit $y = 6(x - 1) + 1 = 6x - 5$.

a. $f'(x) = 2x + 2$; $f'(3) = 8$; $f(3) = 15$

$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$, soit

$y = 8(x - 3) + 15 = 8x - 9$.

b. $f'(x) = -3x^2 + 2x$; $f'(2) = -8$; $f(2) = -9$

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit

$y = -8(x - 2) - 9 = -8x + 7$.

c. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 10x + 1$ et $a = -1$.

$f'(x) = -12x^2 + 6x - 10$; $f'(-1) = -28$; $f(1) = 17$

$y = f'(-1)(x + 1) + f(1)$, soit

$y = -28(x + 1) + 17 = -28x - 11$.

a. Par lecture graphique, l'équation de la tangente T est $y = 2x - 1$.

b. Par le calcul : $f'(x) = 3x^2 - 1$; $f'(1) = 2$; $f(1) = 1$
 $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

a. $f'(x) = 4x + 8$

b. Pour étudier le signe de $f'(x)$, on cherche la valeur pour laquelle la dérivée s'annule :

$4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x = -2$

x	-5	-2	5		
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	5	\searrow	-13	\nearrow	85

a. $f'(x) = 2x^2 + 8x - 42$

b. $2(x - 3)(x + 7) = 2x^2 - 6x + 14x - 42$
 $= 2x^2 + 8x - 42$

c. et d.

x	$-\infty$	-7	3	$+\infty$		
Signe de $2(x - 3)$		$-$	0	$+$		
Signe de $(x + 7)$		0	$+$	$+$		
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f		\nearrow	$\frac{787}{3}$	\searrow	-71	\nearrow

a. $f'(x) = 0,002x - 0,15$.

b. $0,002x - 0,15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0,15}{0,002} = 75$

x	20	75	150
Signe de $f''(x)$		- 0 +	
Variations de f	7,9	↘ 4,875 ↗	10,5

c. L'émission de dioxyde de carbone sera minimale pour une vitesse de 75 km.h⁻¹.

d. Il y a symétrie de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $x = 75$.

À 50 km.h⁻¹, on est plus proche du minimum donc on consomme moins et on émet moins de CO₂.

1. a. Par lecture graphique : $f'(0) = 22,5$

b. À $t = 0$, la maladie progresse de 22 500 cas par jour.

c. $y = 22,5x$

2. a. $f'(t) = -6t^2 + 21 \times 2t + \frac{45}{2} = -6t^2 + 42t + \frac{45}{2}$

b. $t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$ mais $-\frac{1}{2} \notin [0; 11]$

$t - \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15}{2}$

x	0	$\frac{15}{2}$	11
Signe de -6		-	-
Signe de $t + \frac{1}{2}$		+	+
Signe de $t - \frac{15}{2}$		- 0 +	
Signe de $f''(t)$		+ 0 -	

c.

x	0	$\frac{15}{2}$	11
Signe de $f''(t)$		+ 0 -	
Variations de f	0	↗ $\frac{2025}{4}$ ↘	$\frac{253}{2}$

d. Equation réduite de la tangente T par le calcul :

$y = f'(0)(t - 0) + f(0)$ avec $f'(0) = \frac{45}{2}$ et $f(0) = 0$,

donc $y = \frac{45}{2}t = 22,5t$.

6 Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

a. Les personnes positives et malades sont 141. La fréquence parmi l'ensemble de la population est :

$f = \frac{141}{300} = 0,47$. La fréquence des personnes positives et malades parmi l'ensemble de la population est 0,47.

b. Les personnes positives sont 144. La fréquence parmi l'ensemble de la population est : $f = \frac{144}{300} = 0,48$.

La fréquence des personnes positives parmi l'ensemble de la population est 0,48.

	Avec soutien	Sans soutien	Total
Réussite	0,25	0,45	0,7
Échec	0,1	0,2	0,3
Total	0,35	0,65	1

a.

	A	B	C	Total
S	0,275	0,15	0,175	0,6
I	0,1	0,125	0,175	0,4
Total	0,375	0,275	0,35	1

b. **0,275** : La fréquence des clients satisfaits âgés de 18 ans à 29 ans, parmi l'ensemble de la population est égale à 0,275.

0,4 : la fréquence des clients insatisfaits parmi l'ensemble de la population est égale à 0,4.

a.

	Jour	Nuit	Total
CDI	120	30	150
CDD	40	60	100
Total	160	90	250

b. $f(N) = \frac{90}{250} = 0,36$

$f(D) = \frac{100}{250} = 0,4$

$f(N \cap D) = \frac{60}{250} = 0,24$

$f_D(N) = \frac{60}{100} = 0,6$

$f_N(D) = \frac{60}{90} \approx 0,667$

a.

	Collégiens	Lycéens	Étudiants	Total
Pratiquent un sport au moins	352	400	400	1152
Ne pratiquent aucun sport	288	200	280	768
Total	640	600	680	1920

- b. $\frac{600}{1920} \approx 0,313$. Il y a environ 31,3 % de lycéens dans cet établissement.
- c. $\frac{288}{1920} = 0,15$. Il y a 15 % de collégiens ne pratiquant aucun sport dans cet établissement.
- d. $\frac{400}{680} \approx 0,588$. Parmi les étudiants, 58,8 % environ ne pratiquent aucun sport.
- e. $\frac{200}{768} \approx 0,260$. Parmi les élèves ne pratiquant aucun sport, 26 % environ sont des lycéens.

- a. $P(N) = \frac{72}{108} = \frac{2}{3}$. La probabilité que le chocolat choisi soit un chocolat noir est égale à $\frac{2}{3}$.
- b. $P(F \cap \bar{N}) = \frac{27}{108} = \frac{1}{4} = 0,25$. La probabilité que le chocolat choisi soit un chocolat au lait fourré au praliné est égale à 0,25.
- c. $P_{\bar{N}}(F) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0,75$. La probabilité que le chocolat soit fourré au praliné, sachant qu'on a choisi un chocolat au lait, est égale à 0,75.

a. Compléter le tableau ci-dessous.

	Avec l'option A	Sans l'option A	Total
Avec l'option B	42	175	217
Sans l'option B	63	70	133
Total	105	245	350

- b. $P(A \cap B) = \frac{42}{350} = 0,12$. La probabilité que le client choisisse les deux options est égale à 0,12.
- c. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{70}{350} = 0,2$. La probabilité que le client ne choisisse aucune option est égale à 0,2.
- d. $P_B(A) = \frac{42}{217} \approx 0,194$. La probabilité que le client choisisse l'option A sachant qu'il a choisi l'option B est égale à 0,194 environ.
- e. $P_A(\bar{B}) = \frac{70}{245} \approx 0,286$. La probabilité qu'un client ne choisisse pas l'option B, sachant qu'il n'a pas choisi l'option A, est égale à 0,286 environ.

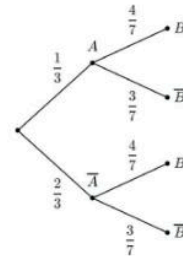
a.

	R	\bar{R}	Total
D	0,072	0,008	0,08
\bar{D}	0,046	0,874	0,92
Total	0,118	0,882	1

- b. $\text{Card}(D \cap \bar{R}) = 0,008 \times 30000 = 240$. Parmi la production quotidienne, 240 pots sont défectueux et ne sont pourtant pas rejetés.
- c. $P_R(\bar{D}) = \frac{0,046}{0,118} \approx 0,390$. La probabilité qu'un pot ne soit pas défectueux sachant qu'il a été rejeté par le test est égale à 0,390 environ.
- d. $P_{\bar{R}}(\bar{D}) = \frac{0,874}{0,882} \approx 0,991$. La probabilité qu'un pot ne soit pas défectueux sachant qu'il n'a pas été rejeté par le test est égale à 0,991 environ.

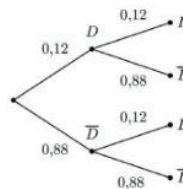
7 Variables aléatoires

a.



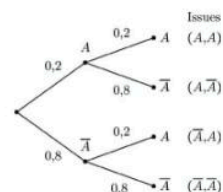
- b. $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$
- c. $P(\bar{A}, B) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$
- d. $P(A, \bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

a.



- b. $p = 0,88 \times 0,88 = 0,7744$. La probabilité qu'aucun des deux vêtements n'ait de défaut est égale à 0,7744.
- c. $p = 0,12 \times 0,88 = 0,1056$. La probabilité que seul le premier T-shirt présente un défaut est égale à 0,1056.

a.



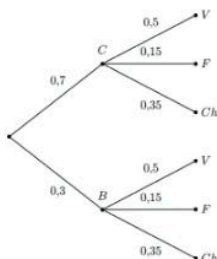
Corrigés

b. Les différentes issues possibles sont : (A,A) , (A,\bar{A}) , (\bar{A},A) et (\bar{A},\bar{A}) .

c. $P(\bar{A},\bar{A}) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$. La probabilité qu'aucun des deux livres ne soit une bande dessinée est égale à 0,64.

d. $p = 1 - 0,64 = 0,36$. La probabilité qu'au moins un des deux livres soit une bande dessinée est égale à 0,36.

a.



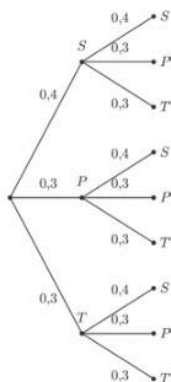
b. $0,3 \times 0,15 = 0,045$. La probabilité qu'un client choisisse un bol à la fraise est égale à 0,045.

c. $0,7 \times 0,35 = 0,245$. La probabilité qu'un client choisisse un cornet au chocolat est égale à 0,245.

a. $P(S) = \frac{4}{10} = 0,4$; $P(P) = \frac{3}{10} = 0,3$;

$P(T) = \frac{3}{10} = 0,3$

b.



c. $P(T,S) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

d. $P(T,P) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$. La probabilité que le premier élève choisi soit en terminale et que le second soit en première est égale à 0,09.

e. $P(S,S) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$. La probabilité que les deux élèves choisis soient en seconde est égale à 0,16.

f. $P(S,P) + P(S,T) + P(P,S) + P(T,S)$
 $= 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,3 + 0,3 \times 0,4 + 0,3 \times 0,4$
 $= 0,48$

La probabilité qu'exactement un seul des deux élèves choisis soit en seconde est égale à 0,48.

a. X peut prendre les valeurs entières comprises entre 0 et 4.

b. $\{X = 0\}$: L'adhérent n'a pris aucun livre.

$\{X \leq 2\}$: L'adhérent a pris au plus 2 livres.

c. $\{X = 0\} = \{X \geq 1\}$. L'adhérent a pris au moins 1 livre.

a. $P(Y = 3) = 0,15$. La probabilité qu'un adhérent emprunte trois CD est égale à 0,15.

b. $P(Y \leq 2) = 0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,7$. La probabilité qu'un adhérent emprunte au plus deux CD est égale à 0,7.

c. $P(Y \geq 4) = 0,1 + 0,15 = 0,25$. La probabilité qu'un adhérent emprunte au moins quatre CD est égale à 0,25.

$E(X) = 0 \times 0,2 + 5 \times 0,2 + 6 \times 0,3 + 9 \times 0,3$
 $E(X) = 5,5$

$E(X) = -5 \times 0,1 - 1 \times 0,2 + 1 \times 0,3 + 5 \times 0,4$
 $E(X) = 1,6$

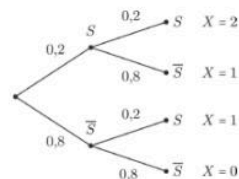
a. $p = 0,55$.

b. $P(X \leq 1) = 0,76$. La probabilité de vendre au plus 1 moto dans la journée est égale à 0,76.

c. $P(X \geq 2) = 0,24$. La probabilité de vendre au moins 2 motos dans la journée est égale à 0,24.

d. $E(X) = 0,78$. Sur un très grand nombre de journées, son nombre moyen de ventes quotidiennes sera proche de 0,78.

a.



b. $P(X = 0) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$

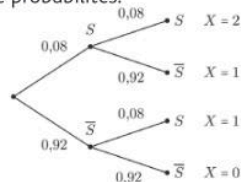
c. $P(X = 1) = 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 = 0,32$

a. $p = 0,08$.

b. C'est une expérience aléatoire qui ne possède que deux issues, S et \bar{S} .

Le succès est S donc le paramètre est $p = 0,08$.

c. Arbre de probabilités.



d. $P(X = 0) = 0,92 \times 0,92 = 0,8464$

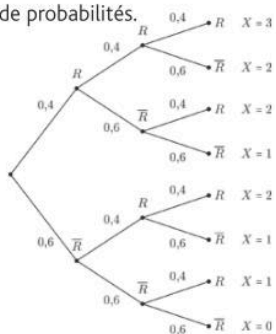
$P(X = 1) = 0,08 \times 0,92 + 0,92 \times 0,08 = 0,1472$

$P(X = 2) = 0,08 \times 0,08 = 0,0064$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,8464	0,1472	0,0064

a. $P(R) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$; $P(V) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$

b. Arbre de probabilités.



c. Loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

d. $P(X \geq 2) = 0,432 + 0,216 = 0,648$. La probabilité d'obtenir au moins deux boules rouges est égale à 0,648.

e. $E(X) = 0 \times 0,064 + 1 \times 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 1,8$.

Crédits photographiques

Images des pages 24 à 195 : utilisées sous licence de Shutterstock.com

Edition : Sophie Blumel

Maquette intérieure et couverture : ADN

Composition et schémas : Grafatom

Iconographie : Elise Pailloncy

Fabrication : Sandrine Delplace

www.hachette-education.com

© Hachette Livre 2025

58 rue Jean Bleuzen, 92178 Vanves Cedex

ISBN : 978-2-01-731700-5

Hachette Education s'engage pour la préservation de l'environnement

Depuis plusieurs années, nous mettons en place des solutions innovantes et écoresponsables, en concertation avec nos fournisseurs, pour limiter notre empreinte carbone et diminuer l'utilisation du plastique, en suivant 5 grands objectifs :

1. Optimiser le format, la pagination et le grammage du papier
2. Utiliser du papier certifié suivant l'un des 2 schémas de certification internationale, PEFC ou FSC
3. Supprimer peu à peu le pelliculage plastique de nos couvertures
4. Imprimer nos ouvrages en France ou en Europe
5. Recycler 100% des ouvrages invendus



 hachette s'engage pour l'environnement en réduisant l'empreinte carbone de ses livres. Celle de cet exemplaire est de : **0,800 kg éq. CO₂** Rendez-vous sur www.hachette-durable.fr

L'usage de la photocopie des ouvrages scolaires par les enseignants est strictement encadré.

Enseignants, dans quel cadre pouvez-vous réaliser, pour vos besoins pédagogiques, des COPIES D'EXTRAITS DE MANUELS SCOLAIRES pour vos élèves ?

Grace aux différents accords signés entre le Centre français d'exploitation du droit de copie, votre établissement et le ministère de l'Éducation nationale :

– Vous pouvez réaliser des PHOTOCOPIES d'extraits de manuels (maximum 10 % du livre) ;

– Vous pouvez diffuser des COPIES NUMÉRIQUES d'extraits de manuels dans le cadre d'une projection en classe (au moyen d'un vidéoprojecteur ; TBI-TNI) ; tablette ; ordinateur ; etc.) ou sur l'intranet de votre établissement tel que l'ENT (maximum 10 % du livre dans la limite de 4 pages consécutives).

N'oubliez pas d'indiquer les références bibliographiques des manuels scolaires utilisés.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de droit de copie (20, rue des Grands-Augustins – 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par l'article L.335-2 du Code de la propriété intellectuelle.